

# ESTUDIO DE LOS CAUDALES DRENADOS E INFILTRADOS POR REDES PLANAS DE DRENES VERTICALES COMPLETOS BAJO MACIZOS IMPERMEABLES, MEDIANTE ANALOGIA REOELECTRICA EN MEDIOS CONTINUOS Y ANALISIS MATEMATICO DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES (\*) (\*\*)

## 1. FISICO-MATEMATICA. POSIBILIDADES Y LIMITACIONES

Por FRANCISCO GONZALEZ DE POSADA

Prof. Adj. Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.  
Licenciado en Ciencias Físicas y Ciencias Sociales.

JOAQUIN CRUCES DE ABIA

Prof. Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Cátedra de Fundamentos Físicos de las Técnicas. E.T.S.  
de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, de Madrid.

*Se estudia el efecto de redes planas de drenes verticales completos bajo macizos impermeables sobre el flujo subterráneo, con un planteamiento que permite aislar una "rebajada" de macizo con un solo dren.*

*En este primer artículo se define matemáticamente el problema armónico con sus condiciones de contorno y se describen las posibilidades y limitaciones de la aplicación de la teoría de funciones analíticas de variable compleja.*

### 0. INTRODUCCION

En la mayoría de las obras hidráulicas, la cimentación suele quedar bajo el nivel piezométrico de agua subterránea en el terreno, y, por consiguiente, sometida a subpresiones. Por otra parte, la construcción de dicha cimentación bajo nivel freático recomienda un saneamiento previo de la zona con el rebajamiento de dicho nivel freático. Asimismo, en muchas obras hidráulicas terminadas sigue existiendo un flujo de agua subterránea bajo la obra que da lugar a subpresiones en su base. El caudal circulante será función de la permeabilidad; no así las subpresiones, que sólo dependerán de la anisotropía y de la configuración del terreno, pero no de los valores absolutos de las componentes del campo sensorial permeabilidad. Esto hace que en los estudios de subpresiones y de redes de drenaje diseñadas para la disminución y control de aquéllas se haya puesto fundamentalmente la atención en sus efectos tensoriales, no preocupando en general la cuantía de los caudales evacuados por la red de drenaje.

La conciencia de la limitación de los recursos hidráulicos y su aprovechamiento cada vez más exhaustivo, ha hecho que recientemente comiencen a valorarse

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta revista hasta el 31 de diciembre de 1976.

(\*\*) Básicamente, este conjunto de artículos forma parte de la tesis doctoral del profesor Joaquín Cruces de Abia, dirigida por el profesor Francisco González de Posada, titulada "Estudio de redes de drenes verticales mediante analogía reoelectrónica en medios continuos y análisis matemático de los resultados experimentales". Fue calificada con sobresaliente *cum laude* en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, de Madrid, el día 17 de noviembre de 1975. La parte experimental ha sido realizada en el Laboratorio de Fundamentos Físicos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, de Madrid.

los caudales de infiltración, tratándose de evitar cualquier pérdida o infrautilización de los mismos, o al menos tener en cuenta dicha pérdida en el estudio económico que decidirá la solución a adoptar en la obra hidráulica en cuestión. En otros casos, la necesidad de mantener durante largos períodos de tiempo un determinado control de subpresiones mediante sistemas drenantes que incluyen maquinaria especial (bombas, válvulas, conducciones, etc.) exige un conocimiento lo más aquilatado posible de dichos caudales, a fin de poder dimensionar la instalación necesaria. (Caso, por ejemplo, de un dique seco en vacío.)

Interesa, pues, conocer más a fondo las leyes que rigen el flujo de fluidos a través de medios porosos, así como los resultados de sus aplicaciones a problemas concretos de utilización frecuente, como es el de redes de drenaje. El presente estudio pretende contribuir a la solución de estos problemas desde el punto de vista de los caudales drenados e infiltrados.

Dadas las limitaciones que presenta la aplicación directa de las leyes que gobiernan el flujo con un tratamiento matemático a casos incluso relativamente sencillos, cada vez cobran mayor importancia las técnicas basadas en la simulación en cualquiera de sus tres grandes vertientes: matemática, analógica o de modelos reducidos.

La simulación analógica presenta ventajas considerables en los estudios de este tipo de problemas de hidráulica subterránea. Ello ha constituido un medio eficaz de trabajo experimental, cuyos resultados sometidos posteriormente a un intenso tratamiento matemático han permitido obtener unas conclusiones y unas fórmulas de apreciable interés.

### **1.1. El problema planteado.**

El objeto del presente trabajo es estudiar el efecto de redes planas de drenes verticales completos sobre el flujo de agua subterránea que tiene lugar bajo macizos impermeables a través de un terreno permeable cuando existe una diferencia de potencial hidráulico entre ambos lados del macizo impermeable.

Las redes que se estudian se consideran de longitud infinita con objeto de poder establecer una simetría que permita estudiar el efecto de cada dren aislado con el fin de realizar un estudio teórico complementario del problema que facilite la aplicación de los resultados obtenidos con casi total generalidad; es decir, siempre que la longitud de la red drenante sea suficientemente grande respecto de las magnitudes transversales del terreno permeable al que se aplique salvo en los extremos, donde será preciso en cada caso estudiar su influencia según las condiciones particulares de los mismos (bordes impermeables, permeables, de nivel constante, etc.).

Basado en esta condición de simetría se estudia intensa y completamente el comportamiento de una "rebanada" de terreno transversal a la red de drenaje (considerada como elemento lineal) que comprende un módulo completo, ya que por simetría, el flujo será idéntico en todas las rebanadas y los planos de separación actuarían como contornos impermeables.

Un esquema inicial de la "rebanada", objeto de estudio y experimentación, se representa en la figura 1:

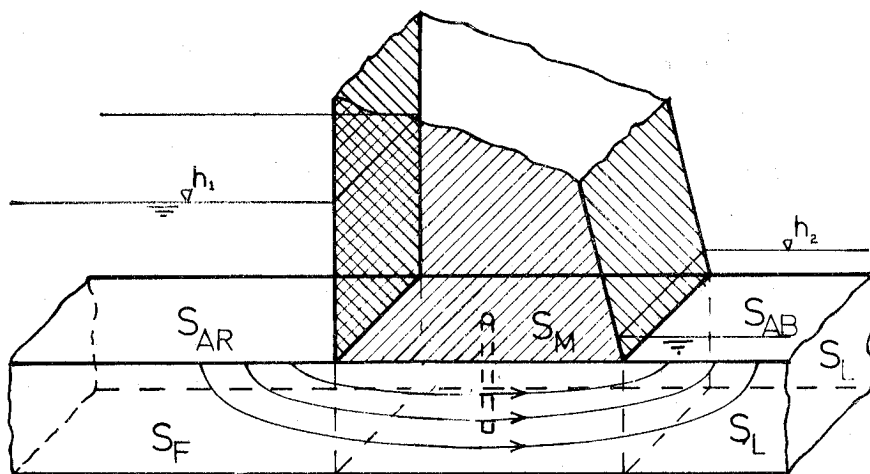


Figura 1.

En ella se esquematiza el flujo de agua a través de un paralelepípedo rectangular de longitud infinita que incluye en su parte central el terreno permeable situado bajo el macizo impermeable con la red de drenaje, cuya influencia se pretende estudiar.

Estas redes de drenaje son normalmente de utilización continuada, por lo que su estudio se realiza en régimen permanente. La ecuación general del movimiento de un fluido incompresible a través de materiales porosos, deducida de la ley de Darcy y del teorema de la continuidad (1), tiene la forma:

$$\Delta h = 0 \quad (\text{E. 1})$$

basada en las siguientes hipótesis: medio poroso homogéneo e isótropo, fluido incompresible y cuyas características físico-químicas no varíen con el tiempo, sistema mecánica y químicamente estable (no deben existir procesos de disolución, sedimentación, etc.) y régimen permanente; es decir,  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ .

En estas condiciones, la distribución de potencial hidráulico,  $h$ , constituye una solución de la ecuación de Laplace; es decir, es un campo escalar armónico que queda determinado conociendo sus valores, o bien los de sus derivadas según la normal, a lo largo del contorno de la región del espacio donde está definido. (Problemas de contorno de Dirichlet, de Neuman y de Fourier.)

Desde el punto de vista matemático, el problema queda determinado cuando se conocen los siguientes elementos:

1.º Dominio de definición del campo: paralelepípedo rectangular de longitud infinita, de anchura  $a$  y altura  $b$ , limitado por las siguientes superficies: superficies laterales (planos verticales  $S_L$ ), sustrato impermeable (plano horizontal  $S_F$ ), base del macizo impermeable (horizontal  $S_M$ ), superficies del terreno aguas arriba  $S_{AR}$  y abajo  $S_{AB}$  del macizo impermeable respecto al flujo de agua (horizontales).

2.º Ecuación que rige el fenómeno físico:  $\Delta h = 0$ .

3.º Condiciones de contorno:

La superficie que limita el volumen considerado puede suponerse cerrada en el infinito o bien suponerla cerrada a distancia suficientemente grande por dos planos verticales que podrían ser considerados en este caso como impermeables, ya que a esa distancia, el flujo de agua subterránea puede considerarse nulo, así como los efectos de la red de filtración. Esta superficie es cerrada, lisa (por zonas), orientable (o de dos caras), y en sus distintas partes, el campo  $h$  considerado verifica las siguientes condiciones:

a) Superficies de nivel constante:  $h = \text{cte.}$  (condición tipo Dirichlet). Son las dos superficies del terreno permeable aguas arriba y abajo del macizo impermeable:  $S_{AR}$  y  $S_{AB}$ .

b) Superficies impermeables:  $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$  (condición tipo Neuman). Son las superficies laterales, ( $S_L$ ) el estrato impermeable, sobre el que está situado el permeable ( $S_P$ ) y la base del macizo impermeable ( $S_M$ ).

c) Condiciones impuestas por los drenes:  $h = \text{cte.}$  (condición tipo Dirichlet). Corresponden a la superficie lateral de los drenes cilíndricos, cuyo potencial hidráulico se fija en cada uno de los modelos de la experimentación,  $S_D$ .

## 1.2. Unicidad de la solución (2).

Desde el punto de vista físico es evidente que la solución a un problema de infiltración debe ser única, ya que no existe posibilidad real de que en un mismo punto, el potencial hidráulico o el caudal tomen dos o más valores distintos.

El comprobar la unicidad de la solución se justifica por el hecho de demostrar que las condiciones tenidas en cuenta en la experimentación son suficientes para determinar completamente el problema físico estudiado, y al mismo tiempo son también necesarias, eliminando a priori la posibilidad de introducir o imponer condiciones de contorno en el problema que sean incompatibles.

En nuestro caso, al tratarse de una función armónica (3), dado que el volumen en que está definida no contiene ningún punto singular y la superficie que lo encierra cumple las condiciones necesarias para la aplicación del teorema de la divergencia, aplicando la primera identidad de Green:

$$\iiint_V (\text{grad } U \cdot \text{grad } W + U \Delta W) dV = \iint_S U \left( \frac{\partial W}{\partial n} \right) dS \quad (\text{E. 2})$$

donde  $S$  es una superficie cerrada, lisa y orientable;  $V$ , el volumen encerrado por ella;  $U$  y  $W$ , dos campos escalares diferenciables de segundo orden ( $\in C^2$ ), tanto en  $V$  como en  $S$ , al caso en que  $U = W = h$ , siendo además  $h$  armónica ( $\Delta h = 0$ ) se tiene:

$$\iiint_V (\text{grad } h \cdot \text{grad } h) dV = \iint_S h \cdot \frac{\partial h}{\partial n} dS \quad (\text{E. 3})$$

donde se representa por  $\frac{\partial h}{\partial n}$  la derivada direccional del campo  $h$  según la dirección de la normal a la superficie del contorno. Por ser el integrando función continua y el recinto de integración estar constituido por varias superficies lisas puede des-

componerse la integral de superficie del segundo miembro de la ecuación (E. 3) en la suma de las integrales de superficie correspondientes a cada una de las zonas en que se divide la superficie total.

La demostración de la unicidad de la solución la haremos por reducción al absurdo. En efecto, supongamos que pudieran existir dos soluciones del problema: deberán cumplir las mismas condiciones del contorno y ser armónicas ambas, con lo cual tendríamos:

Soluciones supuestas  $h_1$  y  $h_2$ :

$$1.^{\circ} \quad \Delta h_1 = \Delta h_2 = 0.$$

2.<sup>o</sup> Superficies de aguas arriba y abajo del macizo impermeable:

$$h_1(S_{AR}) = h_2(S_{AR}) = h_{AR}$$

$$h_1(S_{AB}) = h_2(S_{AB}) = h_{AB}$$

3.<sup>o</sup> Superficies impermeables:

$$\left( \frac{\partial h_1}{\partial n} \right)_{S_L} = \left( \frac{\partial h_2}{\partial n} \right)_{S_L} = 0$$

$$\left( \frac{\partial h_1}{\partial n} \right)_{S_F} = \left( \frac{\partial h_2}{\partial n} \right)_{S_F} = 0$$

$$\left( \frac{\partial h_1}{\partial n} \right)_{S_M} = \left( \frac{\partial h_2}{\partial n} \right)_{S_M} = 0$$

4.<sup>o</sup> Superficie lateral de los drenes:

$$h_1(S_D) = h_2(S_D) = h_d$$

ya que ambas soluciones deberían verificar las mismas condiciones de contorno por ser soluciones del mismo problema.

Llamando  $h$  a la función diferencia de ambas soluciones:

$$h = h_1 - h_2$$

esta nueva función deberá verificar las siguientes condiciones:

$$1. \quad \Delta h = \Delta (h_1 - h_2) = \Delta h_1 - \Delta h_2 = 0$$

$$2. \quad h(S_{AR}) = h(S_{AB}) = 0$$

$$3. \quad \left( \frac{\partial h}{\partial n} \right)_{S_L} = \left( \frac{\partial h}{\partial n} \right)_{S_F} = \left( \frac{\partial h}{\partial n} \right)_{S_M} = 0$$

$$4. \quad h(S_D) = 0$$

Aplicando a esta función  $h$ , en dicho recinto, la ecuación (E. 3) se obtiene:

$$\iiint_V (\text{grad } h) \cdot (\text{grad } h) dV = 0 \quad (\text{E. 4})$$

ya que las integrales del segundo miembro de la citada ecuación (E. 3) son todas nu-

las al ser uno de los factores del integrando igual a cero  $\left(h \text{ o } \frac{\partial h}{\partial n}\right)$ , por lo que son idénticamente nulas. Así, pues, tenemos:

$$\iiint_V (\overline{\text{grad } h})^2 dV = 0 \quad (\text{E. 5})$$

El espacio geométrico ordinario es un espacio puntual euclídeo cuyo espacio vectorial asociado es también euclídeo y, por tanto, de norma definida positiva. En consecuencia, la integral obtenida es de integrando estrictamente positivo, y por ser la integral nula, el integrando deberá ser idénticamente nulo en todos los puntos del volumen de integración; es decir:

$$(\overline{\text{grad } h})^2 = 0 \Rightarrow \overline{\text{grad } h} = 0 \quad (\text{E. 6})$$

Una función o campo escalar, cuyo gradiente es nulo en una determinada región cerrada del espacio, es constante en dicha región, por lo que

“h es constante en todo V y en su contorno S”

y como la función h tiene el valor cero en las superficies  $S_{AR}$ ,  $S_{AB}$  y  $S_D$  se obtiene definitivamente:

$$\underline{\text{“}h = 0 \text{ en todo V y S”}}$$

Así, pues, hemos llegado a la conclusión de que la única función h que cumple las condiciones especificadas es la función nula. Luego:

$$h_1 - h_2 = h = 0 \Rightarrow h_1 = h_2$$

Por tanto, la solución, en caso de existir, es única.

### 1.3. Posibilidades y limitaciones del tratamiento matemático analítico.

En el ámbito de la literatura sobre hidráulica subterránea y flujo de fluidos a través de medios porosos existen algunos problemas resueltos teóricamente y que corresponden a casos con condiciones de contorno particularmente sencillas.

En este apartado se aplica la metodología matemática usual a un conjunto de problemas próximos al objeto de este estudio que serán utilizados posteriormente bien como fuente de datos de partida bien para contrastar algunos de los resultados obtenidos y conseguir con ello una cota de error en los restantes resultados, que no son fáciles de contrastar analíticamente.

En estos casos puede observarse la complejidad del aparato matemático necesario para la resolución del problema con la consiguiente falta de flexibilidad para su aplicación práctica, al margen de que su aplicación directa resulta ya de por sí restringida. Las posibilidades actuales de un tratamiento matemático se limitan a los siguientes casos:

1. Flujo bajo un macizo impermeable de longitud infinita y anchura L, situado sobre un estrato permeable de profundidad infinita

2. Flujo bajo un macizo impermeable de longitud infinita y anchura  $L$ , situado sobre un estrato permeable horizontal de espesor igual a  $b$ .

3. Línea de drenes verticales totalmente penetrantes, o completos, y regularmente espaciados de longitud infinita, en estrato permeable horizontal de espesor constante y extensión infinita.

4. Zanja totalmente penetrante de longitud infinita en estrato permeable horizontal de espesor constante y extensión infinita.

1.3.1. *Flujo bajo un macizo impermeable de longitud infinita y anchura  $L$ , situado sobre un estrato permeable de profundidad infinita.*

El problema consiste en estudiar el flujo de agua subterránea bajo una estructura hidráulica de base plana situada sobre un estrato permeable de profundidad infinita, existiendo una diferencia de potencial hidráulico entre ambos lados de dicho macizo.

Al considerarse el macizo de longitud infinita (estructura lineal) por simetría el problema puede tratarse como bidimensional, ya que el flujo en todos los planos verticales normales al macizo será idéntico. El problema se reduce a otro bidimensional plano, siendo factible por ello hacer uso de los recursos que la teoría de funciones analíticas de variable compleja puede suministrar para la resolución de la ecuación de Laplace con unas determinadas condiciones de contorno, así como los de las transformaciones conformes para convertir los contornos del problema en otros de representación analítica más simple. En esquema, el problema bidimensional a resolver está representado en la figura 2.

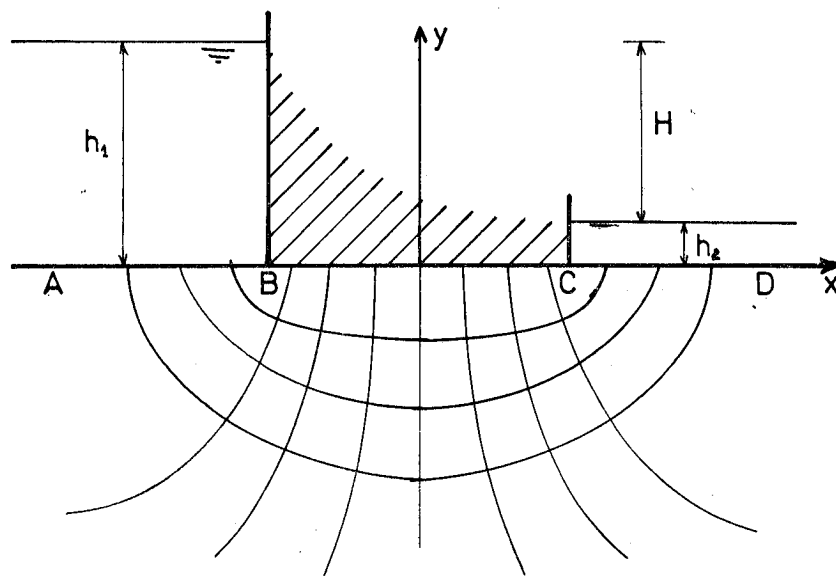


Figura 2.

Su resolución, desde el punto de vista matemático, consiste en la obtención de las dos familias de curvas que representan las líneas equipotenciales y líneas de

corriente (red de corriente). Ambas familias serán las líneas de nivel de las dos funciones  $\varphi$  y  $\psi$ , potencial hidráulico y función de corriente, respectivamente. Las dos serán funciones armónicas conjugadas que verificarán las condiciones de contorno del problema, y podrán obtenerse conjuntamente como las partes real e imaginaria de una función analítica de variable compleja (condiciones de analiticidad de Cauchy-Riemann, para funciones de variable compleja (4) y (5).

Para la resolución del problema se considera una función de variable compleja que cumpla las condiciones del potencial en el contorno o bien de la velocidad compleja que en este caso es más simple (6). Sea la función:

$$f(z) = \frac{C}{[(L/2)^2 - z^2]^{1/2}} = \frac{C}{\sqrt{a^2 - z^2}} \quad (\text{E. 7})$$

donde  $a = L/2$ . Puede comprobarse fácilmente que dicha función toma en el contorno los valores correspondientes a la velocidad compleja del problema. Para  $z = (x, 0)$  con  $|x| < a$  sólo tiene parte real no nula, de acuerdo con la condición de línea de corriente de la base del macizo impermeable, y para  $|x| > a$  sólo componente imaginaria, es decir, normal al contorno, correspondiendo a los tramos AB y CD que deben ser equipotenciales. Lógicamente, para  $x = \pm a$  correspondientes a los puntos B y C la velocidad se hace infinita, siendo puntos singulares del problema.

El potencial complejo resultante en el problema,  $w$ , será por consiguiente:

$$f(z) = \frac{dw}{dz}$$

obteniendo por integración el potencial  $w$ :

$$w = \varphi + i\psi = C \arcsen \frac{z}{a} + C' \quad (\text{E. 8})$$

Las constantes  $C$  y  $C'$  se determinan con las condiciones de contorno. Haciendo  $\psi = 0$  en la base del macizo (referencia para medida de caudales), teniendo en cuenta que el potencial  $\varphi$  aguas arriba es  $h_1$  y aguas abajo  $h_2$ , tomando como origen de potenciales  $h_2$  y denominando  $H = h_1 - h_2$ , el potencial en el punto B será  $\varphi = KH$ , lo que sustituido en la ecuación anterior resulta, en definitiva:

$$w = \frac{KH}{\pi} \arcsen \frac{z}{a} - \frac{KH}{2} = -\frac{KH}{\pi} \arccos \frac{z}{a} \quad (\text{E. 9})$$

Es decir:

$$z = a \cos \frac{\pi w}{KH} \quad (\text{E. 10})$$

Separando las partes real e imaginaria en ambos miembros:

$$z = x + iy = a \cos \frac{\pi(\varphi + i\psi)}{KH} \quad (\text{E. 11})$$



$$z = a \cos \frac{\pi \varphi}{KH} \operatorname{ch} \frac{\pi \psi}{KH} - i a \operatorname{sen} \frac{\pi \varphi}{KH} \operatorname{sh} \frac{\pi \psi}{KH} \quad (\text{E. } 12)$$

con lo cual:

$$x = a \cos \frac{\pi \varphi}{KH} \operatorname{ch} \frac{\pi \psi}{KH} \quad (\text{E. } 13)$$

$$y = -a \operatorname{sen} \frac{\pi \varphi}{KH} \operatorname{sh} \frac{\pi \psi}{KH} \quad (\text{E. } 14)$$

donde  $\varphi$  y  $\psi$  son el potencial hidráulico y la función de corriente, respectivamente.

Las líneas equipotenciales se obtienen haciendo  $\varphi = \text{cte.}$ , con lo que resultan las ecuaciones paramétricas de las mismas. Sus ecuaciones analíticas se deducen de las mismas eliminando el parámetro  $\psi$ , para lo cual basta elevar al cuadrado cada una de las ecuaciones y restarlas miembro a miembro, quedando:

$$\frac{(x/a)^2}{\cos^2 \frac{\pi \varphi}{KH}} - \frac{(y/a)^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi \varphi}{KH}} = 1 \quad (\text{E. } 15)$$

Análogamente, las líneas de corriente se obtienen haciendo  $\psi = \text{cte.}$  y eliminando el parámetro  $\varphi$ . Para ello basta, como en el caso anterior, elevar al cuadrado y sumar, resultando:

$$\frac{(x/a)^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi \psi}{KH}} + \frac{(y/a)^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi \psi}{KH}} = 1 \quad (\text{E. } 16)$$

Es decir, las líneas equipotenciales son la familia de hipérbolas de focos  $(\pm a, 0)$ , y las líneas de corriente son la familia de elipses homofocales de la anterior, familias que son ortogonales.

Al ser ambas funciones  $\varphi$  y  $\psi$  armónicas y conjugadas, y cumplir las condiciones de contorno, son solución del problema y por el teorema de unicidad de las funciones armónicas, es la única que existe, como puede demostrarse fácilmente mediante un razonamiento análogo al realizado en el apartado anterior.

Como es lógico, el caudal total que atraviesa el terreno permeable, bajo el macizo, es en este caso infinito. Si sólo queremos calcular el caudal que fluye entre el macizo impermeable y una determinada línea de corriente que pase por un punto dado, por ejemplo, el de coordenadas  $(x_0, 0)$  bastaría calcular  $\psi(x_0, 0)$ , ya que el significado de la función de corriente es que el caudal que atraviesa entre dos líneas de corriente cualesquiera viene dado por la expresión:

$$q_{ij} = \psi(i) - \psi(j) \quad (\text{E. } 17)$$

Como  $\psi$  = parte imaginaria de  $w$ :

$$\psi = P. \text{ Im. } \left( -\frac{KH}{\pi} \arccos \frac{z}{a} \right) \quad (\text{E. 18})$$

y dado que habíamos elegido como origen de caudales para la función la línea de corriente que pasaba por la base del macizo impermeable, el caudal que fluye entre el mismo y una línea de corriente cualquiera venía dado directamente por el valor de la función de corriente para la línea correspondiente. Por tanto:

$$q = \psi_0 = \frac{KH}{\pi} \arg \operatorname{ch} \frac{x_0}{a} = \frac{KH}{\pi} \ln \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a} \quad (\text{E. 19})$$

fórmula que utilizaremos posteriormente en la forma:

$$q = \frac{KH}{\pi} \ln \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - (L/2)^2}}{(L/2)} \quad (\text{E. 20})$$

### 1.3.2. Flujo bajo un macizo impermeable de longitud infinita y anchura $L$ , situado sobre un estrato permeable de espesor $b$ .

Este problema se reduce al anterior efectuando una transformación de Schwarz-Christoffel (transformación conforme que convierte el rectángulo de terreno permeable en un semiplano).

La transformación a efectuar sería la siguiente (6):

$$z = Mk^2 \int_0^z \frac{d\zeta}{1 - k^2 \zeta^2} = \frac{M}{2k} \ln \frac{1 - k\zeta}{1 + k\zeta} \quad (\text{E. 21})$$

El valor de  $k$  es el inverso de la coordenada del punto que se transforma en el punto del infinito (fig. 3). Según las condiciones de contorno, el valor de  $k$  viene dado en función del espesor  $b$  del estrato por la expresión:

$$k = \operatorname{th} \frac{\pi L}{4b} \quad (\text{E. 22})$$

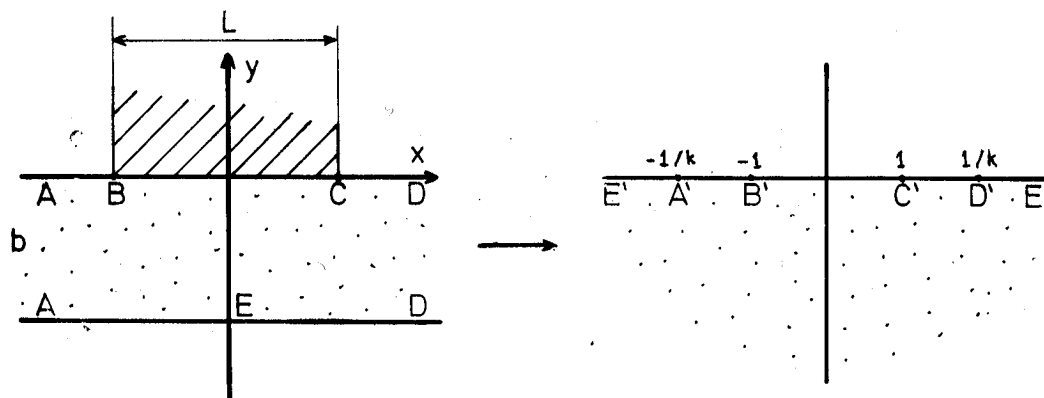


Figura 3.

Análogamente, el coeficiente  $M$  se obtiene haciendo  $\xi = \pm 1$  en los extremos del macizo impermeable:

$$\frac{L}{2} = \frac{M}{2k} \frac{1+k}{1-k} \quad (\text{E. 23})$$

Calculando ahora en el plano  $\xi$  el potencial complejo y el caudal de filtración, según las fórmulas desarrolladas en el apartado anterior, y deshaciendo posteriormente la transformación, se obtienen las ecuaciones (6):

$$x = \frac{4b}{\pi} \left[ \frac{\cos \frac{\pi \varphi}{KH} \operatorname{ch} \frac{\pi \psi}{KH}}{\operatorname{sh} \alpha} + \frac{\cos \frac{3\pi \varphi}{KH} \operatorname{ch} \frac{3\pi \psi}{KH}}{3 \operatorname{sh} 3\alpha} + \dots \right] \quad (\text{E. 24})$$

$$y = -\frac{4b}{\pi} \left[ \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi \varphi}{KH} \operatorname{sh} \frac{\pi \psi}{KH}}{\operatorname{sh} \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \frac{3\pi \varphi}{KH} \operatorname{sh} \frac{3\pi \psi}{KH}}{3 \operatorname{sh} 3\alpha} + \dots \right] \quad (\text{E. 25})$$

donde:

$$\alpha = \frac{\pi \beta'}{2\beta}$$

siendo:

$$\beta = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

y  $\beta'$  la misma expresión con  $k' = \sqrt{1-k^2}$ .

Ambos valores,  $\beta$  y  $\beta'$ , son integrales elípticas de primer orden que pueden obtenerse de las tablas de estas funciones (7).

Análogamente, el caudal puede obtenerse por la fórmula:

$$Q = KH \frac{\beta'}{2\beta} \quad (\text{E. 26})$$

donde:

$K$  = permeabilidad hidráulica del terreno.

$H$  = diferencia de potencial hidráulico entre aguas arriba y aguas abajo del macizo impermeable.

No es posible obtener expresiones analíticas, ni siquiera complicadas, siendo necesario el uso de tablas de integrales elípticas y desarrollos en serie, que en este caso concreto no es excesivamente difícil. Por otra parte, las tablas de integrales no suelen ser de uso común en estudios de ingeniería, por lo que su utilización en la práctica no resultaría muy generalizada. Además sólo permitiría el estudio de la filtración natural bajo el macizo impermeable, y, en general, su aplica-

ción se reduciría exclusivamente a problemas bidimensionales, donde se aplican las técnicas basadas en el empleo de la variable compleja.

No sería, por consiguiente, posible estudiar el efecto de un dren, ya que éste convierte el problema en tridimensional, anulándose la principal ventaja de los medios matemáticos de aplicar la variable compleja.

Esta imposibilidad de proseguir el estudio por vía matemática justifica el empleo de técnicas de simulación para el estudio de casos concretos. Es más, aun en el caso de que el problema tuviera solución analítica, pueden ser aconsejables en muchos casos estas técnicas por la mayor rapidez y comodidad de obtención de resultados. Piénsese, por ejemplo, en la obtención de la red de corriente de un problema concreto que llevaría consigo su dibujo punto a punto a partir de las ecuaciones de las líneas equipotenciales y de corriente, en tanto que con un modelo analógico pueden ser obtenidas directamente mediante una trazadora automática de líneas equipotenciales. Estas técnicas nos permiten proseguir la investigación de problemas eminentemente prácticos, dentro de diversos campos de la física, como investigación aplicada, al margen de los avances que puedan producirse en el estudio físico-matemático del flujo de fluidos a través de materiales porosos.

1.3.3. *Línea de drenes verticales totalmente penetrantes y regularmente espaciados de longitud infinita en estrato permeable horizontal, de espesor constante y extensión infinita.*

Se denomina  $b$  al espesor del estrato permeable y  $a$  a la distancia entre cada dos drenes contiguos. En estas hipótesis, para su tratamiento matemático, se supone que el dren es lineal, es decir, de diámetro nulo. Evidentemente, el problema planteado es un problema plano, ya que en todos los planos horizontales la distribución de potencial es idéntica. Esto es equivalente a que las superficies equipotenciales sean cilíndricas de generatrices verticales.

Por razones de simetría las mediatrices de los segmentos que unen dos drenes próximos deberán ser líneas de corriente, ya que el flujo a través de ellas es nulo. El efecto, pues, es el mismo que el de un solo dren actuando sobre una franja de terreno normal a la línea de drenes y de anchura igual a la distancia entre drenes  $a$ , con una longitud infinita tal como se esquematiza en la figura 4.

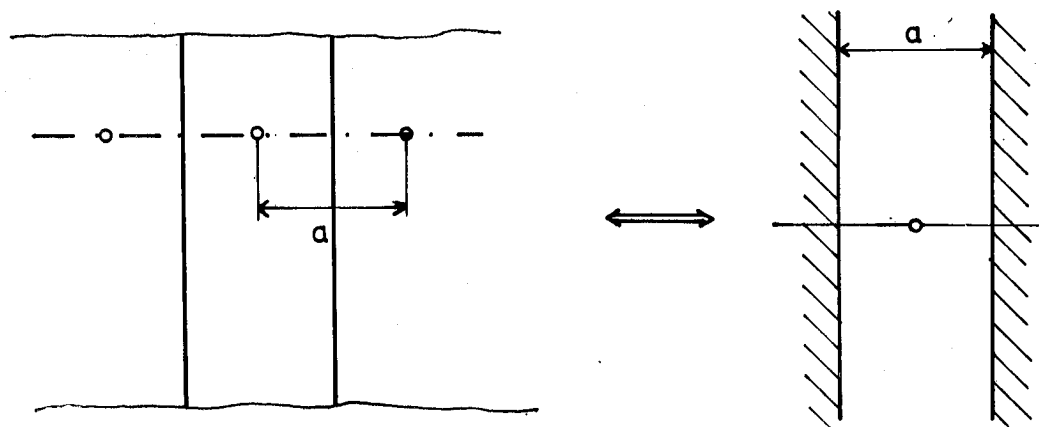


Figura 4.

Como el caso de dren o pozo totalmente penetrante en estrato infinito de espesor constante está resuelto teóricamente, basta realizar una transformación conforme que convierta el recinto rectangular de que disponemos en todo el plano. Por ser el problema bidimensional pueden utilizarse los recursos de la variable compleja.

Sea el plano complejo  $\zeta = \xi + i\eta$  en el que se considera un pozo situado en el origen, y se realiza la transformación conforme  $w$ :

$$z = w(\zeta)$$

definida por la ecuación:

$$z = \frac{a}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \zeta \quad (\text{E. 27})$$

siendo:

$$z = x + iy$$

Dicha transformación reduce el plano  $\zeta$  al recinto estudiado (fig. 5).

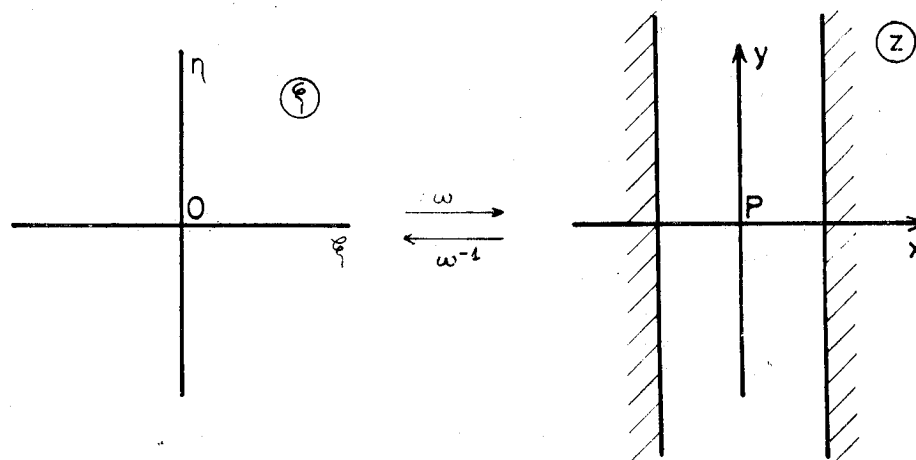


Figura 5.

La transformación inversa viene representada por:

$$\zeta = \operatorname{sen} \frac{\pi z}{a}$$

El origen del plano  $\zeta$  se corresponde con el punto  $P$  y el eje  $\eta = 0$  con las rectas  $x = \pm a$  del plano  $z$ . Un pozo situado en el origen del plano  $\zeta$ , punto  $O$ , origina un potencial complejo en régimen permanente dado por la expresión (1):

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi K b} \ln \zeta = \frac{q}{2\pi K} \ln \zeta \quad (\text{E. 28})$$

( $q$  es el caudal por unidad de espesor del estrato).

En el plano transformado el potencial se expresa por:

$$\Phi' = w(\Phi) = \frac{q}{2\pi K} \ln \left( \operatorname{sen} \frac{\pi z'}{a} \right) = \varphi + i\psi \quad (\text{E. 29})$$

donde  $\varphi$  es el potencial hidráulico y  $\psi$  la función de corriente.

Separando las partes real e imaginaria se obtienen cada una de dichas funciones:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi K} \ln \left[ \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}}{2} \right] \quad (\text{E. 30})$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi K} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\operatorname{th} \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{a}} \right] \quad (\text{E. 31})$$

Estas ecuaciones permiten obtener la red de líneas equipotenciales ( $\varphi = \text{cte.}$ ) y de corriente ( $\psi = \text{cte.}$ ).

Conviene resaltar el hecho de que esta solución supone la hipótesis de flujo horizontal, lo cual es incompatible con una alimentación vertical de la capa como sucede en el caso que se pretende estudiar. En las hipótesis consideradas la alimentación de la misma se produciría teóricamente por un plano vertical del infinito (en la práctica por una alimentación situada a suficiente distancia del dren, como podría ser una zanja totalmente penetrante).

Como resultado interesante cabe señalar que en las proximidades del dren el flujo es radial y a suficiente distancia del mismo, como sucede con valores de  $y/a \geq 0,5$ , corresponde a un flujo uniforme tal que:

$$|\operatorname{grad} \varphi| = \frac{q}{2Ka} \quad (\text{E. 32})$$

como puede obtenerse de las ecuaciones anteriores pasando al límite o más simplemente por aplicación directa de la ley de Darcy. El caudal suministrado por cada semiestrato sería:

$$\frac{q}{2} = Ka |\operatorname{grad} \varphi|$$

de donde se obtiene la anterior expresión.

Las diferentes hipótesis contenidas en este apartado son incompatibles con las del apartado anterior, así como con las condiciones de contorno, lo que hace que el problema planteado no pueda resolverse como superposición de ambos problemas. Así, pues, no es posible obtener una expresión analítica para el caudal y para el potencial hidráulico, ni siquiera en función de unas tablas de funciones conocidas como en el segundo caso en el que entran integrales elípticas en su descripción.

1.3.4. *Zanja totalmente penetrante de longitud infinita en estrato permeable horizontal de espesor constante y extensión infinita.*

Consideraremos el ancho de la zanja como nulo. Debido a la condición de infinitud cualquier plano vertical normal a la zanja será plano de simetría, por lo que en todos estos planos verticales paralelos la distribución de potencial será idéntica. Por consiguiente, el flujo se desarrollará en planos verticales, por lo que el problema resulta bidimensional.

El flujo será horizontal y uniforme con gradiente constante de valor:

$$|\text{grad } \varphi| = \frac{Q}{2 b K} \quad (\text{E. 33})$$

como resulta inmediatamente de la aplicación de la ley de Darcy, al igual que en el caso anterior. En dicha expresión  $K$  es la permeabilidad y  $b$  el espesor del estrato permeable.

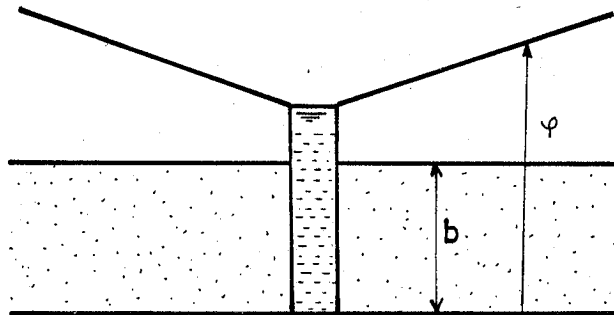


Figura 6.

## BIBLIOGRAFIA

1. G. SCHNEEBELI: "Hydraulique souterraine". Eyrolles. París, 1966.
2. F. GONZALEZ DE POSADA: "Teoría de campos escalares y vectoriales". Copygraf. Madrid, 1971.
3. STEMBERG y SMITH: "The theory of potential". University of Toronto Press. Toronto, 1964.
4. H. CARTAN: "Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas". Selecciones Científicas. Madrid, 1968.
5. R. V. CHURCHILL: "Teoría de funciones de variable compleja" (segunda edición). Ediciones del Castillo, S. A. Madrid, 1970.
6. P. YA. POLUBARINOVA KOCHINA: "Theory of ground water movement". Princeton University Press. Princeton, Nueva Jersey, 1962.
7. E. JAHNKE y F. EMDE: "Tables of funtions with formulas and curves". Dover Publication. Nueva York, 1945.