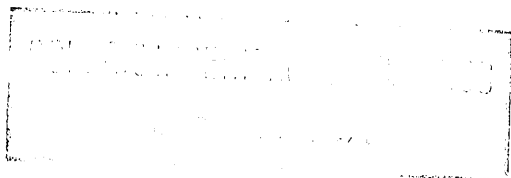


ESTUDIO DE LOS CAUDALES DRENADOS E INFILTRADOS POR REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS BAJO MACIZOS IMPERMEABLES, MEDIANTE ANALOGIA REOELECTRICA EN MEDIOS CONTINUOS Y ANALISIS MATEMATICO DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES (*)

2. LA ANALOGIA REOELECTRICA UTILIZADA (Parte A)



Por JOAQUIN CRUCES DE ABIA

Prof. Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos.

FRANCISCO GONZALEZ DE POSADA

Prof. Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos.

Cátedra de Fundamentos Físicos de las Técnicas. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, de Madrid.

Este artículo es continuación de otro publicado bajo el mismo título general en el número de septiembre pasado de esta revista. En éste se plantean las bases teóricas que permiten establecer la analogía eléctrica en medios continuos entre el campo de la conducción eléctrica y el campo de la hidráulica subterránea. En una segunda parte, que se publicará próximamente, se describen las técnicas e instrumental utilizados en el presente estudio, que forma parte de la tesis doctoral del primero de los autores.

2.1. Analogía reoeléctrica en medios continuos.

2.1.1. Consideraciones previas.

La descripción de un número considerable de fenómenos físicos mediante ecuaciones matemáticas en derivadas parciales conduce, con las oportunas simplificaciones en cada caso, a unas pocas ecuaciones, como son las de Laplace, Poisson, biarmónica, difusión, propagación de ondas, etc. Esto es consecuencia de que proceden, en la mayoría de los casos, de la aplicación de los mismos principios a los diferentes ámbitos de la física, como son los principios de conservación, de continuidad, etc.

La similitud de ecuaciones que gobiernan diferentes fenómenos físicos sugiere el establecimiento de una relación que permita resolver un problema dado en función de los resultados conocidos en la resolución de otro análogo. En esta idea se basan todas las técnicas de simulación física (1).

Dos sistemas físicos se denominan *análogos* cuando puede establecerse entre ellos una correspondencia biunívoca entre cada dos elementos, uno de cada uno de los sistemas (puntos en el caso de los sistemas de medios continuos), así como

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta revista hasta el 30 de junio de 1977.

entre las magnitudes, tanto las de excitación como las de respuesta que intervienen en ambas teorías físicas, que están regidas por idénticas ecuaciones y relaciones entre sus variables (2).

Cuando uno de los sistemas análogos es el campo eléctrico en un material conductor, la analogía se denomina eléctrica, y si se trata de sistemas continuos, se suele utilizar la denominación de *técnicas de simulación reoelectrónica*, según propuesta del profesor Malavard, uno de sus principales impulsores en Francia. Este tipo de analogía eléctrica es el que se ha utilizado en la experimentación aplicada al estudio de la infiltración (3).

El amplio desarrollo que las diversas técnicas de simulación analógica eléctrica han tenido en los últimos años, se basan, por una parte, en la posibilidad de obtener un amplio espectro de elementos resistivos, inductivos y capacitivos en el comercio a precios asequibles y tales que pueden encontrarse características adecuadas con márgenes muy grandes de variación, facilitando de esta manera la elección de los restantes parámetros del modelo; y por otra parte, al desarrollo y precisión de la instrumentación electrónica, que permite medir con gran facilidad y sensibilidad las diversas magnitudes eléctricas necesarias en un modelo analógico eléctrico frente a la imprecisión y, a veces, imposibilidad de medida en otros sistemas, así como la comodidad y limpieza que representan este tipo de analogías frente a otras de tipo mecánico, hidráulico, modelos reducidos, etc. Además, el manejo y la toma de datos no requiere personal excesivamente especializado, bastando un ligero aprendizaje para su manejo.

2.1.2. Ecuación del campo electrodinámico en un medio conductor.

Las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, expresadas en el sistema gaussiano de unidades, son (4):

$$\text{rot } H - (1/c) \frac{\partial D}{\partial t} = (4 \pi / c) j \quad (\text{E. 34})$$

$$\text{rot } \vec{E} + (1/c) \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (\text{E. 35})$$

$$\text{div } D = 4 \pi \rho \quad (\text{E. 36})$$

$$\text{div } B = 0 \quad (\text{E. 37})$$

donde:

E = intensidad de campo eléctrico.

H = intensidad de campo magnético.

B = inducción magnética.

D = desplazamiento eléctrico.

$\vec{j}$ = densidad de corriente eléctrica.

ρ = densidad volumétrica de carga eléctrica.

Estos últimos campos están relacionados entre sí mediante las características propias del medio material en que se propagan, según las siguientes leyes deducidas experimentalmente y que se denominan *ecuaciones materiales*:

$$j = \sigma E; \quad \sigma = \text{conductividad específica.}$$

$$D = \epsilon E; \quad \epsilon = \text{permitividad eléctrica.}$$

$$B = \mu H; \quad \mu = \text{permeabilidad magnética.}$$

Estas tres últimas magnitudes son campos tensoriales de segundo orden, tales que por su naturaleza simétrica pueden considerarse como tres campos escalares constantes en el caso de medios homogéneos e isotropos.

Ecuación de continuidad.

Aplicando el operador divergencia a la primera ecuación de Maxwell se obtiene:

$$\text{div}(\text{rot } H) - \frac{1}{c} \text{div} \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) = (4 \pi / c) \text{div } j \quad (\text{E. 38})$$

Dado que todo campo vectorial de rotacionales diferenciable es solenoidal:

$$\text{div}(\text{rot } H) = 0 \quad (\text{E. 39})$$

y si sustituimos este resultado en la ecuación anterior:

$$\text{div } j = - (1/4 \pi) \text{div} \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) \quad (\text{E. 40})$$

En la tercera ecuación de Maxwell, teniendo en cuenta que las variables espaciales y el tiempo son independientes entre sí, pueden permutarse los signos de derivación respecto de ellas. Derivando dicha ecuación respecto al tiempo resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } D) = \text{div} \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) = 4 \pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{E. 41})$$

Sustituyendo en (E. 40) se obtiene la expresión final de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0 \quad (\text{E. 42})$$

Considerando un medio conductor de conductividad " σ ", supuesto homogéneo e isotropo, y que se ha establecido en él un régimen estacionario o permanente, la

segunda ecuación de Maxwell, al ser nula la derivada respecto al tiempo, se reduce a:

$$\text{rot } E = 0 \quad (\text{E. 43})$$

por lo que E , campo vectorial irrotacional, admite un potencial escalar V tal que:

$$E = -\text{grad } V \quad (\text{E. 44})$$

Introduciendo este valor de E en la ecuación de continuidad por intermedio de la ley de Ohm (primera de las ecuaciones materiales reseñadas más arriba), se obtiene, finalmente:

$$\text{div } (\sigma \text{ grad } V) = 0 \quad (\text{E. 45})$$

Suponiendo el medio isótropo, puede considerarse como un campo escalar, por lo que desarrollando esta expresión resulta:

$$\text{div } (\sigma \text{ grad } V) = \text{grad } \sigma \cdot \text{grad } V + \sigma \text{ div } (\text{grad } V) = \text{grad } \sigma \cdot \text{grad } V + \sigma \Delta V = 0 \quad (\text{E. 46})$$

que puede expresarse en la forma:

$$\Delta V = -\rho \text{ grad } \sigma \cdot \text{grad } V \quad (\text{E. 47})$$

donde ρ simboliza en este caso la resistividad, inversa de la conductividad. Es una ecuación del tipo de Poisson, pero, por tratarse de un medio homogéneo, la conductividad es un campo escalar constante (gradiente nulo) y resulta definitivamente:

$$\Delta V = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace.} \quad (\text{E. 48})$$

Si el medio conductor fuese homogéneo, pero anisótropo, la ecuación anterior quedaría reducida, en un sistema cartesiano ortonormal de referencia, a la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{E. 49})$$

Esta ecuación puede, a su vez, reducirse a la de Laplace (5) sin más que efectuar una transformación afín, por lo que puede ser también estudiada mediante los diversos sistemas de resolución de la ecuación de Laplace, en particular los basados en la analogía eléctrica.

2.1.3. Ecuación del movimiento de un fluido a través de un medio poroso (*).

Sea un fluido de densidad ρ que atraviesa un medio poroso cuya permeabilidad relativa es K . El potencial hidráulico se denomina h .

La masa de fluido que atraviesa una determinada superficie S por unidad de tiempo es el flujo del campo producto del de velocidades por el de densidades:

$$Q = \int_S \rho \cdot v \cdot dS = \int_S \rho \cdot v \cdot n \cdot dS \quad (\text{E. 50})$$

Según la ley de Darcy generalizada (6) y (7), y dentro de su campo de validez (8), (9) y (10), la velocidad de filtración $\bar{v}$ viene dada por la expresión:

$$v = -K \text{ grad } h \quad (\text{E. 51})$$

donde K es un campo tensorial de segundo orden. Si se supone el medio homogéneo e isótropo, dicho campo puede representarse por una constante.

Aplicando la ecuación de continuidad (11) al fluido considerado, equivalente a la conservación de la masa, debe imponerse que, en cualquier volumen V encerrado por una superficie cerrada S , la variación de masa de fluido en el mismo por unidad de tiempo sea igual al caudal másico que entra o sale del volumen V a través de la superficie S , es decir:

$$\int_S \rho \cdot v \cdot dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (\text{E. 52})$$

Si la superficie S que se considera es cerrada, lisa y orientable, y no existen puntos singulares en su interior, fuentes o sumideros, al aplicar el teorema de la divergencia al volumen V y a la superficie S que lo encierra se obtiene:

$$\int_S \rho \cdot v \cdot dS = \int_V \text{div}(\rho v) dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV; \quad \int_V \left[\text{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (\text{E. 53})$$

Esta ecuación es válida cualquiera que sea el volumen considerado, por lo que la cantidad subintegral es idénticamente nula. Por consiguiente, la ecuación de con-

(*) NOTAS: 1. En el estudio de problemas de filtración el potencial hidráulico " φ " dado por la expresión:

$$\varphi = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \quad (\text{E. 59})$$

coincide prácticamente con el concepto de carga hidráulica o cota piezométrica h :

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

ya que el término de velocidad es despreciable frente a los otros dos sumandos (12), como se puede comprobar fácilmente teniendo en cuenta el espectro de velocidades de filtración del dominio de validez de la ley de Darcy.

2. La velocidad de filtración se define como el cociente entre el caudal que atraviesa una determinada superficie y el área total de dicha superficie, siempre que la misma sea normal a la dirección del flujo (12). Por tanto, no coincide con la velocidad real del fluido a través de los huecos del material poroso.

3. En lo sucesivo utilizaremos los términos potencial hidráulico y cota piezométrica indistintamente por la razón indicada, aunque conceptualmente son diferentes. En cuanto a la velocidad siempre se utiliza la velocidad de filtración, prescindiendo de la velocidad real del fluido.

tinuidad queda reducida a:

$$\operatorname{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{E. 54})$$

ecuación similar a la obtenida en el campo electrodinámico.

Si se supone el fluido de densidad constante en el espacio y permanente en el tiempo resulta:

$$\operatorname{div}(v) = 0 \quad (\text{E. 55})$$

Suponiendo el medio isótropo, la permeabilidad relativa puede considerarse como un campo escalar.

Introduciendo la ley de Darcy en esta expresión de la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} h) = \operatorname{grad} K \cdot \operatorname{grad} h + K \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) = \operatorname{grad} K \cdot \operatorname{grad} h + K \Delta h = 0 \quad (\text{E. 56})$$

que puede expresarse de la forma:

$$\Delta h = - \frac{1}{K} (\operatorname{grad} K \cdot \operatorname{grad} h) \quad (\text{E. 57})$$

Ecuación de tipo Poisson similar a la obtenida para el potencial eléctrico. En el caso de que el medio sea homogéneo además, K puede considerarse como un campo escalar constante, por lo que su gradiente es nulo y queda definitivamente:

$$\Delta h = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace} \quad (\text{E. 58})$$

En caso de que el medio poroso dado sea homogéneo, pero anisótropo, la ecuación quedaría, respecto de un sistema cartesiano ortonormal de referencia con sus ejes en las direcciones principales del campo tensorial de permeabilidad, en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0$$

que puede reducirse a la de Laplace, según se vio en el apartado anterior (7).

2.1.4. Establecimiento de la analogía.

Como hemos visto en los dos apartados anteriores, las magnitudes escalares y vectoriales que intervienen en ambas teorías físicas (filtración en medios porosos y conducción eléctrica) están ligadas por las mismas ecuaciones, pudiendo establecerse una correspondencia biunívoca entre ellas dos a dos, una de cada uno de los sistemas. Para establecer la analogía se necesita además una correspondencia biunívoca entre cada dos puntos, uno de cada sistema, lo que requiere que exista una semejanza geométrica entre los medios soportes de ambos fenómenos (1). En resumen:

- a) Semejanza geométrica entre los medios

b) Magnitudes análogas correspondientes (13):

<i>Campo eléctrico:</i>	<i>Campo hidráulico:</i>
Potencial eléctrico: V	Potencial hidráulico: h
Densidad de corriente: j	Velocidad de filtración: $\vec{v}$
Intensidad de corriente: I	Caudal de filtración: q
Conductividad eléctrica: σ	Permeabilidad relativa: K

c) Ecuaciones que ligan magnitudes análogas:

Ley de Ohm: $\vec{j} = -\sigma \text{ grad } V$	Ley de Darcy: $\vec{v} = -K \text{ grad } h$
Ecuación de conducción: $\text{div} (-\sigma \text{ grad } V) = 0$ $\Delta V = 0$	Ecuación del flujo: $\text{div} (-K \text{ grad } h) = 0$ $\Delta h = 0$

En los problemas que suelen simularse mediante analogía reoeléctrica en medios continuos, el medio es homogéneo e isótropo, por lo que la ecuación que rige el fenómeno es la de Laplace. De acuerdo con este esquema, dos sistemas que tengan la misma forma geométrica, con análogas condiciones de contorno, están sometidos a las mismas ecuaciones, por lo que los resultados del problema en uno de los sistemas deberán estar relacionados con los correspondientes resultados del otro sistema, en función de los valores numéricos que correspondan a las condiciones de contorno utilizadas en cada uno de los campos; esto permite establecer una analogía entre las magnitudes correspondientes, mediante la cual se puede utilizar uno de los sistemas físicos involucrados en la misma para resolver problemas planteados en el otro sistema en el que directamente sería muy complicada su resolución. En esencia, éste es el fundamento de todas las técnicas de simulación analógica.

2.1.5. *Relaciones entre magnitudes análogas.*

En definitiva, un problema de filtración en medio poroso homogéneo e isótropo en régimen permanente se reduce a la obtención de una solución de la ecuación de Laplace, es decir, de un campo escalar armónico, el potencial hidráulico, que verifique unas determinadas condiciones de contorno. La solución matemática del problema es numérica (valor de la función armónica en cada punto), y sus valores dimensionales se determinarán de acuerdo con los valores numéricos y unidades utilizados en la imposición de las condiciones de contorno, independientemente de que el campo que se pretenda estudiar sea eléctrico o hidráulico.

La relación entre las magnitudes análogas se obtiene haciendo que las condiciones de contorno sean numéricamente iguales en ambos sistemas, o bien, dado que las ecuaciones que rigen el fenómeno son lineales, bastaría que fueran proporcionales, lo que en realidad equivaldría a realizar un cambio de unidades en uno de los sistemas.

Un método para obtener las relaciones que ligan las magnitudes análogas consiste en establecer a priori una serie de coeficientes que relacionen cada pareja de magnitudes análogas y determinar, con la ayuda de las ecuaciones que deben cumplir dichas magnitudes, las ecuaciones de compatibilidad que deberán verificar los coeficientes (2).

Más claro y de mejor significado físico, es el procedimiento de expresar las ecuaciones adimensionalmente en ambos problemas, quedando, por consiguiente, las ecuaciones independientes de las unidades utilizadas. El resultado numérico será, por tanto, igual para ambos problemas, en función de dichas variables adimensionales. Bastará igualar las expresiones adimensionales análogas para obtener la relación existente entre las variables de ambos sistemas (7).

En nuestro caso, la variable dominante es el potencial hidráulico. Una relación que lo ligue con el potencial eléctrico, su magnitud análoga, en función de una variable adimensional, es:

$$\frac{h}{H} = \frac{V}{V_{ii}} \quad (\text{E. 60})$$

siendo:

h = potencial hidráulico en un punto genérico.

H = diferencia de cota piezométrica entre dos puntos dados cualesquiera de las condiciones de contorno (datos conocidos; suele tomarse la carga hidráulica que origina el flujo).

V = potencial eléctrico en el punto análogo del anterior en el modelo analógico.

V_{ii} = diferencia de potencial eléctrico entre los puntos del contorno homólogos de los anteriores, que se aplica en el modelo, correspondiente a la H .

En esta relación no intervienen ninguna otra magnitud, por lo que la representación del campo escalar h (líneas equipotenciales) es exactamente la misma de V , debido a la proporcionalidad existente entre ambas magnitudes. Esto permite obtener directamente las líneas equipiezométricas del problema hidráulico sin más complicación, con lo que de hecho el problema queda resuelto desde el punto de vista teórico.

Normalmente interesa también conocer los caudales de infiltración que atraviesan determinadas superficies. Para ello, podría utilizarse la ley de Darcy aplicada a los tubos de flujo de la red de corriente. Ahora bien, para obtener una precisión aceptable con este procedimiento sería necesario trazar una red de corriente demasiado tupida, sobre todo si existen gradientes de potencial grandes en la zona donde se realiza la medición. Para resolver este problema utilizando la analogía reoelectrica basta obtener una nueva variable adimensional que relacione el caudal de filtración con otras magnitudes hidráulicas del problema.

En el campo hidráulico:

$$q = \bar{v} \cdot \bar{s} = (-K \text{ grad } h) \cdot \bar{s} \quad (\text{E. 61})$$

Dimensionalmente, sin discriminación de las magnitudes espaciales, resulta:

$$(q) = (K) (h) (L^{-1}) (S) = (K) (L) (h) \quad (\text{E. 62})$$

En el campo eléctrico la magnitud análoga es la intensidad de corriente eléctrica:

$$I = j \cdot s = \left(-\frac{1}{\rho} \text{ grad } V \right) \cdot \bar{s} \quad (\text{E. 63})$$

y dimensionalmente:

$$(I) = (\rho^{-1}) (V) (L) \quad (\text{E. 64})$$

Para obtener un parámetro adimensional del que forme parte el caudal, bastará dividir dicho caudal por el producto de una permeabilidad, un potencial hidráulico y una longitud. El parámetro adimensional eléctrico correspondiente es la intensidad que atraviesa la superficie análoga de la anterior dividida por el producto de la conductividad eléctrica del medio conductor, del potencial eléctrico análogo utilizado en el parámetro adimensional hidráulico y de la longitud del modelo análogo de la utilizada en el campo hidráulico. Es decir:

$$\frac{q}{K H L} = \frac{\rho I}{V_0 I} \quad (\text{E. 65})$$

siendo:

- q = caudal que atraviesa una determinada superficie "S" en el prototipo.
- I = intensidad que atraviesa la superficie "s" del modelo análoga de la anterior.
- L = longitud de referencia en el prototipo entre dos puntos cualesquiera.
- l = longitud medida en el modelo entre los puntos análogos de los dos señalados anteriormente.
- K = permeabilidad hidráulica del prototipo.
- ρ = resistividad del medio conductor del modelo, inversa de la conductividad.

De la igualdad anterior puede obtenerse:

$$q = \frac{\rho K H}{V_0} \left(\frac{L}{l} \right) I = C \cdot I \quad (\text{E. 66})$$

Es decir, basta medir en el modelo la intensidad que atraviesa la superficie de que se trate y multiplicarla por el coeficiente C definido por:

$$C = \frac{\rho K H}{V_0} \hat{L} \quad (\text{E. 67})$$

donde $\hat{L}$ es la escala geométrica lineal del prototipo al modelo (14).

En el caso de modelos bidimensionales, como veremos más adelante (25), todas las magnitudes se refieren a la unidad de espesor y no interviene la escala geométrica, ya que, en este caso:

$$(q) = (K) (h) (L^{-1}) (L) = (K) (h) \quad (\text{E. 68})$$

reduciéndose la igualdad de los parámetros adimensionales correspondientes a:

$$\frac{q}{K H} = \frac{\rho I}{V_0} \quad (\text{E. 69})$$

donde ρ es la resistividad por cuadrado del medio conductor utilizado en la analogía. Por consiguiente, en el caso de problemas bidimensionales no interviene la escala geométrica, lo que deja un grado de libertad más a la hora de determinar los parámetros que fijan la analogía, bastando con la semejanza geométrica.

(Continuará.)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. D. VITKOVITCH: "Field Analysis". D. van Nostrand. London, 1956.
2. W. KARPLUS: "Analog Simulation". McGraw Hill. New York, 1958.
3. L. MALAVARD y G. RENARD: "La technique des analogies rhéoelectriques. Techniques générales du laboratoire de physique", vol. 2. Centre National de la Recherche Scientifique. Paris 1962.
4. J. REITZ y F. MILFORD: "Fundamentos de la teoría electromagnética. Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana. México, 1972.
5. R. DE WIEST: "Geohydrology". John Wiley and Sons. New York, 1965.
6. H. DARCY: "Les fontaines publiques de la ville de Dijon". V. Dalmoth. Paris, 1856.
7. G. SCHNEEBELI: "Hydraulique souterraine". Eyrolles. Paris, 1966.
8. H. K. HUBBERT: "The theory of ground water motion". Jour. Geol., nov.-dic. 1940.
9. E. LINQUIST: "On the flow of water through porous soil". Primer Congreso de Grandes Presas Estocolmo, 1935.
10. G. SCHNEEBELI: "Expériences sur la limite de la validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration". La Houille Blanche, vol. 10, núm. 2, 1955.
11. S. DAVIS y R. DE WIEST: "Hidrogeología". Ediciones Ariel. Barcelona, 1971.
12. P. YA. POLUBARINOVA KOCHINA: "Theory of ground water movement". Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1962.
13. P. HUARD DE LA MARRE: "Resolution de problèmes d'infiltrations a surface libre au moyens d'analogies électriques". Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air. Paris, 1958.
14. G. RENARD: "Etude analogique du rabattement d'une nappe phreatique". Annales de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique, vol. XVI, núm. 3, julio 1974.
15. G. KIRCHHOFF: "Flow of an electric current through a plane, particularly through a circular disk". Ann. Phys. Chemie, vol. 64, 1845.
16. G. HOTCHKISS: "Electrosensitive Recording Papers for Facsimile Telegraphic Apparatus and Graphic Chart Instruments". Western Union Tech. Rev., vol. 2, 1948.
17. C. MATAIX PLANA: "Selección mediante analogía reoelectrica con papel Teledeltos de un tipo de refrigeración de álabes de turbina de gas". Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid, 1962.
18. P. HUARD DE LA MARRE: "Modèles analogiques électriques a trois dimensions pour l'étude des écoulements de filtrations a surface libre". La Houille Blanche, núm. A, 1956.
19. S. C. REDSSHAW: "A three dimensional electrical potential analyzer". Brit. J. Appl. Physic., volumen 2, 1951.
20. E. B. DAHLIN: "Equipotential plotting table". Rev. Sci. Intr., vol. 25, 1954.
21. L. MALAVARD: "On a new techniques for experimental investigation by means of rheoelectric analog". Recherches Aeronautiques, vol. 20. 1951.
22. A. GALINDO y L. ABELLANAS: "Métodos matemáticos de la Física", tomo I. Análisis complejo. Madrid, 1973.
23. W. C. ADAMS: "On the form of equipotential curves and surfaces and lines of electric forces", volumen 23. Proc. Roy. Soc. London, 1875.
24. E. R. HARTILL, J. G. MCQUENN y P. N. ROBSON: "A deep electrolytic tank for the solution of 2 and 3 dimensional field problems in engineering". Proc. Instr. Electr. Engrs. Paper 2179 M 104. Pt. A, 401, 1957.
25. A. S. ODEH, H. B. BRADLEY y J. P. HELLER: "Scale factor limitations in contenciometric model construction". Trans AIME, vol. 207, 1953.
26. J. MIROUX: "Utilization of square-wave signals in the technique of electrical analogues. Apparatus with large resistance for electrolytic tanks". Onde Elect., 38, 1951.
27. M. K. WESTON: "An improved probe assembly for use with an electrolytic tank". Metrop. Vickers Gaz, 1958.

28. J. C. BURFOOT: "Probe impedance in the electrolytic tank". Brit. J. Appl. Phys., vol. 6, 1955.
29. P. E. GREEN: "Automatic plotting of electrostatic field". Rev. Sci. Instr., vol. 19, 1948.
30. R. B. BURTT y J. WILLIS: "A high speed electronic analogue field mapper". J. Sci. Instr. volumen 34, 1957.
31. H. SCHMIDL: "The electrolytic tank with automatic plotting of equipotential lines". Elektrotechnik Masch Bau, 69, 1952.
32. P. A. EINSTEIN: "Factors limiting the accuracy of electrolytic plotting tanks". Brit. Journal Appl. Phys., vol. 2, 1951.
33. L. DADDA: "The electrolytic tank of the centre for the study of electrical analogues". Energía Eléct., 28, 1951.
34. Y. TANABE y S. YAMADA: "Electrolytic tank analogue design and the application of automatic control". Amer. J. Phys., 12, 1944.
35. D. L. HOLLWAY: "An electrolytic tank equipment for the determination of electron trajectories, potential and gradient". Proc. Instr. Elect. Engrs. Paper 1837 M 103, 1955.
36. K. F. SANDER y J. G. YATES: "A new form of electrolytic tank". Proc. Instr. Electr. Engrs., volumen 104, parte C, 1957.
37. V. E. BOGOLYUBOV y Y. M. SHAMAEV: "Electrolytic tanks having semiconducting walls". Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R., vol. 98, 1954.
38. V. E. BOGOLYUBOV y Y. M. SHAMAEV: "Electrolytic tank with walls causing minimum distortion". Elektrichstvo, núm. 10, 1954.
39. R. E. PEIERLS y T. H. R. SKYRME: "Tank model for problems of axial symmetry". Phil. Mag., 40, 1949.
40. L. DADDA: "Electrolytic models for the study of axially symmetrical harmonic field". Energía Electr., 30, 1953.
41. J. PLANA CLAVER: "Técnicas eléctricas de simulación analógica para problemas de infiltración de aguas". Tesis doctoral presentada en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid. Madrid, septiembre 1968.

