



ANALISIS ALEATORIO MULTIVARIADO TERMINOLOGIA Y CONCEPTOS BASICOS(*)

Por P. S. BORES

Catedrático de Puertos.

E.T.S. de Ing. Caminos, Canales y Puertos, de Madrid.

Se presenta la terminología y los conceptos básicos del "Análisis aleatorio multivariado", aplicado a dos de las tres modalidades de fallo, rígido y deformable, de las obras marítimas, en sus alternativas extremal y límite (Bores, 1977). Se considera el riesgo de las variables exógenas y endógenas separadamente, introduciéndose las alternativas de análisis: directo, conservador, general, particular, global y local.

Introducción.

Desde un punto de vista del dimensionamiento, tanto estructural como funcional, la historia de la técnica puede considerarse dividida en tres etapas.

En la primera, el dimensionamiento se realiza considerando *todas las variables* como *deterministas*. La fase tecnológica, no artesanal, de esta primera etapa se inicia en el mar, a mediados del siglo XIX, al proponer Stevenson su conocida fórmula para la determinación de la altura de ola en función de la longitud del *fetch*, pero sólo en la primera mitad del siglo actual adquiere su completo sentido, al obtenerse fórmulas para el estudio de la estabilidad de los diques verticales —Gaillard (1904), Sainflou (1928), Minikin (1950)— y de los diques de escollera —Castro (1934), Iribarren (1938)— y ponerse a punto métodos para la determinación de la *altura de ola de cálculo* al pie de la obra,

incluidas refracción y difracción —Iribarren (1949), Johnson (1948).

Sin embargo, la mayor parte de los procesos y fenómenos naturales, y muchos de los debidos a la acción del hombre, pocas veces admiten, con alguna fiabilidad, modelos deterministas. La altura de ola, el caudal de un río, la velocidad del viento, la aceleración sísmica, las fuerzas de atraque, etc., son variables climáticas, geodinámicas, antrópicas, etc., cuyas magnitudes no tienen límites concretos, como presuponen los modelos deterministas, estando sólo asociadas a una probabilidad de excedencia, a un período de retorno.

Al iniciarse la segunda mitad del presente siglo se introducen los métodos estadísticos en el estudio del mar: geometría estadística —Longuet-Higgins (1952)—, análisis espectral —Pier-son (1952)—. Tan sólo un año después son publicados, en términos de la altura de ola significativa, los primeros trabajos sobre las distribuciones de estados del mar y de máximos de la curva de estados del mar, regímenes de oleaje y de excedencias, respectivamente —Saville (1953).

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta revista hasta el 28 de febrero de 1978.

La aplicación de estos estudios al dimensionamiento de las construcciones marítimas no se hace esperar, considerándose, en esta segunda etapa, *una variable*, principal, como *aleatoria*, y las restantes, cuando existen, como deterministas.

Haciendo recurso de la altura de ola como variable aleatoria, Blume y Keith (1959) introducen el concepto de período de retorno del temporal de cálculo, mientras que Van der Kreek y Paape (1964) optimizan, económicamente, el peso de los cantos del manto principal de los diques de escollera. Bores (1968) corrige la formulación de la probabilidad de avería propuesta por Van der Kreek y Paape (1964), e introduciendo un modelo de Borgman (1963), metodiza el análisis económico tanto para las construcciones, obras y estructuras rígidas como para las deformables, comprendiendo tanto las averías parciales del manto como el colapso completo del resto de la construcción.

Un *análisis económico univariado*, con otras variables aleatorias que la altura de ola, ha sido propuesto por Van Dantzig y Kriens (1960), Watt y Wilson (1974) y otros.

Pocas veces, sin embargo, los elementos, las cosas naturales o artificiales, consecuencias de la Técnica, están sometidas únicamente a la acción de una sola variable. En la casi totalidad de los casos existirán varias variables, algunas de las cuales pueden ser aleatorias, y cuyas acciones no deben ser consideradas por separado.

Con la introducción del *análisis aleatorio multivariado* —Bores (1977) (*)— se inicia la tercera etapa del dimensionamiento de las obras y estructuras marítimas, en la que *todas las variables aleatorias son consideradas como tales y conjuntamente*.

(*). Considerando niveles de probabilidad en lugar de distribuciones, como hacemos ahora con el *Análisis aleatorio multivariado*, hemos introducido ya algunos de los conceptos básicos de esta tercera etapa en una comunicación presentada a la Comisión Internacional del Oleaje —Congresos de Navegación—, en 1973, y en el Proyecto de la Toma y Descarga del Agua de Refrigeración de la Central Térmica de Foix, visado en 1975.

Diseño extremal. Diseño límite. Variable principal.

Todo lo fabricado o construido por el hombre debe ser proyectado para cumplir con la función, servicio, etc. a que se destina y resistir, además, las solicitaciones y/o sobrecargas resultantes de la acción conjunta de todos los agentes —geodinámicos, climáticos (atmosféricos e hidrosféricos), antrópicos— presentes.

La casi totalidad de los fenómenos y procesos naturales, incluida la marea astronómica, y muchos de los debidos al hombre son en la actualidad tratados con modelos aleatorios. En particular, el viento, el oleaje y otros pueden ser tratados como procesos estocásticos de dos componentes. Una de ellas lenta, representativa de la evolución del estado del proceso —estado del mar, estado del viento, etc.—. La otra, de evolución mucho más rápida, representativa de las fluctuaciones del proceso —olas, ráfagas, etcétera—. En ocasiones, la componente de fluctuación es despreciable frente a la de estado, e incluso puede no existir.

Entre cada una de las acciones de los diversos agentes —oleaje, viento, etc.— y sus correspondientes respuestas sobre flotadores, obras, estructuras, etc. —oscilaciones, sobrecargas, solicitaciones, etc.— existen funciones de transferencia, espectral en el caso de procesos estocásticos, que permiten determinar las segundas a partir de las primeras y conocer su evolución a lo largo del tiempo.

Cuando un cierto agente —oleaje, viento, etcétera— admite un modelo estocástico, tanto sus variables de estado —altura de ola significativa, período óptimo, velocidad del viento estándar, etc.— como las variables de estado de sus respuestas sobre flotadores, obras, estructuras, etc.— amplitud de oscilación significativa, amplitud de sollicitación tangencial significativa, etc.— quedan perfectamente determinadas por sus distribuciones de probabilidad en el año medio —régimen de alturas de ola, régimen de períodos del oleaje, régimen de oscilaciones, régimen de sollicitaciones tangenciales, etc.— y en condiciones límites por sus correspondientes distribuciones extremales o asintóticas —régimen extremal de alturas de ola, régimen extremal de sollicitaciones tangenciales, etc.

Salvo en casos excepcionales, como ocurre en el diseño de algunos elementos o partes de las centrales nucleares, en ciertas instalaciones y dispositivos militares, etc., en que es obligada la máxima seguridad; no es lógico que todas las variables, de las acciones o de sus respuestas, se consideren en condiciones extremas. Cuando alguna variable —altura de ola, aceleración sísmica, etc.— se presenta en condiciones extremas lo más probable es que todas las restantes variables tengan valores moderados, quedando perfectamente determinadas por sus correspondientes regímenes anuales. Denominamos variable principal a la variable, extremal, de acción o respuesta, determinante del proyecto.

Ciertas variables —altura de ola, período, etc., por ejemplo— dependen de un mismo agente —el oleaje, en este caso—, y aunque para un cierto estado del proceso pueda existir independencia entre ellas, al evolucionar todas ellas con la componente de estado, de alguna forma estarán relacionadas, ligadas, entre sí.

En general, podemos escribir:

$$\begin{aligned} v_i &= \sigma_{v_i}(E) y_{v_i} + \mu_{v_i}(E) \\ &\dots\dots\dots \\ v_j &= \sigma_{v_j}(E) y_{v_j} + \mu_{v_j}(E) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1)$$

o bien, si v_p es la variable principal:

$$\begin{aligned} v_i &= \sigma_{v_i}(v_p) y_{v_i} + \mu_{v_i}(v_p) \\ &\dots\dots\dots \\ v_j &= \sigma_{v_j}(v_p) y_{v_j} + \mu_{v_j}(v_p) \end{aligned} \quad (2)$$

ya que, en general, se verifica:

$$v_i = f_i(E) \quad \text{y} \quad E = f_i^{-1}(v_i) \quad (3)$$

y en particular:

$$v_p = f_j(E) \quad \text{y} \quad E = f_j^{-1}(v_p) \quad (4)$$

en donde E es representativa del estado del proceso, μ es el valor medio de la distribución, σ la desviación estándar e y_{v_i} la variable unitaria.

En el caso particular del oleaje, agente climático del que alguna de las variables, muy frecuentemente, suele ser principal en las apli-

caciones prácticas, las expresiones (2) toman la forma:

$$\begin{aligned} T &= \sigma_T(H) y_T + \mu_T(H) \\ S &= \sigma_S(H) y_S + \mu_S(H) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2a)$$

si la variable principal es la altura de ola, o:

$$\begin{aligned} H &= \sigma_H(T) y_H + \mu_H(T) \\ S &= \sigma_S(T) y_S + \mu_S(T) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2b)$$

si lo es el período, etc.

Si la experiencia local, o personal, permite decidir a priori cuál es la variable principal, correspondiente a un cierto proyecto, el número de tanteos puede quedar reducido a uno. En otro caso, habrán de realizarse tantos como se requiera, incluso considerando cada una de las variables como principal, si es necesario, hasta lograr encontrar las condiciones más desfavorables, de mayor riesgo, condiciones que son las que habrán de introducirse en el análisis funcional o económico correspondiente.

Modalidades de fallo. Variables características.

El fallo de la resistencia, estabilidad, resguardo, etc. de todo proyecto estructural, funcional, de servicio, etc. ocurre siempre según una de las tres alternativas o modalidades siguientes: por una sola acción de la variable principal —altura de ola, amplitud de oscilación, etc.—, por varias acciones separadas, sin interacción o por varias acciones consecutivas, interactuantes. Hemos denominado rígida o monolítica a la primera alternativa o modalidad de fallo, deformable a la segunda (Bores, 1968) y dinámica a la tercera.

Es evidente que la rotura de un pilote, el vuelco de un dique vertical, el rebase de un dique muelle, la colisión de un buque con el fondo, etc., puede ser producido por una sola ola, oscilación, etc. que supere las condiciones de resistencia, estabilidad, resguardo, etc. De hecho, esta fluctuación —ola, oscilación, etc.— puede presentarse con cualquier estado del proceso, pero la probabilidad de que esto ocurra con estados de baja energía es sumamen-

te pequeña. Solamente con estados de alta energía, con temporales, como se denominan cuando el agente es climático, es probable la presentación de una fluctuación de gran amplitud.

Cualquiera que sea la variable principal si el temporal que produce el fallo de resistencia, estabilidad, resguardo, etc., es estrictamente el de cálculo, es decir, que uno menor probablemente no será capaz de producirlo, es evidente que este fallo habrá de estar originado por aquella fluctuación en la que la variable principal sea la máxima, la más desfavorable, del temporal. La variable que caracteriza la modalidad de fallo rígido, variable característica de fallo rígido, puede ser escrita en la forma:

$$v_{\text{máx}, N} = f(v_E, N) \quad (5)$$

en donde v_E es la variable representativa del estado del proceso. Generalmente se adopta la significativa v_{opt} o la óptima v_{opt} , y N representa el número de fluctuaciones.

Cuando la variable principal es la altura de ola, caso muy frecuente en las aplicaciones prácticas, la altura de ola característica de fallo rígido puede ser escrita en la forma (Bores, 1968):

$$H_{\text{máx}, N} = H_{1/3} \{(\ln N)/2\}^{1/2} \quad (6)$$

Muy diferente es el comportamiento del manto principal de los diques de escollera y de las obras formadas por cajones o dados, aislados o superpuestos, cuando el fallo de éstos se produce por deslizamiento. En estos casos y otros análogos la acción de una sola fluctuación de la variable principal no es capaz de producir el fallo total, pero sí de ocasionar averías (pérdida de algunos cantos del manto principal, desplazamiento de unos bloques con respecto a otros, plastificación de nudos o piezas de las estructuras, con la consiguiente avería permanente de estos elementos, etc.).

Aunque el umbral de averías puede ser constante, como suele ocurrir en el caso de fallo por deslizamiento de cajones, generalmente evoluciona con éstas, decreciendo, como sucede muy frecuentemente en el caso de plastificación de nudos u otros elementos de las estructuras, o creciendo, como ocurre con el manto principal de los diques de escollera.

Si el proceso es estacionario, el número de *fluctuaciones activas* —olas activas, ráfagas activas, oscilaciones activas, etc.—, es decir, de fluctuaciones con magnitud superior a la correspondiente al umbral instantáneo de avería, irá aumentando cuando ésta decrece, haciéndose más y más precipitada la avería al aumentar el *índice de actividad*, o, por el contrario, como ocurre, por ejemplo, con el manto principal de los diques de escollera, puede disminuir.

Salvo contadas excepciones, debe considerarse como nivel del mar característico al resultante de la superposición de todas las ondas largas presentes —marea astronómica (MA), marea meteorológica (MM), *tsunamis* (TS), onda de resaca (OR), etc.—, admitiéndose, como primera estima, el principio de Boltzman, de superposición lineal. En consecuencia:

$$S = S_{MA} + S_{MM} + S_{TS} + S_{OR} + \dots \quad (7)$$

Además de estar relacionados por la expresión (7), algunos de estos agentes climáticos lo están con el oleaje. La onda de resaca directamente, la marea meteorológica indirectamente, pues ambos agentes, oleaje y marea meteorológica, dependen en común de otro agente, el viento.

Hemos denominado variables ligadas (Bores, 1977) a aquellas funcionalmente relacionadas con la variable característica, que interviene en forma directa en el análisis aleatorio multivariado. En la expresión (7) son variables ligadas S_{MA} , S_{MM} , etc.

Análisis directo y conservador, general y particular, global y local.

Como ya señalamos, la propiedad común y determinante para el análisis aleatorio multivariado de las variables características es su aleatoriedad, que se manifiesta en la dispersión de las observaciones, quedando determinadas tanto las exógenas —altura de ola, período, persistencia, etc.— como las endógenas —averías, etcétera— por sus valores medios y sus límites de confianza.

El *análisis aleatorio multivariado* con los valores medios no es, evidentemente, más que una alternativa, la más simplista, en la que se

pondera por igual cualquier tipo de información y modelo, admitiéndose, asimismo, un comportamiento uniforme de la totalidad, de todos los puntos, de la obra. Se trata, pues, de un *análisis directo general*, en cuanto que todos los casos reciben el mismo tratamiento, y *global*, ya que se considera la totalidad de la obra en su conjunto.

En ausencia de errores sistemáticos, la dispersión de las observaciones depende de la precisión del modelo, de la exactitud de las observaciones —registros, previsiones, etc.— y de la naturaleza del agente que origina la variable característica en cuestión, siendo muchas veces esta dispersión indicativa de la presencia de variables no específicamente consideradas, es decir, de la complejidad del modelo.

El *nivel de riesgo* adoptado debe ser función principalmente de esta complejidad del modelo, admitiéndose, lógicamente, un riesgo menor si se utiliza, en predimensioamiento, un análisis aleatorio univariado.

Aparte de compensar en lo posible los errores sistemáticos de las observaciones y de los modelos, salvo casos excepcionales, generalmente en relación con *diseños límite* es claro que no todas las variables características deben ser consideradas con el mismo *nivel de riesgo*. Sólo alguna de las variables exógenas, preferiblemente la principal, o en su caso aquellas que influyan más decisivamente en los resultados, deben ser consideradas al nivel o niveles de riesgo que se determine, mientras que pueden ser introducidos en el *análisis aleatorio multivariado* los valores medios de las restantes.

Modalidad muy especial adopta la aplicación de niveles de riesgo en las variables endógenas, particularmente las averías.

Por ejemplo, por variación del encaje de los cantos, del talud y del espesor del manto, de la cota de coronación del mismo, etc., la estabilidad de los diques de escollera, incluidos el manto, el espaldón, etc., no es uniforme en absoluto. De hecho, cada punto, cada celda, cada tramo elemental del dique tiene una estabilidad diferente, alcanzándose en algunos puntos la rotura total del manto —con el manto secundario al descubierto e intervención de otros factores, geotécnicos, etc. en la rotura del dique—,

mientras que en otros puntos o celdas la avería puede ser sólo acusada e incluso incipiente.

La *localización de la avería*, que se amplifica fuertemente en la naturaleza, en donde los métodos de ejecución y control no pueden ser tan perfectos como en los modelos, nos lleva a la posibilidad y conveniencia de un *análisis local*, de gran importancia práctica, ya que nos permite determinar la probabilidad, multivariada, de una cierta avería en un punto cualquiera del dique, en un tramo concreto del mismo, etcétera.

Esta modalidad de análisis es más conservadora y real, en cuanto nos permite considerar y matizar las condiciones *particulares y locales* de la obra.

Función crítica y probabilidad multivariada de fallo.

Las variables exógenas de las acciones, sobrecargas, solicitaciones, etc. de los agentes climáticos, geodinámicos, geotécnicos, antrópicos, etc. pueden ser relacionados en cada *análisis aleatorio multivariado* —al vuelco, al deslizamiento, al rebase, etc., de espaldones, de estabilidad del manto principal, etc.— con las variables, endógenas, estructurales, funcionales, etc. por medio de un modelo —matemático, físico, etc.— definido por la función:

$$K(v_1, \dots, v_j, \dots) = 0 \quad (8)$$

que caracteriza las condiciones críticas de fallo, total o parcial, y sirve de límite de integración de:

$$p = \int_K p(v_1, \dots, v_j, \dots) dg(v_1), \dots, dg(v_j), \dots \quad (9)$$

que representa la probabilidad multivariada (Bores, 1977) de fallo al nivel de riesgo que se considere.

Con la modalidad de fallo rígido sólo una alternativa, una sola hipersuperficie crítica de fallo, es posible. Con fallo deformable caben tantas alternativas como niveles de fallo, de avería, se consideren, desde cero al ciento por ciento.

Análisis previos —de política nacional, regional, local, empresarial, etc., de mercado, de operaciones, etc.— e incluso la propia realiza-

ción del *análisis aleatorio multivariado* deciden, generalmente, la adopción de valores concretos de algunas variables, particularmente endógenas.

Si la desviación estándar de estas variables, que denominaremos *parámetros del análisis aleatorio multivariado*, es muy pequeña, prácticamente despreciable, como sucede con algunas variables endógenas de algunos procesos de construcción, fabricación, etc. —cota de coronación de los espaldones y diques verticales, peso de los cantos del manto principal (artificiales), por ejemplo— podemos considerarlas como deterministas. En otro caso, deberán adoptarse unos valores de la variable con un nivel de riesgo compatible con el de diseño.

BIBLIOGRAFIA

- BLUME, J. A., y KEITH, J. M.: "Rincon Offshore Island and Open Causeway". *Proc. A.S.C.E.*, WW-3, 1959.
- BORES, P. S.: "Ola de cálculo". M. O. P., 1968.
- BORES, P. S.: "Multivariate Risk and Optimun Economic Analysis in Maritime Structures". Symp. on Rubble Mound Breakwaters. Isle of Wight, 1977.

- BORGMAN, L.: "Risk Criteria". *Proc. A.S.C.E.*, WW-3, 1963.
- CASTRO, E.: "Diques de escollera". *Revista de Obras Públicas*, 1934.
- GAILLARD, G. G.: "Wave Action in Relation to Engineering Structures". U. S. Army Corps of Eng., 1904.
- IRIBARREN, R.: "Una fórmula para el cálculo de los diques de escollera". *Revista de Obras Públicas*, 1939.
- LONGUET-HIGGINS, M. S.: *Journ. Mar. Res.*, II, 1952.
- MINIKIN, R. R.: "Winds, Waves an Maritime Structures". Ch. Griffin, London, 1950.
- PIERSON, W. J.: "A Unfied Mathematical Theo-y". Part I and II. Coll. of Eng., New York Univ., 1952.
- SAINFLOU, M.: "Traité sur les digues verticales". *Ann. des Ponts et Chaussées*, 1928.
- SAVILLE, Th.: *B.E.B. Tech. Mem.*, núms. 36, 37 y 33, 1953.
- VAN DANTZIG, D. y KRIENS, J.: "The Economic Decision Problem Concerning the Security of the Netherlands against Storm Surges". *Delta Comm. Rep.*, 3, II, 2, 1960.
- VAN DER KREEK, J., y PAAPE, A.: "An Optimum Breakwater Design". *Proc. 9th Coastal Eng. Conf.*, 1964.
- WATT, W. E., y WILSON, K.: "Economic Approach to Optimizing Design Parameters". *Proc. 14th Coastal Eng. Conf.*, 1974.

ABSTRACT

The terminology and basic concepts of the "Multivariate risk analysis" is presented with application to two of the three modalities of failure, rigid and deformable, of maritime works, in their extremal and limit alternatives. The risk of the exogenous and endogenous variables is considered separately by introducing several modalities of analysis: direct, conservative, general, particular, global, and local.