

ESTUDIO DE LOS CAUDALES DRENADOS E INFILTRADOS POR REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS BAJO MACIZOS IMPERMEABLES, MEDIANTE ANALOGIA REOELECTRICA EN MEDIOS CONTINUOS Y ANALISIS MATEMATICO DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES. ESTUDIO ANALOGICO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL. (*)

Por JOAQUIN CRUCES DE ABIA
Prof. Dr. Ingeniero de Caminos

Este artículo es continuación de otros publicados en números anteriores (marzo y mayo de 1977), en los cuales se estudiaban las bases teóricas y las técnicas e instrumental utilizados para establecer la analogía entre hidráulica subterránea y conducción eléctrica, en este artículo se describe la planificación y análisis de resultados para el estudio bidimensional horizontal.

1. PLANIFICACION EXPERIMENTAL

La "unidad experimental" simulada corresponde al siguiente esquema real: una rebanada de terreno permeable horizontal de longitud " L " y anchura " D_d " de altura unidad, con un dren cilíndrico vertical de diámetro " ϕ " cuyo eje está situado en el plano de simetría longitudinal de la rebanada a una distancia " D_p " del extremo de mínimo potencial (0% en la experimentación). (Ver fig. 1).

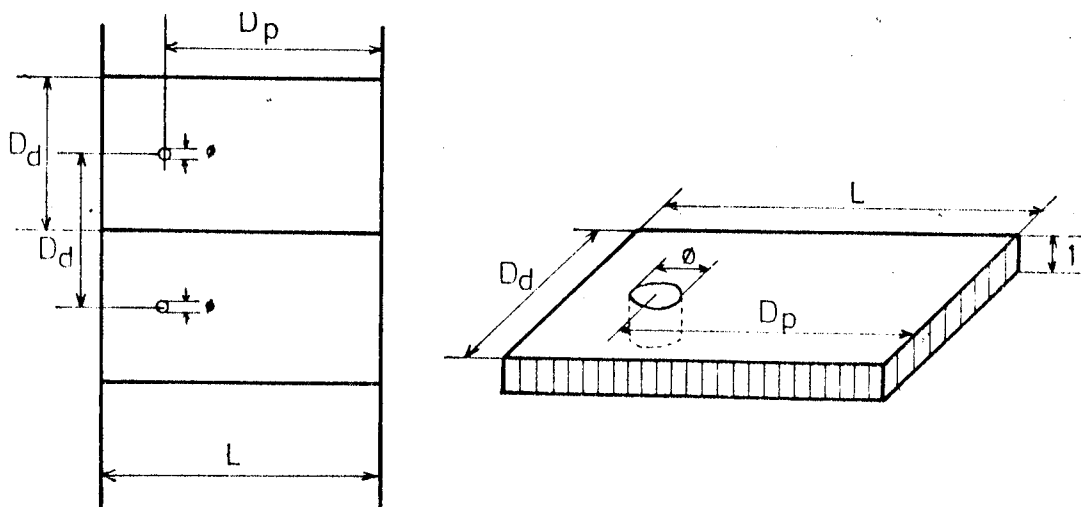


Fig. 1

La rebanada estará sometida a una diferencia de potencial hidráulico " h " entre sus caras transversales a " L ", y el dren estará sometido a diferentes valores de potencial, " h_d ", fijos en cada experimentación.

(*) Se admiten comentarios del presente artículo, que pueden enviarse a la Redacción antes del 30 de junio próximo

REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS

El flujo se considera horizontal y de representación idéntica en todos los planos horizontales, por lo que las superficies equipotenciales serán superficies cilíndricas de generatrices verticales. En estas condiciones, el modelo analógico se define mediante rectángulo de papel conductor "Teledeltos" de dimensiones proporcionales a los lados de la rebanada; las dimensiones pueden ser cualesquiera ya que, como se vió en el anterior artículo, en los modelos bidimensionales no influye la escala, bastando con la semejanza geométrica de modelo y prototipo. En nuestro caso, la longitud "L" se tomó igual a 60 cm, y con relación a ella, las demás que intervienen en el problema.

Con este planteamiento se confeccionaron diferentes paneles analógicos, de tal modo que en cada panel se fijan "L", " D_d " y " D_p ", y se aprovechan para realizar la experimentación relativa a los diferentes diámetros del dren y valores de potencial en el mismo (1).

De cada una de las hipótesis estudiadas se midieron las magnitudes eléctricas análogas correspondientes a las hidráulicas siguientes (ver fig. 2):

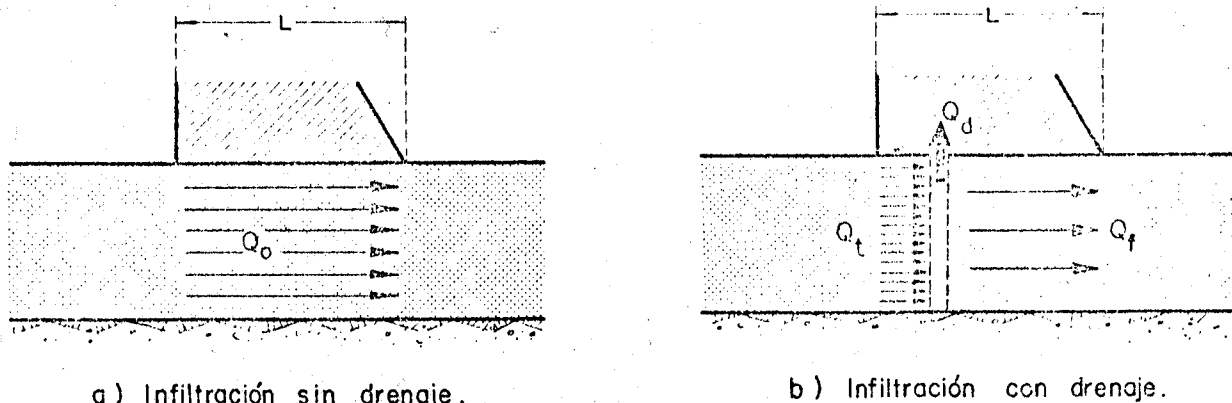


Fig. 2

Q_0 = Caudal de infiltración sin drenaje.

Q_d = Caudal infiltrado por el dren.

Q_f = Caudal infiltrado por el terreno con drenaje.

Q_t = Caudal total infiltrado con drenaje, suma de los caudales Q_d y Q_f .

Las cantidades de las magnitudes que intervienen en el problema se hicieron variar dándoles cinco valores a cada una de ellas, escogidos dentro del margen más probable de utilización en estos estudios, aunque para un caso concreto la experimentación se reduciría a construir un panel analógico con las dimensiones exactas del caso que se desee y medir los valores correspondientes.

Los valores utilizados han sido los siguientes:

$D_d = 0,5 L; 0,4 L; 0,3 L; 0,2 L; 0,1 L.$

$D_p = 0,5 L; 0,6 L; 0,7 L; 0,8 L; 0,9 L.$

$\phi = L/200; L/100; L/50; L/30; L/20.$

Análogamente el potencial del dren se fijó en cada ensayo dentro de la gama posible de variación, siempre inferior, como es lógico, al potencial que le correspondería, en ausencia del dren, al punto en que está situado.

2. HIPOTESIS PARA EL ESTUDIO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL

Como se ha visto en artículos precedentes el problema que se trata de estudiar es la influencia que la introducción de una red de drenaje, constituida por drenes verticales cuyos ejes están todos situados en un mismo plano, tiene sobre los caudales de infiltración y distribución de potencial hidráulico a través de un terreno permeable situado bajo un macizo impermeable.

REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS

Con objeto de poder estudiar este problema mediante analogía eléctrica bidimensional, es preciso realizar una serie de hipótesis simplificativas que permitan establecer dicha analogía. Estas hipótesis son las siguientes (ver fig. 3):

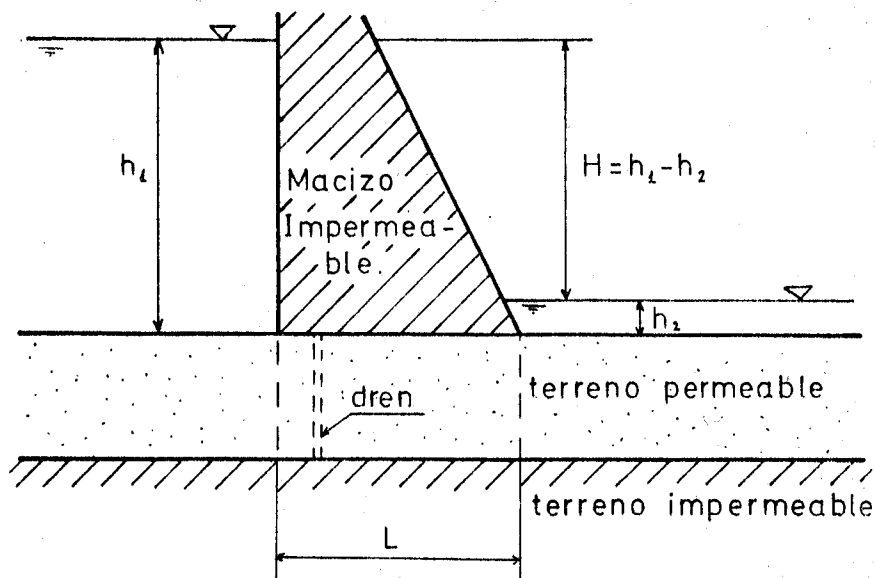


Fig. 3

A) Relativas a la obra y al terreno

Se supone el macizo impermeable (presa de hormigón, muro, dique, solera de un canal, azud, núcleo impermeable en el interior de una presa de materiales sueltos, ...) situado sobre un terreno permeable que descansa a su vez sobre un zócalo impermeable horizontal. Los drenes atraviesan toda la capa permeable. En la dirección perpendicular a la sección de la figura la longitud se supone infinita (estructura lineal) permaneciendo idénticas todas las secciones paralelas a la de la figura.

B) Relativas a la infiltración

Se supone que el terreno permeable es homogéneo e isótropo, que la filtración se rige por la ley de Darcy, que el terreno es química y mecánicamente estable, que la red de corriente es horizontal en la zona proyectante vertical del macizo impermeable y que se establece un régimen estacionario de corriente subterránea.

En el marco de estas hipótesis y con la idea de ofrecer resultados adimensionales, se considera como unidad experimental una rebanada paralelepípedica horizontal de altura unidad para tratamiento bidimensional representada en la fig. 4.

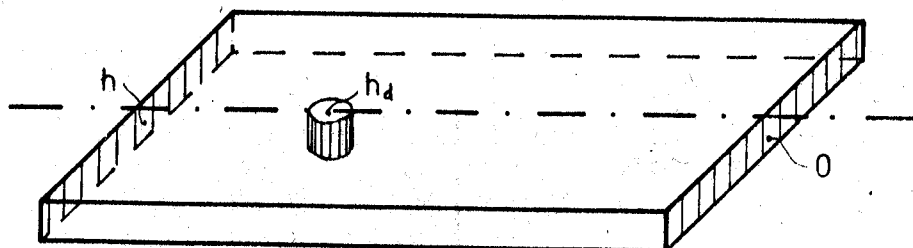


Fig. 4

REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS

Cuadro N.º 1

MODELO 13 . Directo.

Datos: L = 60 cm.

$D_d = 0,3$ L = 18 cm.

$D_p = 0,7$ L = 42 cm.

$V_o = 7,00$ voltios

; $I_o = 0,765$ mA.

V_d		I_d	I_f	I_t	$I_t - I_o$	$\frac{I_d}{I_t}$	$\frac{I_f}{I_t}$	$\frac{I_f}{I_o}$	$\frac{I_t}{I_o}$
$\phi = L/200$	50	0,398	0,646	1,045	0,280	0,38	0,62	0,84	1,37
	40	0,593	0,588	1,181	0,416	0,50	0,50	0,77	1,54
	30	0,790	0,529	1,321	0,556	0,60	0,40	0,69	1,73
	20	0,986	0,470	1,458	0,693	0,68	0,32	0,61	1,91
	10	1,183	0,411	1,595	0,830	0,74	0,26	0,54	2,08
$\phi = L/100$	50	0,461	0,625	1,088	0,323	0,42	0,57	0,82	1,42
	40	0,689	0,558	1,248	0,483	0,55	0,45	0,73	1,63
	30	0,919	0,490	1,410	0,645	0,65	0,35	0,64	1,84
	20	1,148	0,421	1,570	0,805	0,73	0,27	0,55	2,05
	10	1,374	0,353	1,730	0,965	0,79	0,20	0,46	2,26
$\phi = L/50$	50	0,517	0,611	1,130	0,365	0,46	0,54	0,80	1,48
	40	0,772	0,535	1,310	0,545	0,59	0,41	0,70	1,71
	30	1,030	0,458	1,490	0,725	0,69	0,31	0,60	1,95
	20	1,285	0,381	1,668	0,903	0,77	0,23	0,50	2,18
	10	1,541	0,304	1,850	1,085	0,83	0,16	0,40	2,42
$\phi = L/30$	50	0,574	0,595	1,174	0,409	0,49	0,51	0,78	1,53
	40	0,858	0,511	1,374	0,609	0,62	0,37	0,67	1,80
	30	1,142	0,425	1,574	0,809	0,73	0,27	0,56	2,06
	20	1,427	0,340	1,774	1,009	0,80	0,19	0,44	2,32
	10	1,708	0,255	1,973	1,208	0,87	0,13	0,33	2,58
$\phi = L/20$	50	0,624	0,584	1,219	0,454	0,51	0,48	0,76	1,59
	40	0,936	0,493	1,438	0,673	0,65	0,34	0,64	1,88
	30	1,238	0,401	1,656	0,891	0,75	0,24	0,52	2,16
	20	1,554	0,309	1,874	1,109	0,83	0,17	0,40	2,45
	10	1,860	0,217	2,092	1,327	0,89	0,10	0,28	2,73

REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS

Como magnitud geométrica de referencia se utiliza "L", anchura del macizo impermeable en la dirección del flujo, y respecto de ella se definen las siguientes variables lineales que intervienen en el problema:

D_d = Distancia entre drenes medida en sus ejes, igual a la anchura de la unidad experimental.

D_p = Distancia del plano de ejes de drenes al proyectante vertical de la línea de aguas abajo del macizo impermeable.

ϕ = Diámetro del dren cilíndrico.

La "eficacia" o "capacidad drenante" de la red así como las restantes magnitudes hidráulicas que intervengan en el problema que posteriormente se irán definiendo, se representan también en términos relativos respecto a otra magnitud lineal hidráulica "H", diferencia de potencial hidráulico o cota piezométrica entre aguas arriba y aguas abajo del macizo impermeable. En estas condiciones se han realizado una serie de ensayos sistemáticos mediante analogía reoeléctrica bidimensional en papel conductor.

En el cuadro n.º 1, que se acompaña, pueden observarse los resultados experimentales medidos directamente en el modelo correspondiente a una unidad experimental, así como la elaboración de estos datos para obtener las magnitudes adimensionales eléctricas análogas de las hidráulicas que se pretenden estudiar. Este cuadro, y su representación como se verá a continuación, puede servir de ayuda para el desarrollo que posteriormente se hace en el tratamiento de los mismos para la obtención de resultados concretos.

3. RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACION

Los resultados de la experimentación se han sometido a diversos tratamientos con objeto de obtener representaciones lo más cómodas y útiles posibles. Este análisis permitió confeccionar los gráficos del artículo citado (1), en los cuales puede apreciarse que, como consecuencia de la elección de ejes, los resultados de la experimentación son rectas que parten del origen (0,1).

En el gráfico de la fig. 5, se representan los correspondientes a una unidad experimental, cuyos valores se reproducen en el cuadro n.º 1; este gráfico se introduce con objeto de facilitar la comprensión de los restantes. En él puede observarse la exactitud con que los datos experimentales se ajustan al modelo geométrico propuesto para su representación, la recta, lo que ha constituido una constante en los restantes casos presentados.

En ordenadas, tomando como origen el valor unidad, (≥ 1), se representan los valores adimensionales de Q_t/Q_0 , es decir, la relación de aumento del caudal total correspondiente a la introducción de la red o sistema drenante. En ordenadas también, y tomando como origen la unidad pero para valores menores que la unidad, (≤ 1), los valores adimensionales Q_t/Q_0 , es decir, la relación de disminución de caudal por el terreno permeable aguas abajo de la red de drenaje. En abscisas (parte central) se expresa la "eficacia" de los drenes en términos adimensionales según la relación:

$$e = \frac{h_0 - h_d}{h} \quad (\text{E. 76})$$

siendo:

$h_0 = \frac{D_p}{L} h$, indicador de la posición del plano de ejes de drenes; corresponde al potencial que tendría el punto donde se coloca el dren si no existiera éste.

$h_d = c h$ ($0 \leq c \leq D_p/L$; $h_d \leq h_0$), diferencia de cota piezométrica entre la de aguas abajo de la rebanada y aquella a que se coloca el dren. Está comprendida normalmente entre 0 y el potencial hidráulico natural del punto en que se sitúa el dren con objeto de que el caudal que atraviesa el dren sea siempre de extracción y no de recarga, como sucedería de colocarse a un potencial más alto.

El concepto intuitivo de "eficacia drenante" que se ha introducido consiste simplemente en la disminución de nivel que se impone en el dren con respecto al nivel natural, expresado en términos relativos respecto a la diferencia de cota piezométrica que existe entre las caras de aguas arriba y aguas abajo de la rebanada.

Los gráficos, incluidos en (1), con los números 1 a 10, permiten estudiar de una forma adimensional el efecto de la red drenante sobre el flujo de agua subterránea bajo el macizo impermeable y permite

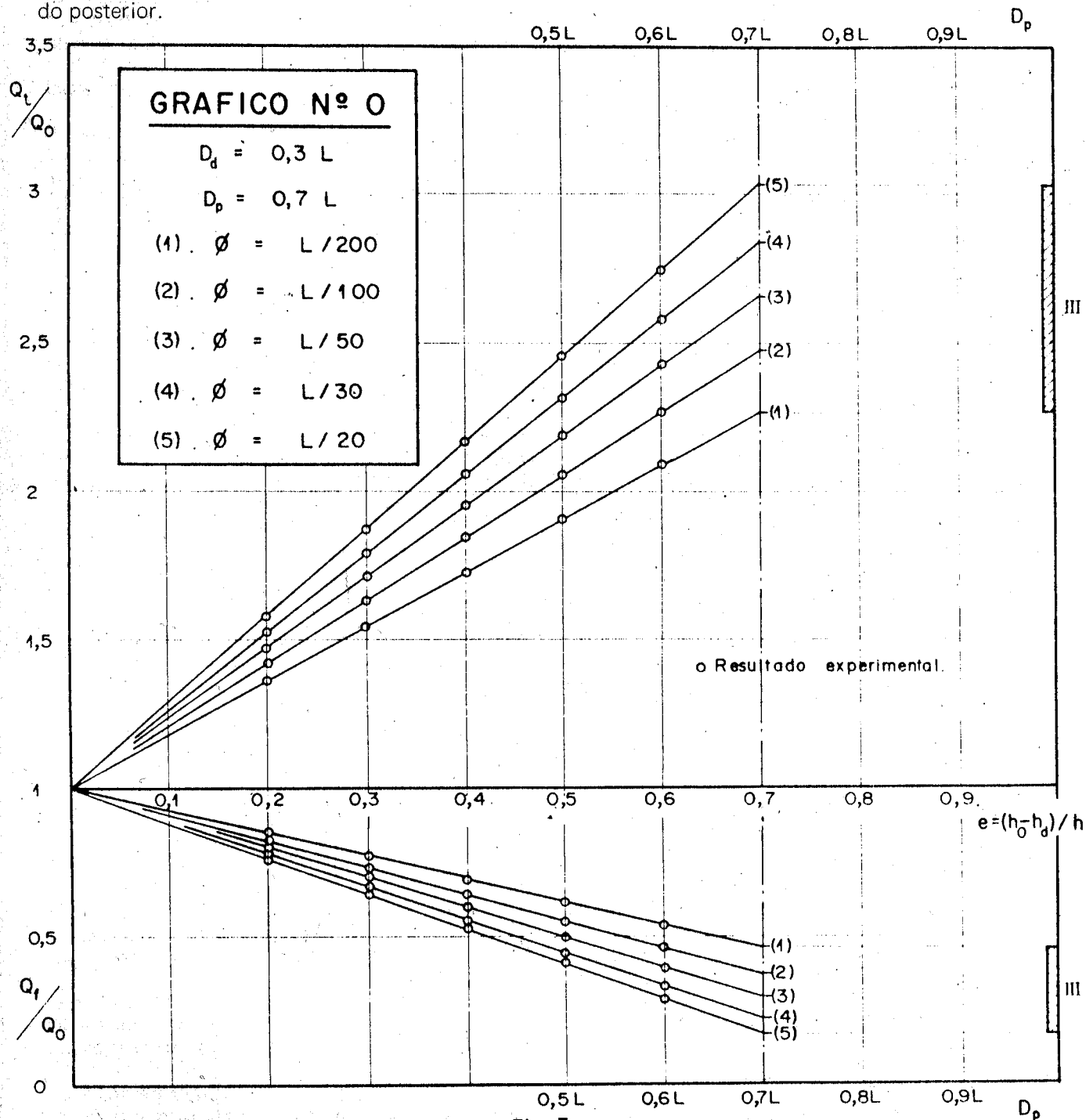
REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS

proyectar dicha red en función de las variables D_d , D_p , ϕ , y h_d , teniendo en cuenta tanto las limitaciones constructivas (hidráulicas, tensiones, subpresiones, etc.) como las económicas derivadas del caudal de agua que se pierde o infrutiliza como se indicó en la introducción.

Una vez definida la red de drenaje, los citados graficos permiten deducir los caudales: total, infiltrado aguas abajo de la red y extraído por los drenes, teniendo en cuenta que siempre se verifica:

$$Q_t = Q_f + Q_d$$

para los caudales que atraviesan cada rebanada. No obstante, el cálculo de los caudales correspondientes al espesor completo saturado del terreno permeable se deducen con mayor precisión en un apartado posterior.



REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS

Entre las conclusiones más interesantes a destacar del estudio de estos resultados gráficos podemos comentar el hecho de que, dada la elección de variables efectuada, los distintos datos experimentales se ajustan prácticamente a una recta como se puede comprobar en el gráfico de la fig. 5. Esta recta además pasa por el origen elegido (0,1) como se puede justificar teóricamente que debía suceder, ya que para eficacia drenante nula el dren se coloca al potencial que naturalmente le correspondería por lo que el caudal total infiltrado debe ser el que se infiltraría en ausencia de red de drenaje, es decir, Q_0 por lo que $Q_t/Q_0 = 1$. Lo mismo sucede para el caudal infiltrado aguas abajo de la red. Este resultado adicional confirma la bondad de los datos obtenidos así como la linealidad del sistema.

Teniendo en cuenta el hecho anterior todas las rectas que representan las distintas hipótesis estudiadas pasan por el origen, por lo que para tenerlas perfectamente definidas basta conocer un sólo parámetro que es su pendiente. Esto permite efectuar un tratamiento analítico sencillo con el fin de encontrar una fórmula que resuelva el problema con carácter general permitiendo la interpolación y extrapolación para valores de los parámetros utilizados que no se hayan experimentado directamente. Dicho estudio, así como sus conclusiones, son objeto de otro apartado.

Respecto a los caudales totales de infiltración conviene señalar que la relación Q_t/Q_0 crece linealmente con la eficacia drenante de la red, para unos valores dados de los restantes parámetros D_d , D_p y ϕ respecto de L , y que el incremento de caudales de infiltración como consecuencia de la introducción de la red puede ser excesivamente grande y, en consecuencia, pueden modificarse apreciablemente las características del terreno permeable y del sistema drenante, además de la consiguiente pérdida de agua. Los resultados de la experimentación correspondientes a esta magnitud quedan reflejados en los gráficos número 1 a 5 (1).

Análogamente la relación Q_t/Q_0 de caudales infiltrados aguas abajo de la red de drenaje decrece linealmente con la eficacia del sistema y como puede apreciarse una red plana de adecuado diseño puede reducir apreciablemente dicho caudal cuando interese expresamente esta finalidad. Ver gráficos 6-10 de (1).

Asimismo, puede apreciarse la influencia del diámetro del dren en los caudales, circunstancia que habitualmente no es tenida en cuenta en el proyecto de redes de filtración, en los que de manera casi exclusiva sólo se presta atención a la pérdida de carga en el dren como conductor de los caudales a evacuar, sin atribuirle ningún papel en el resultado de la infiltración.

4. ANALISIS MATEMATICO DE LOS RESULTADOS

De los resultados gráficos puede establecerse que el cociente adimensional Q_t/Q_0 admite una expresión de la forma:

$$\frac{Q_t}{Q_0} = 1 + m_t (D_d/L, D_p/L, \phi/L) \cdot e \quad (E. 77)$$

donde " m_t " es la pendiente de las rectas, que depende de las tres variables adimensionales que definen geoméricamente la red de drenaje, y

$$e = \frac{h_0 - h_d}{h}$$

es la eficacia drenante de la red, que define las características hidráulicas de la misma también en términos adimensionales.

Según esta expresión, todos los resultados, así como posibles interpolaciones, quedarían completamente definidos mediante la obtención de la pendiente de las rectas en función de las tres variables adimensionales de que depende. Estos valores de las pendientes para los casos estudiados se han obtenido de los resultados experimentales en los 125 ensayos realizados, se resumen en el cuadro n.º 2.

Tras diversas representaciones en función de cada una de las variables, se pudo apreciar que eran asimilables a funciones de la forma $y = a x^b$, tomando como variable en cada caso las ya definidas excepto para D_p/L en que se tomó su complemento respecto de la unidad, ya que como es lógico, tenía una asíntota para $D_p = L$. Con estos datos previos, se intentó establecer una fórmula del tipo:

$$m_t \times \left(\frac{D_d}{L} \right)^x \left(1 - \frac{D_p}{L} \right)^y \left(\frac{L}{\phi} \right)^z \quad (E. 78)$$

REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS

Cuadro N.º 2

		$D_d = 0,5L$			$D_d = 0,4L$			$D_d = 0,3L$			$D_d = 0,2L$			$D_d = 0,1L$		
D_p	ϕ	m_t	m_p	$m_t - m_p$	m_t	m_p	$m_t - m_p$	m_t	m_p	$m_t - m_p$	m_t	m_p	$m_t - m_p$	m_t	m_p	$m_t - m_p$
0,5L	L/200	0,80	-0,82	1,62	0,97	-0,97	1,94	1,31	-1,30	2,61	1,36	-1,36	2,72	1,76	-1,76	3,50
	L/100	0,96	-0,98	1,94	1,10	-1,12	2,22	1,36	-1,35	2,71	1,56	-1,55	3,11	1,84	-1,84	3,68
	L/50	1,13	-1,15	2,28	1,26	-1,28	2,54	1,51	-1,48	2,99	1,70	-1,71	3,41	1,93	-1,90	3,83
	L/30	1,25	-1,28	2,53	1,39	-1,41	2,80	1,64	-1,61	3,25	1,83	-1,82	3,65	1,97	-1,95	3,92
	L/20	1,37	-1,41	2,78	1,52	-1,54	3,06	1,75	-1,73	3,48	1,91	-1,92	4,00	2,00	-2,05	4,05
0,6L	L/200	1,05	-0,71	1,76	1,23	-0,80	2,03	1,49	-0,98	2,47	1,71	-1,15	2,86	2,15	-1,32	3,47
	L/100	1,21	-0,82	2,03	1,45	-0,95	2,40	1,70	-1,12	2,82	1,90	-1,28	3,18	2,35	-1,53	3,88
	L/50	1,40	-0,94	2,34	1,63	-1,08	2,71	1,89	-1,23	3,12	2,09	-1,40	3,49	2,56	-1,60	4,16
	L/30	1,58	-1,06	2,64	1,80	-1,18	2,98	2,05	-1,35	3,40	2,25	-1,51	3,76	2,75	-1,66	4,41
	L/20	1,73	-1,16	2,89	1,96	-1,28	3,24	2,21	-1,45	3,66	2,40	-1,60	4,00	2,95	-1,70	4,65
0,7L	L/200	1,25	-0,55	1,80	1,51	-0,65	2,16	1,80	-0,77	2,57	2,21	-0,85	3,16	2,55	-1,00	3,55
	L/100	1,49	-0,65	2,14	1,72	-0,75	2,47	2,19	-0,89	2,93	2,50	-1,01	3,51	2,82	-1,03	3,85
	L/50	1,75	-0,76	2,51	1,95	-0,85	2,81	2,55	-1,00	3,55	2,76	-1,15	3,91	3,00	-1,06	4,06
	L/30	1,97	-0,86	2,83	2,21	-0,95	3,16	2,61	-1,11	3,72	2,81	-1,25	4,06	3,33	-1,43	4,76
	L/20	2,17	-0,95	3,12	2,45	-1,05	3,50	2,85	-1,20	4,05	3,21	-1,35	4,56	3,75	-1,55	5,30
0,8L	L/200	1,50	-0,40	1,90	1,81	-0,47	2,28	2,42	-0,60	3,02	2,90	-0,71	3,61	3,35	-1,00	4,35
	L/100	1,80	-0,47	2,27	2,24	-0,58	2,82	2,81	-0,70	3,51	3,53	-0,87	4,40	4,21	-1,05	5,26
	L/50	2,25	-0,56	2,81	2,75	-0,66	3,41	3,21	-0,80	4,01	3,90	-0,97	4,84	4,65	-1,13	5,78
	L/30	2,54	-0,65	3,19	3,14	-0,78	3,92	3,63	-0,91	4,54	4,33	-1,07	5,46	4,85	-1,23	6,08
	L/20	2,87	-0,73	3,60	3,51	-0,85	4,40	4,04	-1,00	5,04	4,83	-1,15	5,98	5,33	-1,27	6,60
0,9L	L/200	2,23	-0,25	2,48	2,58	-0,29	2,87	3,55	-0,40	3,95	4,21	-0,48	4,69	6,51	-0,57	7,08
	L/100	2,68	-0,30	2,98	3,02	-0,35	3,37	4,08	-0,47	4,55	5,77	-0,60	6,37	7,55	-0,87	8,42
	L/50	3,33	-0,35	3,68	3,80	-0,44	4,24	5,04	-0,55	5,59	6,76	-0,78	7,54	9,57	-0,85	10,42
	L/30	4,00	-0,45	4,45	4,55	-0,53	5,08	6,10	-0,67	6,77	7,96	-0,76	8,72	10,81	-1,06	11,87
	L/20	4,75	-0,53	5,28	5,82	-0,62	6,44	7,11	-0,71	7,82	9,21	-0,96	10,27	11,42	-1,12	12,54

La elección del inverso del diámetro en lugar de éste, se ha hecho con objeto de manejar números enteros, más cómodos que sus inversos; en la práctica, la única diferencia sería cambiar de signo su exponente.

Para ajustar los valores de x, y, z, se utilizó el método de los mínimos cuadrados, aplicado al logaritmo neperiano de dicha expresión. Tomando logaritmos en (E. 78) se obtiene:

$$\ln m_t = x \left[\ln \left(\frac{D_d}{L} \right) \right] + y \ln \left(1 - \frac{D_p}{L} \right) + z \left[\ln \left(\frac{L}{\phi} \right) \right] \quad (E. 79)$$

Simbolizando con un subíndice "i" el valor de cada variable y de la función "mt" correspondiente a un dato experimental, la diferencia entre el valor experimental de la pendiente y el dado por la fórmula de la ecuación (E.79) correspondiente a sus logaritmos neperianos, sería

$$d_i = \ln m_{t_i} - \left[x \ln \left(\frac{D_d}{L} \right)_i + y \ln \left(1 - \frac{D_p}{L} \right)_i + z \ln \left(\frac{L}{\phi} \right)_i \right] \quad (E.80)$$

y la suma de sus cuadrados "S" vendría dada por

$$S = \sum (\ln m_i - \ln m_i^2) = \sum \left[\ln m_i - \left[x \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) + y \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) + z \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \right] \right]^2 \quad (E.81)$$

Imponiendo la condición de que la suma de cuadrados expresada sea mínima, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales en las variables x , y , z cuyos coeficientes pueden obtenerse en función de las variables utilizadas así como de las pendientes deducidas de la experimentación. Para ello basta derivar la expresión obtenida respecto a cada una de las variables x , y , z e igualar los resultados a cero, obteniéndose:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \sum \left[\ln m_i - \left[x \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) + y \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) + z \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \right] \right] \left[- \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2 \sum \left[\ln m_i - \left[x \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) + y \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) + z \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \right] \right] \left[- \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) \right] = 0 \quad (E.83)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = 2 \sum \left[\ln m_i - \left[x \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) + y \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) + z \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \right] \right] \left[- \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \right] = 0 \quad (E.84)$$

y desarrollando:

$$\left[\sum \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) \right] x + \left[\sum \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) \right] y + \left[\sum \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \right] z = \sum \ln m_i \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) \quad (E.85)$$

$$\left[\sum \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) \right] x + \left[\sum \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) \right] z = \left[\sum \ln m_i \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) \right] y + \left[\sum \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \right] z \quad (E.86)$$

$$\left[\sum \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \ln \left(\frac{L}{D_d} \right) \right] x + \left[\sum \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \ln \left(1 - \frac{L}{D_p} \right) \right] y + \left[\sum \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \right] z = \sum \ln m_i \ln \left(\frac{\phi}{L} \right) \quad (E.87)$$

sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, que puede expresarse en forma matricial:

$$\|a_{ij}\| \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \|a_{ij}\|^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (E.88)$$

Para obtener los coeficientes, la inversión de la matriz de coeficientes, los valores de x , y , z , los valores calculados con la fórmula propuesta y los errores cometidos para cada caso experimental, se confeccionó un programa en Fortran IV (ver fig. 6):

REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS

FORTRAN IV G LEVEL 21

MAIN

DATE = 75073

18/12/09

```

C      DEFINICION DE VARIABLES
C      DD = DISTANCIA ENTRE DRENES      X = EXPONENTE      CE      CC      MMCC0010
C      DP = DISTANCIA AL PAVIMENTO 100% Y = EXPONENTE      CE      CP      MMCC0020
C      DIA = INVERSO DEL DIAMETRO      Z = EXPONENTE      CE      CIA      MMCC0030
C      P = PENDIENTE      MMCC0040
0001      DIMENSION DD(5,5,5),DP(5,5,5),DIA(5,5,5),P(5,5,5),A(3,3),R(3), MMCC0050
0002      IAINV(3,3) MMCC0060
0003      INTEGER OUT MMCC0070
0004      IN=5 MMCC0080
0005      OUT=6 MMCC0090
C      LECTURA DE DATOS
0006      READ(IN,300)((DD(I,J,K),DP(I,J,K),DIA(I,J,K),P(I,J,K), MMCC0100
0007      1K=1,5),J=1,5),I=1,5) MMCC0110
0008      FCPMAT(16F5,3) MMCC0120
0009      A(1,1) = 0. MMCC0130
0010      A(1,2) = 0. MMCC0140
0011      A(1,3) = 0. MMCC0150
0012      A(2,2) = 0. MMCC0160
0013      A(2,3) = 0. MMCC0170
0014      A(3,3) = 0. MMCC0180
0015      R(1) = 0. MMCC0190
0016      R(2) = 0. MMCC0200
0017      R(3) = 0. MMCC0210
0018      DD 10 K=1,5 MMCC0220
0019      DP 10 J=1,5 MMCC0230
0020      DIA 10 I=1,5 MMCC0240
0021      A(1,1) = A(1,1) + ALOG(DP(I,J,K)) * ALOG(DD(I,J,K)) MMCC0250
0022      A(1,2) = A(1,2) + ALOG(DP(I,J,K)) * ALOG(DP(I,J,K)) MMCC0260
0023      A(1,3) = A(1,3) + ALOG(DIA(I,J,K)) * ALOG(DD(I,J,K)) MMCC0270
0024      A(2,2) = A(2,2) + ALOG(DP(I,J,K)) * ALOG(DP(I,J,K)) MMCC0280
0025      A(2,3) = A(2,3) + ALOG(DIA(I,J,K)) * ALOG(DP(I,J,K)) MMCC0290
0026      A(3,3) = A(3,3) + ALOG(DIA(I,J,K)) * ALOG(DIA(I,J,K)) MMCC0300
0027      R(1) = R(1) + ALOG(P(I,J,K)) * ALOG(DD(I,J,K)) MMCC0310
0028      R(2) = R(2) + ALOG(P(I,J,K)) * ALOG(DP(I,J,K)) MMCC0320
0029      R(3) = R(3) + ALOG(P(I,J,K)) * ALOG(DIA(I,J,K)) MMCC0330
0030      10 CONTINUE MMCC0340
0031      D = A(1,1)*A(2,2)*A(3,3) + 2.*A(1,2)*A(1,3)*A(2,3) MMCC0350
0032      1 -A(1,3)*A(1,3)*A(2,2) - A(1,1)*A(2,3)*A(2,3) MMCC0360
0033      2 - A(3,3)*A(1,2)*A(1,2) MMCC0370
0034      AINV(1,1) = (A(2,2)*A(3,3) - A(2,3)*A(2,3)) / D MMCC0380
0035      AINV(1,2) = (A(1,3)*A(2,2) - A(1,2)*A(2,3)) / D MMCC0390
0036      AINV(1,3) = (A(1,2)*A(2,3) - A(2,2)*A(1,3)) / D MMCC0400
0037      AINV(2,2) = (A(1,1)*A(3,3) - A(1,3)*A(1,3)) / D MMCC0410
0038      AINV(2,3) = (A(1,2)*A(1,3) - A(1,1)*A(1,3)) / D MMCC0420
0039      AINV(3,3) = (A(1,1)*A(2,2) - A(1,2)*A(1,2)) / D MMCC0430
0040      X = AINV(1,1)*R(1) + AINV(1,2)*R(2) + AINV(1,3)*R(3) MMCC0440
0041      Y = AINV(1,2)*R(1) + AINV(2,2)*R(2) + AINV(2,3)*R(3) MMCC0450
0042      Z = AINV(1,3)*R(1) + AINV(2,3)*R(2) + AINV(3,3)*R(3) MMCC0460
0043      WRITE(OUT,310)X,Y,Z MMCC0470
0044      310 FORMAT(///,15X,4H X =,F10.6,20X,4H Y =,F10.6,20X,4H Z =, MMCC0480
0045      1F10.6,///,16X,1H,4X,1HJ,4X,1HK,11X,2HDD,6X,2HDP,6X,3HDIA,9X, MMCC0490
0046      21HP,7X,5HPCALC,6X,3HDIF,5X,5HERROR, / ) MMCC0500
0047      DD 20 K=1,5 MMCC0510
0048      DP 20 J=1,5 MMCC0520
0049      DIA 20 I=1,5 MMCC0530
0050      PCALC = (DD(I,J,K)**X) * (DP(I,J,K)**Y) * (DIA(I,J,K)**Z) MMCC0540
0051      DIF = P(I,J,K) - PCALC MMCC0550
0052      ERROR = ( DIF * 100. ) / P(I,J,K) MMCC0560

```

FORTRAN IV G LEVEL 21

MAIN

DATE = 75073

18/19/09

```

0047      WRITE(OUT,320) I,J,K,DD(I,J,K),DP(I,J,K),DIA(I,J,K),P(I,J,K), MMCC0570
0048      1 PCALC, DIF, ERROR MMCC0580
0049      320 FORMAT(12X, 3I5, 4X, 7F10.3 ) MMCC0590
0050      20 CONTINUE MMCC0600
0051      STOP MMCC0610
0052      END MMCC0620

```

Fig. 6