

CALCULO DE CIMENTACIONES CON LA CONSIDERACION DE LOS FENOMENOS VISCOELASTOPLASTICOS EN EL TERRENO Y EN LA ESTRUCTURA DE CIMENTACION (*)

Por LUIS FORT LOPEZ-TELLO
Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos

Se estudia en el artículo el comportamiento a lo largo del tiempo de un terreno, considerando los fenómenos viscoelásticos que se producen, sometido a las cargas que le transmite una estructura a través de su cimentación. Se propone un método para el dimensionamiento y el cálculo de esta cimentación, incluyendo al final un ejemplo numérico de aplicación. Este artículo es un extracto de la tesis doctoral del autor, galardonada con el premio Entrecanales Ibarra 1969.

I. Resumen.

Este trabajo tiene por objeto el estudio del comportamiento, a lo largo del tiempo, de un terreno sometido a las cargas que le transmite una estructura a través de su cimentación. A partir de él, se propone un método para el dimensionamiento y el cálculo de esta cimentación, teniendo en cuenta también la variación con el tiempo de las características del material de cimiento.

En algunas ocasiones, bien porque la organización interna de la estructura le permite aceptar asientos de alguna importancia, o bien porque éstos, debido a la naturaleza del suelo, sean pequeños, la ruina de la estructura no se produce hasta que sobreviene la fluencia plástica del terreno subyacente.

Al cargar la estructura puede ser que todo el terreno quede solicitado dentro del dominio elástico, pero con el paso del tiempo, y aun cuando el estado de cargas pueda considerarse

constante, debido a la constitución del suelo su estado tensional puede variar, al hacerlo su deformación, dando lugar a que ciertas zonas finitas del mismo sean solicitadas por encima de sus respectivos límites elásticos. Estas zonas, al evolucionar, pueden unirse unas a otras, y originar, cuando no puedan ser contenidas por zonas en estado elástico, la fluencia del terreno.

Aunque la deducción de las ecuaciones que rigen el comportamiento del macizo de tierras se hace en el caso general de tres dimensiones, las aplicaciones hechas en este estudio se han limitado al caso de deformación plana. El tipo de suelo considerado ha sido el de un macizo cohesivo, homogéneo e isótropo, teniendo en cuenta en él, además de su comportamiento viscoelástico, debido a su constitución trifásica (sólida, líquida y gaseosa), una pérdida de resistencia, característica sobre todo de las arcillas densas, si bien conviene señalar que esta circunstancia no limita el estudio realizado, pues todo el problema se analiza adimensionalmente, interviniendo únicamente la resistencia al esfuerzo cortante del suelo, en el momento de traducir a valores numéricos.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta revista hasta el 31 de marzo de 1978.

Como se deduce de los resultados del caso estudiado, el estado de cargas que produce la fluencia plástica del terreno al cabo de un tiempo T grande, aceptado como vida de la estructura, es considerablemente menor que el necesario para producirle inicialmente. Esto significa que el coeficiente de seguridad con el que se calcula una cimentación cuando este cálculo se realiza por métodos elásticos o elastoplásticos es mayor que el real, y que una mayor aproximación a éste se puede obtener si se hace intervenir el tiempo y se tienen en cuenta para el estudio tensional del macizo de cimiento, por una parte, las deformaciones elásticas a largo plazo y las debidas a fluencia viscosa, y por otra parte, la variación de su capacidad resistente con el tiempo.

Para el estudio del comportamiento del terreno se ha tenido que recurrir a la teoría de las diferencias finitas, sustituyendo el continuo indefinido por un modelo discreto con unas condiciones de borde y unas características que lo asimilen lo más posible a aquél.

El método de elementos finitos usado ha sido el de parámetros agrupados, puesto a punto por Ang y Harper en 1964. Los inconvenientes principales de este método son los de adaptarse con dificultad a contornos complicados y utilizar muchas posiciones de memoria en el cálculo con ordenador. Una gran ventaja, sin embargo, es la de asegurar, por la propia naturaleza del método, la convergencia hacia la solución real. El supuesto hecho por Ang y Harper, de ser un proceso de carga casi estático, queda cumplido también, cuando se hace intervenir el tiempo, si se logra sustituir en las relaciones tensión-deformación, que rigen el comportamiento del suelo, la influencia que en las deformaciones tienen las tensiones anteriores al instante " t " estudiado, por un factor, variable con " t ", pero fijo para un " t " dado, que afecte a las tensiones existentes en ese instante.

Una vez determinado el estado de cargas que provoca la fluencia plástica del terreno (lograda por sucesivos incrementos de carga) se estudia la cimentación, sometida a este estado de cargas aplicando la teoría de fluencia con los estudios realizados por Aroutiounian, estableciendo las relaciones tensión-deformación tanto en el hormigón como en el acero. Finalmente se procede al dimensionado del cimiento por cálculo en rotura.

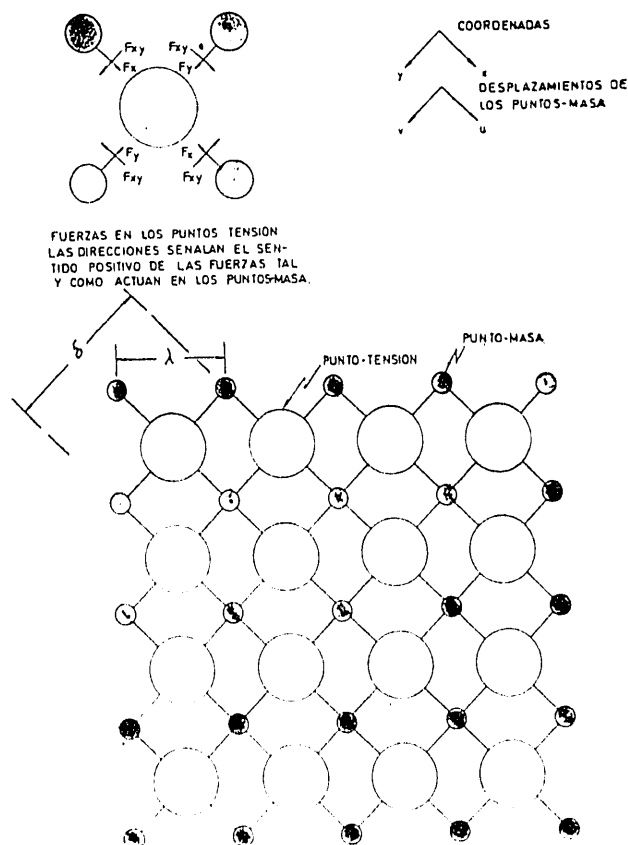


Fig. 1.—Modelo discreto para el sólido continuo.

II. Hipótesis admitidas en el suelo y deducción de sus relaciones constitutivas.

El terreno se asimila en este estudio a un sólido perfectamente viscoelastoplástico. Los elementos básicos para la definición de un sólido de este tipo pueden resumirse en los puntos siguientes:

1. Una relación tensión-deformación en el dominio viscoelástico, es decir, válida hasta el punto de rotura por fluencia plástica.
2. Un criterio de rotura, para definir el comienzo de dicha fluencia.
3. Una relación tensión-deformación, válida en el dominio plástico.
4. Relación tensión-deformación, para nuevos procesos de carga y descarga.

Se estudian a continuación los tres primeros puntos, admitiéndose en el cuarto que en el modelo estudiado se produce una plastificación continuada, en la que no pueden producirse descargas.

1. Dominio viscoelástico.

De acuerdo con los profesores Goldstein, Lapidus y Misumsky, se considera la deformación de un suelo arcilloso como suma de tres componentes de diferente naturaleza física: deformación elástica instantánea, deformación viscoelástica diferida y deformación irreversible de fluencia viscosa:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_{x'm} + \varepsilon_{x'e} + \varepsilon_{x'v} \quad (1)$$

Investigaciones llevadas a cabo por estos autores con arcillas margosas terciarias y arcillas negras del Jurásico, de consistencia densa o semidensa, han demostrado que los cambios de volumen en muestras arcillosas bajo compresión hidrostática son siempre completamente reversibles, y los fenómenos de fluencia de volumen no se presentan. Se observan siempre fenómenos de histéresis elástica cuando la carga y descarga se hacen bajo condiciones hidrostáticas. Por ello el cambio de volumen es proporcional al valor de la presión hidrostática:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{K} \quad (2)$$

(K = Módulo volumétrico).

Las deformaciones de fluencia, debidas al desviador de tensiones, no son acompañadas por cambios de volumen.

La relación entre las deformaciones elásticas instantáneas y las tensiones puede ser obtenida en un ensayo de descarga rápida, midiendo la deformación elástica recuperada. Esta relación de tipo no lineal puede ser escrita como sigue:

$$(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_v)_m = \frac{\sigma_{x'} - \sigma_v}{2 G_m(\sigma_i)} \quad (3)$$

donde:

$$G_m(\sigma_i) = G_0(1 - a\sigma_i)$$

G_0 = módulo instantáneo de deformación tangencial.

σ_i = intensidad de las tensiones o tensión tangencial octaédrica.

$$\sigma_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Así recogen Goldstein y sus colaboradores las tendencias de Stroganov y Vyalov. En este trabajo, sin embargo, se prescinde de la influencia de σ_v , tanto en los coeficientes elásticos como en los de viscosidad, como después se dice, con lo cual la expresión (3) queda:

$$(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_v)_m = \frac{\sigma_{x'} - \sigma_v}{2 G_0} \quad (4)$$

El módulo de Poisson también es función lineal de σ_i :

$$\nu_m(\sigma_i) = \nu_0(1 + b\sigma_i)$$

pero su variación es muy pequeña (de 0,30 a 0,40), por lo que puede considerarse constante y adoptar un valor medio.

Los resultados de estas investigaciones han demostrado también que la deformación elástica diferida en suelos arcillosos depende linealmente de las componentes del desviador de tensiones en todo instante:

$$\varepsilon_{x'e} = \frac{\sigma_{x'} - \sigma_v}{2 G_e} (1 - e^{-\beta t^{1-\alpha}})$$

donde:

G_e = módulo de deformación tangencial diferida.

β = factor de amortiguamiento.

α = parámetro cuya magnitud probablemente tiene un carácter universal sea cual sea el material considerado. Como término medio para arcillas, puede aceptarse $\alpha = 0,75$.

Finalmente, la relación entre la velocidad de las deformaciones de fluencia viscosa y las componentes del desviador de tensiones puede representarse aproximadamente por la ecuación:

$$\varepsilon_{x'v} = \frac{\sigma_{x'} - \sigma_v}{2 \eta(\sigma_i)}$$

y según lo indicado antes:

$$\varepsilon_{x'v} = \frac{\sigma_{x'} - \sigma_v}{2 \eta} \quad (6, a)$$

donde:

η = coeficiente de viscosidad, que puede depender del tiempo de actuación de la carga, pero se prescinde de la influencia de la intensidad de esa carga.

El valor de las deformaciones de fluencia viscosa es proporcional al tiempo de aplicación de la carga, es decir:

$$\varepsilon_{xv} = \dot{\varepsilon}_{xv} t \quad (6, b)$$

De acuerdo con la teoría de la superposición de Boltzman y lo dicho antes respecto a las deformaciones elásticas, la deformación total en el instante t será:

$$\varepsilon_{xv}(t) = \frac{\sigma_{xx}(t)}{K} + \frac{\sigma_{xv}(t) - \sigma_{xx}(t)}{2 G_0} + \frac{\beta(1-\alpha)}{2 G_e} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} e^{-\beta(t-\xi)^{1-\alpha}} [\sigma_{xv}(\xi) - \sigma_{xx}(\xi)] d\xi + \int_0^t \frac{\sigma_{xv}(\xi) - \sigma_{xx}(\xi)}{2 \eta} d\xi \quad (7)$$

(x, y, z)

y procediendo análogamente:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_0} + \frac{\beta(1-\alpha)}{G_e} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} e^{-\beta(t-\xi)^{1-\alpha}} \tau_{xy}(\xi) d\xi + \int_0^t \frac{\tau_{xy}(\xi)}{2 \eta} d\xi \quad (8)$$

(x, y, z)

Para poder integrar estas ecuaciones se recurre al problema elástico instantáneo. Consideramos éste como el relativo al estado de tensiones de un cuerpo perfectamente elástico, bajo el efecto de las mismas fuerzas exteriores y másicas (si se consideran), considerando la acción como estática, es decir, tomando el tiempo como parámetro.

A continuación se designan por σ^* , τ^* , ε^* y γ^* las tensiones y deformaciones del cuerpo en el problema viscoelástico y por σ , τ , ε y γ las correspondientes del problema elástico instantáneo.

Estableciendo una relación entre las ecuaciones de compatibilidad del problema elástico instantáneo y las del problema viscoelástico, y tomando previamente en cuenta las condiciones de equilibrio ordinarias y en la superficie del cuerpo, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^*(t) &= \sigma_{xx}(t) - \frac{E}{E_e} \int_0^t \sigma_{xx}^*(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \delta_1(t, \xi) d\xi \\ \tau_{xy}^*(t) &= \tau_{xy}(t) - \frac{E}{E_e} \int_0^t \tau_{xy}^*(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \delta_1(t, \xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(x, y, z)

Las (9) constituyen un sistema de ecuacio-

nes integrales de Volterra de segunda especie con el núcleo

$$K(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \delta_1(t, \xi)$$

para cuya solución se aplica la transformación de Laplace.

Esta, después de algunas simplificaciones, puede expresarse así:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^*(t) &= \sigma_{xx} \frac{1}{1 + \frac{E}{E_e} \left[\Gamma(1/4) \frac{\beta^{3/4}}{4} t^{3/16} + 4 \frac{2 G_e}{2 \eta_0} t^{1/4} \right]} \\ \tau_{xy}^*(t) &= \tau_{xy} \frac{1}{1 + \frac{E}{E_e} \left[\Gamma(1/4) \frac{\beta^{3/4}}{4} t^{3/16} + 4 \frac{2 G_e}{2 \eta_0} t^{1/4} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Sustituyendo las (10) en las (7) y (8) volviendo a deshacer el cambio y resolviendo para las tensiones, se obtienen las siguientes relaciones, que definen el comportamiento del cuerpo sólido viscoelástico para un problema de deformación plano y una carga exterior constante, que pueden ser aceptadas para representar el comportamiento de un suelo ideal:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(t) &= \frac{\varepsilon_x(t) \left\{ F(t) + \frac{1+\nu}{3} \left[\frac{1}{K} - F(t) \right] \right\} - \varepsilon_y(t) \left\{ \frac{1+\nu}{3} \left[\frac{1}{K} - F(t) \right] \right\}}{F(t) \left\{ F(t) + \frac{2(1+\nu)}{3} \left[\frac{1}{K} - F(t) \right] \right\}} \\
\sigma_y(t) &= \frac{\varepsilon_y(t) \left\{ F(t) + \frac{1+\nu}{3} \left[\frac{1}{K} - F(t) \right] \right\} - \varepsilon_x(t) \left\{ \frac{1+\nu}{3} \left[\frac{1}{K} - F(t) \right] \right\}}{F(t) \left\{ F(t) + \frac{2(1+\nu)}{3} \left[\frac{1}{K} - F(t) \right] \right\}} \\
\tau_{xy}(t) &= \frac{\gamma_{xy}(t)}{2F(t)} \\
\sigma_z(t) &= \nu [\sigma_x(t) + \sigma_y(t)] \quad \tau_{xz}(t) = \tau_{yz}(t) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(t) &= \frac{1}{2G_0} + \left\{ 1 + \frac{E}{E_c} \left[\Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\beta^{3/4}}{4} t^{3/16} + 4 \frac{2G_c}{2\eta_0} t^{1/4} \right] \right\} \int_0^t \frac{3(1-\alpha)}{2G_c} (t-\xi)^{-\alpha} e^{-\beta(t-\xi)^{1-\alpha}} + \frac{1}{2\eta_0} (t-\xi)^{-3/4} d\xi \\
&\quad \left\{ 1 + \frac{E}{E_c} \left[\Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\beta^{3/4}}{4} \xi^{3/16} + 4 \frac{2G_c}{2\eta_0} \xi^{1/4} \right] \right\} d\xi \tag{12}
\end{aligned}$$

En estas fórmulas y en adelante se prescinde del asterisco.)

2. Criterio de plastificación.

El criterio adoptado es el de Mises-Hencky con $\nu = \frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = \tau^2 \tag{13}$$

Como en el problema estudiado influye el tiempo, se propone para τ , según Vyalov y Skibitsky, una ley que recoja la pérdida de resistencia al esfuerzo cortante que muestran los suelos arcillosos, según el tiempo de actuación de la carga:

$$\frac{\tau^*}{\tau} = \log_e \frac{t}{t^*} \tag{14}$$

donde τ^* y t^* son parámetros.

La última resistencia continuada del suelo corresponde a un tiempo t_n suficientemente largo, para que después de éste la pérdida de resistencia sea tan pequeña que puede ser des-

preciada. Para cualquier estructura que se proyecte, su "vida" es lo bastante grande para que deba considerarse en el terreno de cimentación su última resistencia. Esta vendrá dada, pues, por:

$$\tau_T = \frac{\tau^*}{\log_e \frac{T}{t^*}} \simeq \frac{\tau^*}{\log_e \frac{t_n}{t^*}} = \tau_\infty$$

τ^* y t^* pueden determinarse a partir de ensayos, midiendo τ para varios valores de t .

3. Dominio plástico.

Aceptando la teoría de Prandtl-Reuss, y ampliándola del cuerpo perfectamente elastoplástico al viscoelastoplástico, se llega al establecimiento de las relaciones tensión-deformación en el dominio plástico.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_x &= A \Delta \varepsilon_x + B \Delta \varepsilon_y - C \Delta \gamma_{xy} \\ \Delta \sigma_y &= B \Delta \varepsilon_x + A \Delta \varepsilon_y + C \Delta \gamma_{xy} \\ \Delta \tau_{xy} &= -C \Delta \varepsilon_x + C \Delta \varepsilon_y + D \Delta \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Siendo:

$$A = \frac{1}{F(t)} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2(1+\nu)}{3} \left[\frac{1}{KF(t)} - 1 \right]} + \frac{1+\nu}{3} \left[\frac{1}{KF(t)} - 1 \right] \right\} \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2$$

$$+ \frac{2(1+\nu)}{3} \left[\frac{1}{KF(t)} - 1 \right] \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2$$

$$B = \frac{1}{F(t)} \left\{ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \frac{1}{2\tau^2} - \frac{1+\nu}{3} \left[\frac{1}{KF(t)} - 1 \right]^3 - \frac{2(1+\nu)}{3} \left[\frac{1}{KF(t)} - 1 \right] \right\}$$

$$C = \frac{1}{F(t)} \frac{\tau_{x,y} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)}{2\tau^2}$$

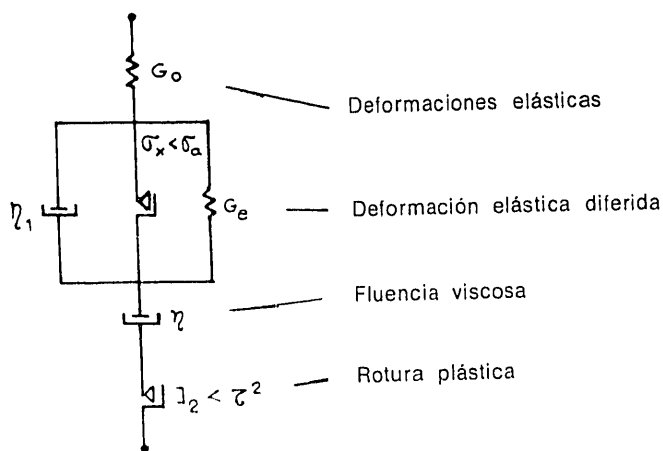
$$D = \frac{1}{F(t)} \frac{\tau^2 - \tau_{x,y}^2}{2\tau^2}$$

Los coeficientes A , B , C y D variarán no sólo con el tiempo, sino también con el estado tensional, pues contienen las tensiones al principio del incremento de flujo plástico que se considere.

III. Propuesta de modelo reológico para el comportamiento de las arcillas.

El modelo reológico presentado por Goldstein se adapta, deformándole ligeramente, con objeto de reflejar el comienzo de la rotura plástica, lo que se logra con la introducción del se-

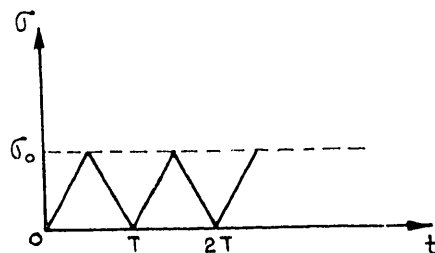
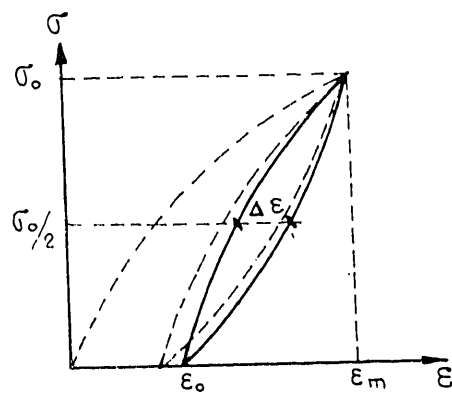
gundo patín, dispuesto en serie con el amortiguador que simula el elemento viscoso.



Modelo reológico para representar el comportamiento de suelo arcilloso.

IV. Determinación de los parámetros que intervienen en las ecuaciones reológicas antes deducidas.

Según Pierrard, en ensayos de fluencia realizados sobre muestras de arcilla y gres arcilloso, consistentes en someter a la muestra a ciclos de carga desviadora, variando linealmente con el tiempo de período fijado T , el material, al cabo de un número de ciclos más o



menos importantes, sigue un ciclo límite de deformaciones:

$$E_c = \frac{\sigma_{01}}{\epsilon_{01} + \epsilon_m}$$

$$t_1 = \frac{T}{4x}$$

$$t_0 = t_1 - \frac{\epsilon_{01} T}{2(\epsilon_{01} + \epsilon_m) t h x}$$

$$x = \operatorname{Argch} \frac{4 + (\Delta \epsilon / \epsilon_{01})^2}{4 - (\Delta \epsilon / \epsilon_{01})^2}$$

$$E_0 = E \frac{t_1}{t_0}$$

t_1 = tiempo en el cual se estabiliza el ciclo.

t_0 = tiempo en el que se alcanza la tensión σ_{01} .

Utilizando la medida de la deformación inicial ϵ_{01} de este ciclo límite, la medida de la deformación ϵ_m correspondiente a la tensión máxima σ_{01} , y la medida de amplitud del ciclo para la semitensión $\sigma_{01}/2$ se pueden deducir los valores de módulo de elasticidad a largo plazo E_c (velocidad de deformación nula) y el instantáneo E_0 , con las fórmulas dadas junto al dibujo.

Se tienen así hallados los valores E_0 y E_c , y, por tanto, los de G_0 y G_c .

Para α , Goldstein, Lapidus y Misumsky dan el valor $\alpha = 3/4$.

El factor de amortiguamiento β puede obtenerse a partir de ensayos de fluencia bajo tensión desviadora constante unidos a ensayos de carga desviadora, en los que se dibujan las curvas tensión-deformación para varios días. Para tener las deformaciones elásticas diferidas habrá que restar las instantáneas, que se pueden haber obtenido previamente en ensayos de descarga rápida.

En cuanto al coeficiente de viscosidad, ya se ha indicado una ley que tiene en cuenta su variación según el tiempo de carga y que debe reformarse según el tipo de suelo considerado. Para determinar el coeficiente de viscosidad inicial habrá que realizar también un ensayo de fluencia y sobre la curva de fluencia, en términos de velocidad de deslizamiento-tensión cortante, trazar la tangente inicial (ver *Determi-*

nation of the Rheological Parameter and the Hardening Coefficients of Clays, Tan Tjong Kie), y la cotangente del ángulo que forma con el eje de las τ dará el coeficiente de viscosidad inicial η_0 .

V. Aplicación a un problema de cimentación.

1. Condiciones de borde.

Para un problema de cimentación directa, por ejemplo, una losa flotante, se podría considerar el modelo limitado por un estrato firme inferior, la superficie libre del terreno (cargada parcialmente en la zona de cimentación), el eje de simetría y un borde suficientemente alejado para que el modelo pudiera representar un semiespacio indefinido.

Las condiciones en estos bordes serían, pues:

a) *Borde inferior*.—Desplazamiento de todos los puntos masa cero.

b) *Eje de simetría*.—Desplazamientos horizontales nulos; sólo hay desplazamientos verticales en los puntos situados en él.

c) *Borde izquierdo*.—Desplazamientos horizontales nulos. Los verticales, iguales a los de los puntos masa inmediatamente próximos.

d) *Borde superior*.—Para hallar los desplazamientos de los puntos masa de este borde se asimila el terreno subyacente mediante un modelo a un cuerpo viscoelástico. Para ello se adopta el concepto de cimentación Pasternak, extendida al caso de deformaciones viscoelásticas. Pasternak trató el problema suponiendo la existencia de interacciones tangenciales entre los elementos del resorte que quiere representar la parte elástica del terreno. Para tener en cuenta la respuesta viscosa del cimientado se acepta la ley de Newton, que se aplica a los elementos viscosos del modelo que simulan el comportamiento viscoso del suelo.

El modelo podría representarse como se indica en la figura 2, y como en ella se ve el medio semiinfinito investigado, se sustituye por un "colchón" de espesor unidad, consistente en elementos verticales incompresibles, que se deforma solamente por esfuerzos cortantes transmitidos a través de los resortes y que reposa sobre unos elementos viscosos cerrados.

La deflexión o asiento total se puede descomponer, por tanto, en dos partes: una elástica, que se produce inmediatamente después

de la aplicación de la carga, y otra viscosa, debida a la fluencia del material:

$$w_t = w_{\text{elástica}} + w_{\text{viscosa}} \quad (16)$$

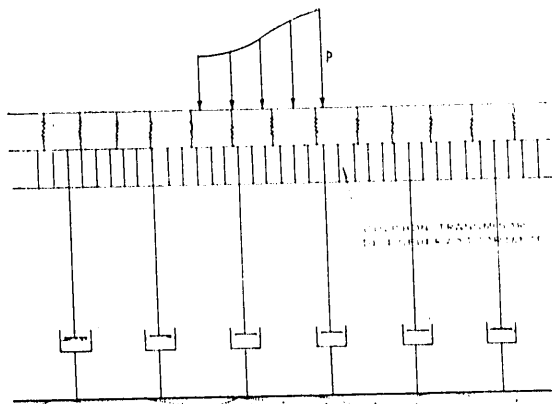
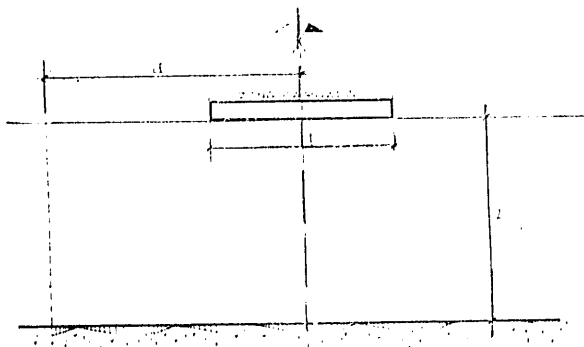


Figura 2.

La $w_{\text{elástica}}$ puede obtenerse por los procedimientos usuales, admitiendo, por ejemplo, un coeficiente de balasto.

La ecuación:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta - \lambda^{*2}) w = 0 \quad (17)$$

es la ecuación diferencial que da los desplazamientos verticales de fluencia viscosa de la superficie del cemento.

$$\lambda^{*2} = \frac{\eta^*}{\mu^*} \quad (18)$$

La determinación de las constantes μ^* y η^* se puede hacer, según indica Kerr, a partir de un ensayo con una placa circular rígida.

2. Aplicación de la teoría de fluencia en el cálculo del cemento.

Siguiendo la teoría de fluencia, desarrollada por Aroutiounian, las tensiones en acero y hormigón, teniendo en cuenta la fluencia y la variación del módulo de deformación instantáneo de éste vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{bn}^* &= \sigma_b \left\{ 1 - \frac{\left[\gamma \mu n_0 E_a \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) e^{r \tau_1} \tau_1^p \right]}{2 r l^2 p} [\phi(r t, p) - \phi(r \tau_1, p)] \left[\frac{1}{1 + \mu n_0} + \frac{1}{1 + \mu n_0 n(\tau_1)} \right] \right\} \\ \sigma_{an}^* &= \sigma'_c \left\{ 1 + \frac{\left[E_a \gamma \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) e^{r \tau_1} \tau_1^p \right]}{2 r l^2 p n(\tau_1)} [\phi(r t, p) - \phi(r \tau_1, p)] \left[\frac{1}{1 + \mu n_0} + \frac{1}{1 + \mu n_0 n(\tau_1)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

siendo τ_1 = veintiocho días y σ_b y σ'_c las tensiones de agotamiento de hormigón y acero a esos veintiocho días.

$$n_0 = \frac{l}{l_0} = 1 + \frac{B h_1^2}{l_0}$$

$$\mu = \frac{A'}{B}$$

$$r = \gamma \left[1 + \frac{\mu E_a C_0 n_0}{1 + \mu n(\tau_1) n_0} \right]$$

A' = Sección de armaduras a tracción.

B = Sección de hormigón.

I_0 = Momento de la inercia de la sección de hormigón con relación al c.d.g.

h_1 = Distancia del c.d.g. de la sección al de la armadura en tracción.

γ = Parámetro que define la amortiguación de la intensidad de fluencia.

C_0 = Valor límite de la intensidad de fluencia para el material.

$$\rho = \frac{\mu \gamma E_a A_1 n_0}{1 + \mu n(\tau_1) n_0}$$

$$\phi(r, t, p) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau$$

A_1 = Parámetro que define la intensidad de fluencia.

$$n(\tau_1) = \frac{E_a}{E(\tau_1)}$$

$E(\tau_1)$ = Módulo de elasticidad del hormigón en el instante $t = \tau_1$ de aplicación de la fuerza exterior.

E_a = Módulo de elasticidad del acero.

Con estos valores de tensión de agotamiento en hormigón y acero se entraría en las fórmulas para dimensionamiento por algún método en rotura.

VI. Ejemplo numérico.

Se ha aplicado el método antes expuesto al análisis de una losa con dos cargas continuas (para poder considerar un estado de deformación plana), simétricamente dispuestas con respecto al eje de la losa.

Las características supuestas al suelo y al cimiento se resumen a continuación (han sido tomadas de los ensayos realizados por Goldstein, Pierrard, Tan Tjong-Kie y Kerr sobre muestras arcillosas).

Suelo:

$$E_0 = 1.990 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_c = 1.190 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\alpha = 0,75$$

$$\beta = 0,0622 \text{ (l/días)}$$

$$2 \eta_{11} = 0,191 \cdot 10^5 \text{ Kg días/cm}^2$$

$$H = 1.000 \text{ cm}$$

$$t = 200 \text{ años} = 72.000 \text{ días}$$

$$K_0 = 3 \text{ Kg/cm}^3$$

$$\eta^* = \frac{0,191 \times 10^5 \times 72.000^{3/4}}{10^3} \text{ Kg/días/cm}^3$$

$$\mu^* = 0,096 \times 10^5 \times 10^3 \times 72.000^{3/4} \text{ Kg días/cm}$$

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{\eta^*}{\mu^*} \left[\frac{1}{L} \right]} = \sqrt[3]{2} \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

$$\tau = 1 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (última resistencia a esfuerzo cortante)}$$

$$\tau_0 = 1,97 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (resistencia inicial, a cargas instantáneas)}$$

Cimiento:

Material = Hormigón.

$$E_0 = 2 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 100 \text{ cm}$$

$$h = 150 \text{ cm}$$

$$\text{Ancho} = 8 \text{ m}$$

Cargas a 2 m de los bordes, que transmiten una carga P por metro lineal.

Modelo:

Se sustituye el suelo por el modelo de Ang y Harper, con dimensiones de la malla de 29×10 , en la cual la zona cargada por la losa abarca desde el punto masa 1,11 al 1,19, suponiendo las cargas puntuales sobre los puntos masa 1,13 y 1,17. El lado de la malla λ se ha tomado igual a 100 cm.

Los cálculos, realizados con un ordenador IBM 360, se han efectuado para dos instantes, el $t = 0$, es decir, en el momento inicial de aplicar las cargas, y en el $t =$ doscientos años, admitiéndolo como vida de la estructura.

Los resultados perseguidos eran determinar el valor de las cargas P , que producen la fluencia plástica del suelo, en el instante cero y en el instante doscientos años.

Resultados.

El comienzo de la plastificación del terreno se produce para $P = 137 \text{ Tm/ml}$ y la fluencia libre del mismo para una carga $P = 186 \text{ Tm/ml}$, instantáneamente.

Bajo carga continuada, al cabo de doscientos años, la plastificación comienza para una carga $P = 50,7 \text{ Tm/ml}$ y la fluencia libre ocurre para $P = 58,4 \text{ Tm/ml}$.

Esto, solamente en cuanto al terreno, supone una reducción en la carga que produce el colapso del mismo de $\left(\frac{58,4}{186} = 0,32\right)$ un 68 por 100, al tener en cuenta el efecto del tiempo, si bien es verdad que al traducir el valor de la carga se ha contado con una resistencia del suelo de 1 Kg/cm^2 en vez de $1,97 \text{ Kg/cm}^2$ que se ha aplicado para el instante $t = 0$, debido a la pérdida de resistencia, característica sobre todo de arcillas densas y suelos sometidos a procesos de heladas. Si se hubiera considerado la misma resistencia al corte, la carga que hubiese producido el colapso a los doscientos años hubiera sido de $P = 58,4 \times 1,97 = 115 \text{ Tm/ml}$. esto es, un $\left(\frac{71}{186} = 0,38\right)$ 38 por 100 menor.

Al proceder al cálculo del cimiento, el tiempo tiene también una influencia decisiva, pues armando la losa en cada caso para la carga que produce el colapso, esto es, para $P = 186 \text{ Tm/ml}$ en el cálculo elastoplástico y $P = 58,4$ cuando se tiene en cuenta la teoría de fluencia, las cuantías respectivas son aproximadamente 32 Kg/m^3 y 45 Kg/m^3 de acero ordinario.

VII. Conclusión.

De todo lo anterior quiere ponerse de manifiesto la importancia que tiene el tiempo de actuación de las cargas, en la forma de comportarse los diversos materiales de construcción, incluidos entre ellos, naturalmente, el terreno que recibe las cargas que le transmiten todos los demás.

El coeficiente de seguridad, en cuanto a la capacidad portante del suelo, puede ser muy diferente al estimado, llegando incluso a desaparecer; los asientos a largo plazo del cimiento pueden alterar la ley de cargas sobre el mismo, pudiendo aumentar e incluso invertir los esfuerzos elásticamente calculados (el caso aquí estudiado era muy sencillo en cuanto a cargas, pero en otros casos parece evidente que puede ser cierto), siendo este uno de los motivos de fallo del cimiento, sin fallo del terreno. Por ello, se ha pretendido en este trabajo considerar el conjunto cimiento-terreno, camino en el que creemos debían orientarse los estudios siguientes que en esta línea de cálculo por diferencias finitas pueden tener un gran éxito, al permitir incluir en su estudio tanto la reología del suelo como la de los materiales del cimiento.