

ESTUDIO DE LOS CAUDALES DRENADOS E INFILTRADOS POR REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS BAJO MACIZOS IMPERMEABLES, MEDIANTE ANALOGIA REOELECTRICA EN MEDIOS CONTINUOS Y ANALISIS MATEMATICO DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES (*)

2. LA ANALOGIA REOELECTRICA UTILIZADA (Parte B)

Por JOAQUIN CRUCES DE ABIA
Prof. Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos.

JAIME PLANA CLAVER
Prof. Dr. Ing. de Telecomunicación.

Catedra de Fundamentos Fisicos de las Técnicas. E.T.S.
de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, de Madrid

Este artículo es continuación de otro publicado bajo el mismo título general en el número de marzo pasado. En aquella primera parte se estudiaban las bases teóricas que permiten establecer la analogía eléctrica en medios continuos entre el campo de la conducción eléctrica y el campo de la hidráulica subterránea. En esta segunda parte se describen las técnicas e instrumental utilizados, analogía reoelectrónica en conductor sólido y en conductor líquido.

2.2. Analogía reoelectrónica en conductor sólido.

2.2.1. Antecedentes.

Las técnicas de simulación en medios continuos se iniciaron hace más de un siglo. En el año 1845, Kirchhoff utilizó láminas conductoras de cobre de poco espesor (15). No obstante, las dificultades que planteaba la gran conductividad del cobre para la imposición de condiciones de contorno, hizo que el procedimiento se aplicase esporádicamente. La idea quedaba patente, y desde entonces se han ensayado multitud de medios conductores con mayor o menor éxito (2).

La obtención de un material útil para la aplicación de la analogía depende de que sus características se ajusten con un grado aceptable de precisión, a las que serían deseables en el conductor ideal. Evidentemente no existe un conductor ideal; por ello, en cada caso habrá que contrastar las propiedades del material con las que debería tener dicho conductor ideal. La precisión obtenida dependerá esencialmente de dos grupos de factores: que las propiedades físicas del medio se ajusten tanto como sea posible a las propiedades supuestas en la analogía, y que dichas propiedades no varíen con el tiempo ni con las condiciones exteriores. Aparte de estas consideraciones, de tipo más bien teórico, es necesario que el material utilizado presente la suficiente manejabilidad como para que su empleo en los modelos sea simple y cómodo (4).

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta revista hasta el 31 de agosto de 1977.

Entre las condiciones que deben exigirse a un conductor para su utilización en analogía reoeléctrica pueden destacarse las siguientes:

- a) Homogeneidad.
- b) Uniformidad.
- c) Isotropía.

Estas tres condiciones son las más difíciles de conseguir en los materiales analógicos, por lo que deben estudiarse especialmente cada una de ellas.

También son deseables otras propiedades y características, cuya relación puede encontrarse en libros especializados. Entre ellas señalaremos: una resistividad adecuada al modelo que se trata de ensayar, no ser sensible a la presión por sondas de metal, a la temperatura, humedad, etc. Dado que siempre existe una disipación de calor por efecto Joule, deberá tener un coeficiente de temperatura pequeño; el material debe poderse cortar o moldear con facilidad, etc. En última instancia, la selección de un determinado material para el modelo deberá tener en cuenta todos estos aspectos de su comportamiento, así como consideraciones de tipo económico (2).

El descubrimiento, en 1948, del papel Teledeltos (6), por la Western Union Telegraph Company, suministró un medio que, inicialmente previsto para otros fines (grabación electrosensibles, telegramas, registradores gráficos, etc.), ha dado un gran impulso a los métodos de simulación en medios continuos bidimensionales, al proporcionar un elemento barato de buenas características para la analogía (7). La difusión en este campo ha hecho que actualmente sea el medio más comúnmente empleado en esta analogía, por lo que restringiremos el estudio de las láminas conductoras al del papel Teledeltos (1). Este es el medio que hemos utilizado en la experimentación.

En tres dimensiones se utilizan también una gran cantidad de medios (4), cuya descripción puede encontrarse en libros y artículos especializados (8) y (9), dado que no son utilizados en el presente trabajo no parece oportuno extenderse en más consideraciones sobre los mismos.

2.2.2. Descripción.

El papel conductor está constituido por tres capas diferenciadas (2): una capa conductora formada por una dispersión de grafito o carbón en pulpa de papel, que es la que se utiliza en la analogía; está recubierta por un lado con una capa delgada de papel de color gris claro que deja pasar la corriente eléctrica y es la utilizada para registros, y por el otro, con una capa de aluminio muy delgada. En conjunto, el espesor del papel es, aproximadamente, de una décima de milímetro.

Existen básicamente dos tipos de papel: *L* y *H*. El tipo *L* (*low resistivity*), tiene una resistividad por cuadrado que oscila entre los 1.500 y 4.000 Ω /cuadrado. El de tipo *H* (*high resistivity*), entre 8.000 y 20.000 Ω /cuadrado. En cada caso, el tipo a utilizar se determina por los valores relativos de resistencia respecto a electrodos y resistencias de contactos auxiliares que deban utilizarse, así como de las impedancias de entrada de los aparatos de medida de que se disponga, aunque habitualmente no es determinante. En España, el tipo de más fácil adquisición es el *L*, que hemos utilizado en estos ensayos, con una resistividad de alrededor de 2.000 Ω /cuadrado.

Por lo que respecta a las características indicadas en el apartado anterior puede señalarse:

a) *Homogeneidad*. — Las variaciones de resistividad local no suelen superar el 10 por 100 en lo que se refiere a homogeneidad. No obstante, al repartirse dichas heterogeneidades estadísticamente, el error obtenido, desde un punto de vista macroscópico, puede situarse entre un 3 y un 5 por 100, e incluso menor en ciertos casos, como se verá al tratar de la precisión de los métodos utilizados.

b) *Uniformidad*. — La resistividad del papel no es un valor fijo, ya que esta propiedad no influye en la finalidad original para la que se fabrica. Esto hace que pueda variar considerablemente de un rollo a otro, por lo que en cada caso es preciso medir directamente la resistividad con testigos extraídos de la misma zona de la que se ha cortado el modelo. En un rollo las variaciones no son grandes; resultan del mismo orden que la precisión media del papel, y dado que los modelos tienen necesariamente dimensiones reducidas, la resistividad, dentro de los mismos, puede considerarse como uniforme. También hemos podido comprobar que la resistividad varía a lo ancho del rollo, siendo mayor en las zonas centrales que en los bordes, aunque las diferencias tampoco son excesivas.

c) *Isotropía*. — El proceso de fabricación introduce una clase de anisotropía en el sentido del enrollamiento del papel, de forma que la resistividad es más baja en la dirección longitudinal que en la dirección transversal al mismo. Dicha anisotropía es del orden de un 10 por 100, de forma que $\rho_l \approx 1,1 \rho_t$.

Entre otras propiedades del papel Teledeltos pueden señalarse: un coeficiente de temperatura de $-2 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ y un coeficiente de humedad que oscila entre $0,5 \cdot 10^{-2}$ y $2 \cdot 10^{-2}$ por 100 de humedad relativa en función de esta última. Para que el calentamiento por efecto Joule no influya apreciablemente ($< 0,5$ por 100), la potencia disipada deberá mantenerse inferior a 6 mW/cm^2 . Este material es especialmente sensible a la presión de objetos metálicos, como pueden ser las sondas de medida, por lo que deberá evitarse el apretar demasiado, con objeto de no modificar las características del papel conductor (3).

2.2.3. Instrumental.

Las tres unidades básicas existentes en la simulación podemos designarlas como: trazadora analógica, instrumental de medida y modelo analógico.

En este apartado haremos referencia exclusivamente a los instrumentos utilizados en los modelos que se detallan posteriormente. Para mayor información, puede recurrirse a las referencias dadas en la bibliografía.

El elemento básico de la simulación, como es lógico, en cuanto a instrumental, es la trazadora analógica. En esencia consta de una fuente de tensión y un puente de medida de potenciales; a ellos pueden añadirse perfeccionamientos en cuanto a estabilidad y precisión, y accesorios que faciliten la imposición de condiciones de contorno en el modelo analógico. La trazadora utilizada por nosotros, en todos los modelos de papel conductor realizados, ha sido una trazadora de la Sensitised Coatings Ltd. modelo Alpha-PR. Esta trazadora dispone de varios accesorios interesantes, pudiéndose considerar como una de las trazadoras más completas para analogías con papel conductor (7).

Además de una fuente estabilizada de tensión de unos 7 voltios y del puente

de medida con detector de cero, dispone de 10 potenciómetros de ajuste para imposición de potenciales intermedios escalonados entre el 0 y el 100 por 100, con un rango de variación para cada uno de ellos de 20 por 100. Estos potenciómetros presentan la característica interesante de que (igualmente que la fuente de tensión) son prácticamente insensibles a las variaciones de carga a que se someten, evitando el tener que reajustar todos los potenciales impuestos cada vez que se modifica uno de ellos, lo cual simplifica notablemente la toma de datos en casos como el nuestro, en que interesa determinar la respuesta del modelo frente a variaciones de potencial en algunos de sus puntos.

Otro accesorio interesante de que dispone el equipo en cuestión es un dispositivo de trazado automático de líneas equipotenciales. Dicho circuito hace saltar una chispa que quema la capa superior de celulosa del papel cuando la diferencia de potencial entre el punto en que se sitúa la sonda en el papel y el potencial de referencia a que se sitúa la sonda es de 2 milivoltios. De esta forma, desplazando la sonda desde la zona de mínimo potencial (0 por 100) en el modelo hacia la de máximo (100 por 100), en el momento en que pasa por la equipotencial que se quiere dibujar queda señalado el punto con una ligera quemadura. Este sistema permite trazar las equipotenciales rápidamente, haciendo mucho más cómoda la obtención de redes de corriente que con los procedimientos tradicionales de equilibrar el puente para cada punto de medida.

Asimismo, dispone también de un sistema para imponer condiciones de contorno de tipo Neumann, cuando no existen dos puntos con diferencia de potencial fija en el modelo o cuando existiendo no tengan por qué ser los de máximo y mínimo potencial, que permite localizar los puntos de máximo y mínimo potencial y sitúa el puente de medida con los extremos en dichos puntos de forma que puede localizarse el potencial de cualquier otro punto y trazar las líneas equipotenciales como en el caso anterior. En nuestros modelos no es preciso utilizar este sistema, ya que las condiciones que imponemos son siempre de tipo Dirichlet (4).

En cuanto a la segunda unidad, consistente en el instrumental de medida, está constituida básicamente por un multímetro digital capaz de medir resistencias y diferencias de potencial e intensidades en alterna y continua. Dado que uno de los objetivos fundamentales de nuestro estudio es el cálculo de caudales, o su magnitud analógica eléctrica que es la intensidad, se requiere intercalar el amperímetro en serie en las ramas del circuito que se quieren medir. Con objeto de racionalizar la toma de datos, se diseñó y construyó una *caja amperimétrica* que permite intercalar el instrumento de medida en serie, mediante una clavija y un *jack* de tipo telefónico, que mantiene el circuito cerrado cuando no se introduce la clavija. Además de este dispositivo, cada una de las líneas de la caja dispone de un potenciómetro en serie y dos bornas que permiten la introducción, también en serie, de una resistencia (o cualquier otro elemento eléctrico) en el circuito montada en una clavija de enchufe normal. Esta sección se añadió con objeto de permitir la fijación de condiciones de contorno a una serie de puntos (10 en total), bien de potencial, bien de intensidad, al propio tiempo que con el *jack* telefónico se puede medir la intensidad que circula por cada una de las ramas que van al modelo, pudiendo así determinarse las intensidades que entran o salen del modelo por cada elemento de contorno del mismo. En el esquema de la instalación que se acompaña (fig. 7) no se incluye esta sección, ya que no se utilizó para estos modelos, aprovechándose la que trae la trazadora analógica que es más estable para la imposición de potenciales. Como dato de refe-

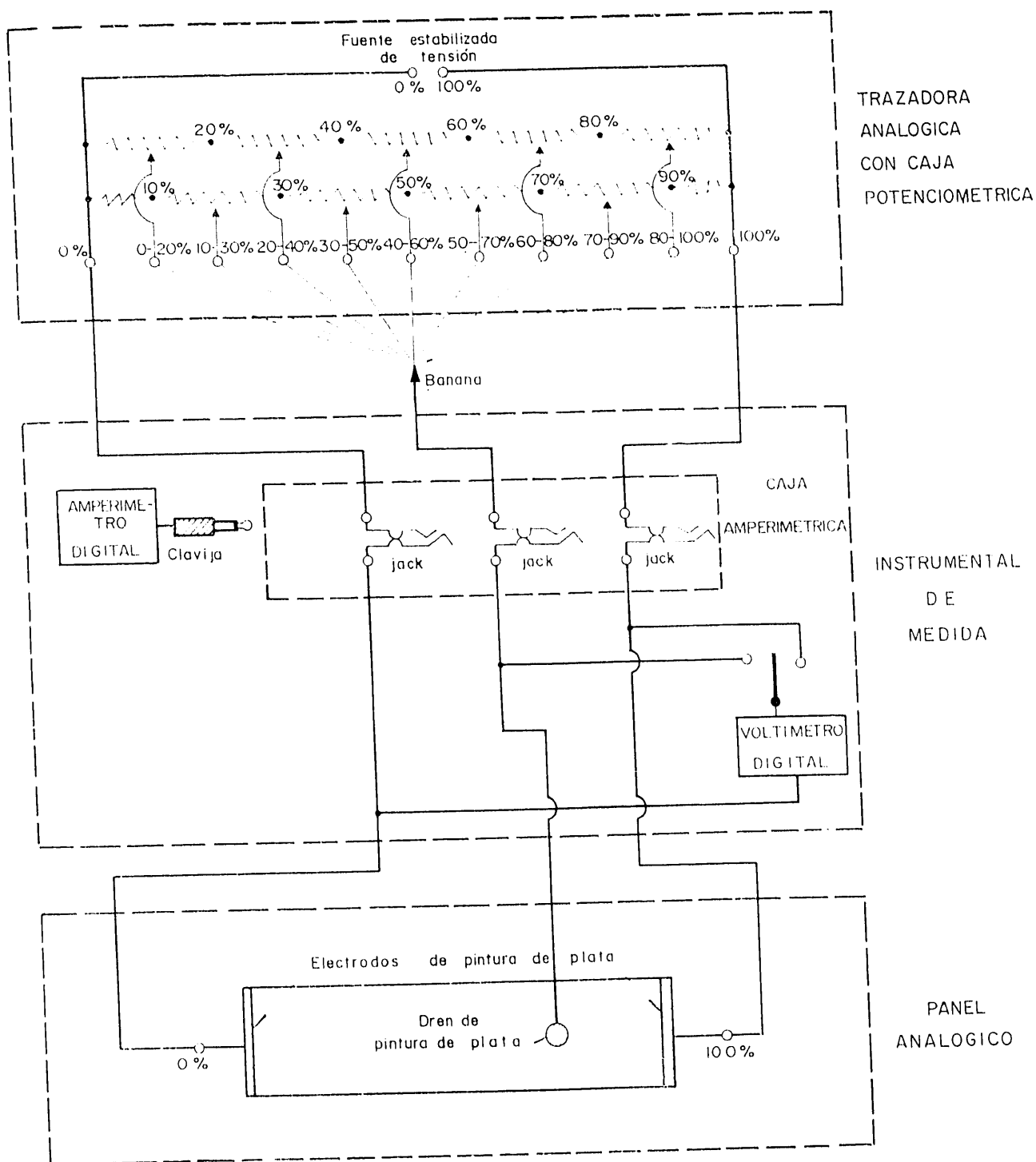


Fig. 7. — Esquema de la instalación.

rencia respecto a la utilidad de la citada *caja amperimétrica*, podemos señalar que la toma de datos de una de las unidades experimentales con que trabajamos duró unas cuatro horas (una tarde) en el primer modelo con dos operadores, reduciéndose, para un solo operador, de unos diez a quince minutos con el circuito ya montado tal como se ha indicado, una vez adquirida un poco de práctica (29).

Uno de los problemas que plantea la medida directa de intensidades es la intercalación en el circuito de un elemento extraño, que es la resistencia, lógicamente pequeña, del amperímetro. Con objeto de controlar esta posible fuente de error, se midieron en los modelos cada una de las intensidades que salían del modelo, así como la intensidad total que entraba, para así tener un valor del error de cierre producido por esta circunstancia. En todos los casos se pudo comprobar que quedaba reducido a una o dos unidades del orden del último dígito por lo que su error relativo es despreciable (menor del uno por 100 en todos los casos).

En lo relativo a modelos de papel conductor no es necesario ningún instrumental especializado más, siendo ésta una de las razones de la difusión que ha alcanzado en los últimos años esta técnica, así como la facilidad y bajo costo de la construcción de los modelos.

2.2.4. *Diseño de modelos.*

Como hemos comentado anteriormente, la primera condición para el establecimiento de la analogía en medios continuos es la semejanza geométrica entre los sistemas prototipo y modelo. En el caso del papel conductor, la escala geométrica existente entre ambos no interviene en las relaciones entre magnitudes análogas, por lo que basta que exista dicha semejanza simplemente. La escala geométrica se fija por consideraciones de tamaño conveniente para el grado de precisión que se pretenda y por las dimensiones del rollo del que deben cortarse los modelos (10).

Otro tema importante a tener en cuenta es el relativo a la imposición de las condiciones de contorno. En este aspecto podemos distinguir los dos tipos de condiciones simples de Dirichlet y de Neumann. La condición de tipo Dirichlet supone fijar el potencial en la zona del contorno de que se trate. Si el potencial es constante, basta con convertir esa zona en conductora y conectarla a un terminal de la trazadora que esté al potencial correspondiente. Esto puede hacerse mediante muchos procedimientos. El utilizado en nuestros modelos ha sido pintar el electrodo correspondiente con pintura conductora de plata, comprobando que la pérdida de potencial entre puntos extremos era despreciable. En el caso de los modelos inversos, en los que la longitud del electrodo resulta excesiva, ya que rodea casi todo el modelo, pudimos comprobar que la caída era apreciable (la longitud era del orden del metro), aunque el error relativo seguía estando dentro del orden de magnitud habitual en este tipo de simulación, por lo que se considera apropiado el procedimiento aún en estos casos. No obstante, y con objeto de mejorar el comportamiento del modelo, se probó con éxito otro procedimiento consistente en añadir al electrodo un alambre fino de cobre, de los utilizados en los cables flexibles ordinarios, para mejorar la conductividad del electrodo. Se fija mediante grapas y se dibuja el electrodo con pintura de plata sobre el alambre de forma que éste mantiene el potencial prácticamente constante, y la pintura se encarga de repartir el flujo siguiendo la forma correspondiente del modelo y estableciendo el contacto con la zona conductora del papel a través de la capa de celulosa, constituyendo así un electrodo prácticamente equipotencial. De todas formas, es muy conveniente, cuando se utiliza pintura de plata, comprobar la resistencia entre los extremos de los electrodos, con objeto de evitar posibles fallos debido a que alguna zona haya quedado con una capa demasiado delgada de pintura y haga caer demasiado el potencial en ella. Salvo casos muy especiales de electrodos muy largos, la pintura

por sí sola es suficiente para asegurar el mantenimiento del potencial y el contacto con la zona conductora del papel.

En caso de que el potencial varíe a lo largo del contorno, es necesario discretizar éste estableciendo una serie de electrodos de longitud apropiada que se conectan al valor del potencial correspondiente al punto medio de cada uno. Los electrodos deben estar separados entre sí una cierta distancia, habiéndose comprobado por diferentes investigadores que la relación óptima de electrodo-separación es de tres a uno. Lógicamente, la longitud del paso a utilizar debería ser lo menor posible, viniendo dada en la práctica, por una parte, por el número de puntos de potencial de que se disponga, y por otra, por la perturbación que la discretización del contorno introduce en los resultados. De todas formas, dicha perturbación disminuye rápidamente a poca distancia de los propios electrodos, por lo que, salvo en los puntos próximos a los mismos, el campo no es prácticamente afectado y la perturbación es fácilmente localizable, ya que suele traducirse en variaciones bruscas de dirección de las líneas equipotenciales en las inmediaciones de los mismos. Lógicamente, esta longitud depende también de la variación de potencial que deba representarse, reduciéndose en aquellas zonas en que el potencial varíe rápidamente y viceversa (7).

En cuanto a las condiciones de tipo Neumann (es decir, fijar la derivada según la normal al contorno), desde el punto de vista del modelo, suponen fijar la intensidad de corriente que entra o sale por cada punto del contorno. La condición más frecuente, y la más cómoda de aplicar, es la que utilizamos en los modelos que corresponde al valor de la misma igual a cero, es decir, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} = 0$; responde al caso de que una zona del contorno sea línea de corriente. En este caso basta con hacer el borde aislante, para lo cual no hay más que cortar el papel. En los demás casos, se conecta el electrodo correspondiente a la fuente de potencial a través de una resistencia variable y se modifica la misma hasta que la intensidad que la atraviesa es la requerida, pudiéndose medir ésta directamente mediante un amperímetro. Existen otros procedimientos, como el de las grandes resistencias, para calcular previamente el valor de una resistencia fija que realice esta función. El problema que se presenta es que el potencial que existe en el punto del modelo del que se extrae o inyecta una intensidad no es conocido *a priori* y variará además con las condiciones de contorno que se impongan, por lo que será siempre necesario un reajuste hasta lograr imponer las condiciones deseadas. En el procedimiento de las grandes resistencias lo que se hace es utilizar una resistencia muy grande comparada con la que pueda tener el modelo, de forma que la mayor parte de la caída de tensión se produzca en la misma, con lo cual la intensidad que la atraviesa no dependerá mucho del potencial que exista en el otro extremo de la misma, en el modelo, pudiéndose fijar su valor previamente en función de la diferencia de potencial de que se disponga entre la fuente y el modelo, y de la intensidad que se quiere que pase (2). De todas formas habrá que determinar, en cada caso, el posible error que puede aparecer debido a las variaciones de potencial en el modelo y actuar en función de las mismas, por lo que nos inclinamos más bien por el procedimiento de las resistencias variables. En función de éste se diseñó la "caja amperimétrica" citada en el apartado anterior, que posteriormente ha sido mejorada añadiéndole un circuito transistorizado que permite estabilizar la intensidad que pasa por cada rama, independientemente de las variaciones que puedan introdu-

cirse en las restantes. Se simplifica notablemente la toma de datos al evitar los reajustes por aproximaciones sucesivas subsiguientes a los cambios de una cualquiera de las condiciones de contorno.

Para el caso de condiciones de tipo mixto o de Fourier lo que se establece es una relación entre el potencial y la derivada según la normal, que suelen introducirse discretizando el contorno y mediante resistencias externas (7).

Cuando sean necesarios datos de flujo del campo físico que se está representando, caudales en el caso hidráulico, será preciso medir la intensidad que atraviesa la línea homóloga en el modelo y la resistividad del papel conductor con el que se ha realizado el modelo para poder calcular los caudales mediante las fórmulas estudiadas en el apartado 2.1.3. Por lo tanto, es preciso construir un testigo de papel conductor de la misma zona donde se ha cortado el modelo para determinar su resistividad. Dicho testigo puede hacerse cuadrado (en cuyo caso la resistividad por cuadrado es directamente la resistencia que presenta entre dos lados opuestos conductores), o bien rectangular viniendo en este caso dada la resistividad por la expresión $\rho = a R$; siendo a la relación entre el ancho del rectángulo y su longitud, medida esta última entre los lados que hacen de electrodos, y R la resistencia medida. Es conveniente en todos los casos tomar dos testigos al menos: uno, en dirección longitudinal del rollo, y otro, en dirección transversal, con objeto de controlar la anisotropía del papel y efectuar, en su caso, la apropiada corrección de escalas.

2.2.5. *Analogía inversa. Variable compleja.*

En el estudio de problemas bidimensionales, la familia de superficies equipotenciales queda reducida a una familia de curvas, por lo que la red de corriente queda completada por dos familias de curvas. equipotenciales y líneas de corriente, mutuamente ortogonales.

En teoría de variable compleja (11), de las condiciones de Cauchy-Riemann para las partes real e imaginaria de una función analítica de variable compleja, se deduce que las funciones reales de dos variables reales que constituyen dichas partes deben ser armónicas, y además las líneas de nivel de ambas funciones son ortogonales entre sí. A estas funciones se las denomina funciones armónicas conjugadas. Dado que deben ser armónicas, verifican la ecuación de Laplace, $\Delta \varphi = 0$, por lo que existe una estrecha relación entre la resolución de problemas de funciones armónicas planas y la teoría de variable compleja, aplicada al estudio de las funciones analíticas. De hecho, la resolución analítica de funciones armónicas con condiciones de contorno bidimensionales, se centra casi exclusivamente en la aplicación de los recursos de la variable compleja.

En los problemas bidimensionales estudiados mediante simulación con las condiciones ya vistas, el campo físico correspondiente queda definido conociendo su potencial, que deberá ser un campo escalar armónico con unas condiciones de contorno determinadas. Por tanto, siempre será posible determinar, aunque no se conozca su expresión analítica, su función conjugada, que también será armónica, y cuyos valores corresponden a la familia de curvas ortogonales a las curvas equipotenciales, es decir, representan las líneas de campo del campo potencial original (líneas de campo del campo de gradientes del mismo). Esta función, habitualmente denominada función de corriente en problemas hidráulicos o electrodinámi-

cos, puede ser analógicamente estudiada mediante el mismo procedimiento que el potencial. A esta analogía se la denomina inversa. Las líneas equipotenciales del modelo analógico inverso corresponden a las líneas de corriente del modelo original o directo (4).

Como la función de corriente es armónica, queda unívocamente determinada mediante sus valores o los de sus derivadas en el contorno, por lo que para el diseño de los modelos inversos bastará determinar los valores de la función de corriente en el mismo.

Partiendo de las condiciones de Cauchy-Riemann para funciones analíticas de variable compleja, llamando φ a la función potencial y ψ a la función de corriente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (\text{E. 70})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (\text{E. 71})$$

siendo (n, s) dos variables correspondientes a dos direcciones ortogonales cualesquiera en el punto que estemos considerando. Si tomamos s como la dirección tangencial al contorno y n la normal al mismo:

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \int_0^s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad (\text{E. 72})$$

Dado que la función de corriente y el potencial están determinados a menos de una constante, se puede elegir el origen para s arbitrariamente y asignar a ese punto del contorno el valor de ψ que se quiera; por ejemplo, 0. Calculando, por consiguiente, dicha integral a lo largo de todo el contorno, como los valores de $\partial \varphi / \partial n$ son conocidos del modelo directo, podemos determinar los valores de ψ en todo el contorno, quedando, por tanto, definido el modelo inverso.

En el modelo eléctrico la intensidad que atraviesa un electrodo o elemento de contorno ds es:

$$dI = \vec{j} ds = \vec{j} \vec{n} ds = (-\sigma \text{ grad } \varphi) n ds = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad (\text{E. 73})$$

La intensidad de corriente que sale por una zona del contorno es proporcional a la diferencia de valores de la función de corriente, según se desprende de la ecuación (E. 72). Por consiguiente, su valor en el punto N será:

$$\psi(s_N) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^N I_i \quad (\text{E. 74})$$

siendo I_i las intensidades que atraviesan los electrodos situados entre el punto tomado como origen y el electrodo N .

En los tramos del contorno correspondientes a líneas de corriente del modelo directo, $\partial \varphi / \partial n = 0$, por lo que el valor de ψ es constante en ellos, corresponden a una equipotencial del modelo inverso. Análogamente, en las zonas del contorno que son equipotenciales en el modelo directo $\partial \varphi / \partial s = 0$, por lo que en el modelo

inverso $\partial \psi / \partial n = 0$, y constituyen líneas de corriente del mismo. Dado que en la imposición de condiciones de contorno, según hemos visto, se reducían siempre a ser equipotenciales o líneas de corriente (no olvidemos que en caso de ser de potencial variable se ha discretizado en una serie de electrodos separados por tramos cortados), resulta inmediato el diseño de modelos inversos.

En la analogía no es necesario conocer la función de corriente, sino cualquier función proporcional; no es preciso tener en cuenta, pues, el coeficiente $1/\sigma$ que aparece en la fórmula anterior, ya que al establecer la analogía en el modelo inverso entre las magnitudes eléctricas (en este caso, la intensidad del modelo directo representada en el modelo inverso por el potencial) e hidráulicas, resulta (ver la ecuación (E. 60)):

$$\frac{q_i}{Q} = \frac{I_i}{I}$$

siendo q_i el caudal que atraviesa la sección i del prototipo que estamos considerando, Q un caudal conocido que puede ser el caudal total circulante deducido de los datos del modelo directo, e I_i, I las intensidades homólogas de los anteriores caudales en la analogía.

Para diseñar el modelo inverso basta, pues, recorrer el contorno asignando un valor de ψ que sea la suma algebraica (se establece como sentido positivo, por ejemplo, la intensidad que entra en el modelo) de las intensidades que atraviesan los electrodos que se van encontrando, conocidas del modelo directo. Como comprobación al volver al punto de partida (el contorno debe ser cerrado), el valor de ψ deberá ser el tomado como origen, en nuestro caso el 0.

Como en la trazadora se utilizan potenciales relativos (entre 0 y 100 por 100) al establecer la analogía entre el potencial eléctrico V y la función proporcional a la de corriente así calculada ($\sigma \psi$), bastará asignar el valor 0 por 100 al mínimo valor de $\sigma \psi = \pm I$, y el máximo de 100 por 100 al máximo de la función anterior, por lo que el valor del potencial eléctrico a asignar a cada uno de los electrodos del contorno del modelo inverso vendrá dado por:

$$V (\%) = \frac{I - I_{\min}}{I_{\max} - I_{\min}} \cdot 100 \quad (\text{E. 75})$$

siendo $I = \pm I_i$ la correspondiente al electrodo considerado.

Si el recinto no es simplemente conexo, el contorno estará constituido por dos o más curvas cerradas, planteándose el problema de dar valores a los electrodos de las líneas interiores. Para ello, es necesario unir dichos contornos interiores al exterior mediante líneas de corriente o equipotenciales que habrán de determinarse con los datos del modelo directo, procediéndose a continuación como se ha señalado.

2.3. Analogía reoeléctrica en conductor líquido. Cuba electrolítica.

2.3.1. Generalidades.

El fundamento teórico de la cuba electrolítica es idéntico al del en papel conductor (2), aunque en la cuba se aplica a tres dimensiones. La utilización de un

electrólito como medio conductor fue ya propuesta por Adams en 1875 (23). El conductor líquido tiene dos ventajas principales con respecto a las analogías tridimensionales en conductor sólido (4). Permite, por un lado, sondear el potencial sobre puntos interiores con mayor facilidad, aunque esto, como es lógico, producirá perturbaciones, en tanto que con conductor sólido sólo es posible determinar el potencial en puntos previamente elegidos y en número no muy elevado, ya que su medida requiere la colocación de una sonda permanentemente colocada en el punto en cuestión, aumentando considerablemente las perturbaciones del campo original con su número; por otra parte, presenta gran facilidad para conseguir disoluciones de resistividad ampliamente variable sin más que cambiar la concentración del electrolito. No obstante, la primera de las ventajas está supeditada al hecho de que el modelo disponga de una superficie plana de líneas de corriente (impermeable en el caso de la hidráulica subterránea) que se haga coincidir con la superficie libre del electrolito en el modelo. En caso contrario, el modelo deberá ser totalmente cerrado, con la consiguiente limitación en la introducción de sondas de prueba.

Entre los componentes habituales de los modelos en conductor líquido, podemos distinguir:

a) *Cuba propiamente dicha*. — Consiste en un recipiente frecuentemente parapetado, de paredes y fondo aislantes y estancos, cuya misión casi exclusiva es recibir en su interior los modelos y contener el electrolito. A veces, lleva un recubrimiento de cobre aislado con una capa de brea u otra materia aislante, para evitar la influencia de campos eléctricos extraños sobre el modelo, constituyendo dicho revestimiento una especie de jaula de Faraday (13).

b) *Modelo*. — Es la reproducción a escala del soporte geométrico del campo estudiado. En este tipo de analogía el modelo es el electrolito. El contorno, con las condiciones correspondientes, se realiza con materiales aislantes o conductores, según sean dichas condiciones de contorno. Para los aislantes suele utilizarse madera barnizada, cera y recientemente toman cada vez más importancia las diversas clases de plásticos. Los electrodos se realizan en cobre, latón, platino, etc., dependiendo de su extensión y relaciones con el electrolito, entre otros factores (14).

c) *Fuente de alimentación*. — Suele consistir en un oscilador de corriente alterna, con objeto de evitar problemas de electrólisis. Su frecuencia influye también en los procesos de polarización de los electrodos, por lo que suelen utilizarse frecuencias del orden de los 1.000 Hz. y ondas de tipo sinusoidal, aunque también se usan ondas cuadradas (15).

d) *Elementos de medida y representación*. — Los primeros consisten esencialmente en una sonda de prueba que puede tener desde uno hasta cuatro electrodos en las más complicadas (16). Existen multitud de variantes, según el tipo de medidas que se deseen realizar, y procurando eliminar en lo posible los errores que la introducción de la sonda produce en la medida de las magnitudes que se necesitan (17). Dado que la detección punto a punto en problemas tridimensionales sería demasiado engorrosa y larga, con el consiguiente riesgo de que varíen las condiciones de medida, se han desarrollado numerosos mecanismos automatizados para el trazado y dibujo de las líneas equipotenciales (18), (19) y (20).

2.3.2. *Electrólitos.*

La propiedad del electrólito utilizada directamente en la analogía es su conductividad, por lo que desde este punto de vista nos interesa que se ajuste teóricamente a un líquido conductor puro. En consecuencia, se le debe exigir que posean las siguientes propiedades:

1. Ser puramente resistivo, es decir, no presentar reactancia frente al paso de corrientes variables.
2. La resistividad debe ser uniforme en todo el líquido.
3. Resistividad independiente de la intensidad, es decir, relación lineal entre voltaje e intensidad (conductor lineal u óhmico).
4. Valor de resistividad adecuado respecto de los electrodos e instrumentos de medida.
5. No reaccionar con los electrodos.
6. Tensión superficial pequeña.
7. La superficie del electrólito debe estar libre de películas, suciedades y materias extrañas.
8. Velocidad de evaporación en el aire pequeña.

Al utilizar corriente alterna para evitar problemas de electrólisis, se producen fenómenos de polarización en las proximidades de los electrodos. A frecuencias de varios centenares de ciclos por segundo, aparece una componente reactiva no lineal, además de la resistencia propia del conductor. Al aumentar la frecuencia el conductor se hace lineal, pero sigue apareciendo la componente reactiva. Estos fenómenos de polarización dependen de múltiples factores que han sido examinados detalladamente por Einstein (21).

Un factor esencial en el comportamiento del modelo es la pareja electrodo-electrólito, dependiendo la calidad de aquel de la influencia mutua de éstos. Para comparar las diversas parejas se define un *factor de mérito* (1), que sirve como medida de la distorsión que introduce el efecto de polarización, y se define como la relación entre la resistividad del electrólito y la impedancia de superficie a través de la unidad de área de un electrodo. Para que los errores debidos a la polarización sean despreciables respecto a los mecánicos (supuestos éstos de 0,1 a 0,4 por 100), el factor de mérito deberá ser de 100 a 400.

Para una misma pareja de electrodo-electrólito, el factor de mérito varía con la temperatura y la concentración del electrólito, así como con la frecuencia de la corriente utilizada. La influencia del aumento de frecuencia se hace muy pequeña por encima de los 2.000 Hz., por lo que no merece la pena ir a frecuencias demasiado altas, aunque en algunos casos puede ser necesario.

En nuestros modelos, el electrólito usado es agua natural envejecida (para evitar los desprendimientos de gases, cloro sobre todo, y con objeto de que ya esté estabilizada respecto a intercambios iónicos), con electrodos de cobre y latón. Previamente a la confección de los modelos primitivos se hicieron pruebas referentes a su linealidad y efectos de polarización, resultando en ambos casos satisfactorios, comprobándose los resultados dados por diferentes investigadores para este par electrodo-electrólito.

2.3.3. *Electrodos.*

Su composición depende esencialmente de su extensión superficial, ya que ésta puede variar tanto como desde ser la sección de un simple alambre hasta llegar a ocupar una amplia superficie. La elección del material depende de sus dimensiones tanto como de los problemas de polarización que pueda presentar junto con el electrólito que se quiera usar.

En general, deberá presentar las siguientes propiedades:

1. Baja resistividad (despreciable frente a la resistividad del electrólito).
2. No reaccionar químicamente con el electrólito.
3. No disolverse en el electrólito.
4. Presentar una superficie suave bien definida.
5. Ser fácil de cortar y limpiar.

Los electrodos utilizados en nuestros modelos fueron de dos tipos. Los superficiales se hicieron con lámina de cobre previamente pulimentada, en tanto que los drenes cilíndricos fueron realizados con varillas de latón, asimismo, pulimentadas.

2.3.4. *Instrumental.*

Respecto al instrumental, la variedad de elementos existente, tanto en fuentes de potencial como en instrumentos de medida y representación es muy amplia, pudiendo decirse que cada equipo investigador ha desarrollado y puesto a punto su propio instrumental con ideas más o menos originales, según sus criterios y necesidades, y cuya descripción en algunos casos puede encontrarse en artículos especializados en estas técnicas de simulación (1), (22), (23) y (24).

En nuestra experimentación hemos utilizado un equipo de la casa F. C. Robinson and Partners Ltd., consistente en un oscilador de 1.000 Hz. de onda sinusoidal y en un puente de medida para corriente alterna con condensadores de ajuste para equilibrar ambas ramas del puente, compensando las capacitancias que se crean en el modelo formadas por el conjunto de electrodos con el dieléctrico constituido por el electrólito incluido entre ellos. Este equipo no es de alta calidad, pero su precisión es comparable a la que puede conseguirse en modelos de papel conductor. Con un buen instrumental para la confección de los modelos y para la cuba electrolítica, pueden reducirse considerablemente los porcentajes de error en los modelos realizados con estas técnicas.

Por último, para las medidas eléctricas se utilizó, al igual que en los modelos bidimensionales, un multímetro digital y la caja amperimétrica ya comentada en el apartado 2.2.3.

2.3.5. *Cuba poco profunda. Problemas bidimensionales.*

La cuba electrolítica puede ser usada para la resolución de problemas bidimensionales con un espesor de electrólito relativamente pequeño comparado con las otras dos dimensiones. Para este tipo de problemas se utilizan cubas de poca altura que deben estar perfectamente niveladas, ya que el espesor del electrólito

debe ser uniforme y queda limitado por la superficie libre del mismo, horizontal, y el fondo de la cuba que también deberá serlo. Dado que la resistividad bidimensional en cada punto es inversamente proporcional a la profundidad, mediante este tipo de cuba pueden estudiarse problemas bidimensionales con resistividad lentamente variable sin más que moldear el fondo de forma que en cada punto el espesor de electrólito sea proporcional a la conductividad que debe tener el modelo en el mismo. Para variaciones bruscas es preciso añadir ciertos dispositivos que disminuyan las perturbaciones que se crean respecto de las hipótesis de problema bidimensional (lo que implica que el potencial debe ser constante en una vertical), o bien estableciendo separaciones con electrólitos de diferentes conductividades conectados eléctricamente a través de las mismas (25) y (26).

2.3.6. *Cuba inclinada. Problemas con simetría de revolución.*

En problemas con simetría de revolución el potencial es independiente de la coordenada angular de un sistema cilíndrico de referencia que tuviese como eje el de simetría, por lo que en cualquier plano meridiano la distribución de potencial es la misma, siendo dichos planos de líneas de corriente. Una forma de simular tales campos puede ser representado, en lugar del dominio tridimensional completo, el espacio comprendido entre dos planos que pasen por el eje de simetría, separados entre sí un ángulo θ cualquiera. Este dominio puede simularse por el espacio comprendido entre un plano inclinado y la superficie libre del electrólito, siendo la intersección de ambos planos la materialización del eje de simetría en el problema.

Este tipo de cuba puede lograrse con la introducción, en una cuba profunda, de una superficie plana con dos soportes que permitan graduar la altura de uno de sus bordes, y por consiguiente, el ángulo que forme con un plano horizontal. Sobre esta base se construye el modelo correspondiente con las condiciones de contorno apropiadas. La distribución de potencial se mide en la superficie libre, procurando que la penetración de la sonda de prueba sea la mínima posible que asegure una baja impedancia de contacto, ya que las superficies equipotenciales no son verticales, salvo en los puntos de la propia superficie libre (27) y (28).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. D. VITKOVITCH: "Field Analysis". D. van Nostrand, London, 1956.
2. W. KARPLUS: "Analog Simulation". McGraw Hill, New York, 1958.
3. G. SCHNEEBELI: "Hydraulique souterraine". Eyrolles, París, 1966.
4. P. HUARD DE LA MARRE: "Résolution de problèmes d'infiltrations à surface libre au moyen d'analogies électriques". Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, París, 1958.
5. G. KIRCHHOFF: "Flow of an electric current through a plane, particularly through a circular disk". Ann. Phys. Chemie, vol. 64, 1845.
6. G. HOTCHKISS: "Electrosensitive Recording Papers for Facsimile Telegraphic Apparatus and Graphic Chart Instruments". Western Union Tech. Rev., vol. 2, 1948.
7. C. MATAIX PLANA: "Selección mediante analogía reoeléctrica con papel Teledellos de un tipo de refrigeración de álabes de turbina de gas". Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1962.

8. P. HUARD DE LA MARRE: "Modèles analogiques électriques a trois dimensions pour l'étude des écoulements de filtrations a surface libre". La Houille Blanche, núm. A, 1956.
9. S. C. REDSSHAW: "A three dimensional electrical potential analyzer". Brit. J. Appl. Physic., volumen 2, 1951.
10. L. MALAVARD: "On a new technique for experimental investigation by means of rheoelectric analog". Recherches Aeronautiques, vol. 20, 1951.
11. A. GALINDO y L. ABELLANAS: "Métodos matemáticos de la Física", tomo I. Análisis complejo. Madrid, 1973.
12. W. C. ADAMS: "On the form of equipotential curves and surfaces and lines of electric forces", volumen 23. Proc. Roy. Soc. London, 1875
13. E. R. HARTILL, J. G. MCQUEIN y P. N. ROBSON: "A deep electrolytic tank for the solution of 2 and 3 dimensional field problems in engineering". Proc. Instr. Electr. Engrs. Paper 2179 M 104. Pt. A, 401, 1957.
14. A. S. ODEH, H. B. BRADLEY y J. P. HELLER: "Scale factor limitations in potentiometric model construction". Trans AIME, vol. 207, 1953.
15. J. MIROUX: "Utilization of square-wave signals in the technique of electrical analogues. Apparatus with large resistance for electrolytic tanks". Onde Elect., 38, 1951.
16. M. K. WESTON: "An improved probe assembly for use with an electrolytic tank". Metrop. Vickers Gaz, 1958.
17. J. C. BURFOOT: "Probe impedance in the electrolytic tank". Brit. J. Appl. Phys., vol. 6, 1955.
18. P. E. GREEN: "Automatic plotting of electrostatic field". Rev. Sci. Instr., vol. 19, 1948.
19. R. B. BURTT y J. WILLIS: "A high speed electronic analogue field mapper". J. Sci. Instr. volumen 34, 1957.
20. H. SCHMIDL: "The electrolytic tank with automatic plotting of equipotential lines". Elektrotechnik Masch Bau, 69, 1952.
21. P. A. EINSTEIN: "Factors limiting the accuracy of electrolytic plotting tanks". Brit. Journal Appl. Phys., vol. 2, 1951.
22. L. DADDA: "The electrolytic tank of the centre for the study of electrical analogues". Energía Eléct., 28, 1951.
23. Y. TANABE y S. YAMADA: "Electrolytic tank analogue design and the application of automatic control". Amer. J. Phys., 12, 1944.
24. D. L. HOLLWAY: "An electrolytic tank equipment for the determination of electron trajectories, potential and gradient". Proc. Instr. Electr. Engrs. Paper 1837 M 103, 1955.
25. K. F. SANDER y J. G. YATES: "A new form of electrolytic tank". Proc. Instr. Electr. Engrs., volumen 104, parte C, 1957.
26. V. E. BOGOLYUBOV y Y. M. SHAMAEV: "Electrolytic tanks having semiconducting walls". Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R., vol. 98, 1954.
27. R. E. PEIERLS y T. H. R. SKYRME: "Tank model for problems of axial symmetry". Phil. Mag., 40, 1949.
28. L. DADDA: "Electrolytic models for the study of axially symmetrical harmonic field". Energía Eléct., 30, 1953.
29. J. PLANA CLAVER: "Técnicas eléctricas de simulación analógica para problemas de infiltración de aguas". Tesis doctoral presentada en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid. Madrid, septiembre 1968.