

GENERALIDADES SOBRE MODELOS MATEMATICOS PARA EL ESTUDIO DE LA DISPERSION DE VERTIDOS(*)

Por ANTONIO RUIZ MATEO

Ing. de Caminos, Canales y Puertos

PEDRO SOLE ROMEO

Ing. de Caminos, Canales y Puertos

JUAN PAYERAS SOCIAS

Ing. Téc. de Obras Públicas

Gabinete de Aplicaciones Nucleares
a las Obras Públicas

Este artículo intenta aliviar el vacío existente en la literatura técnica española, en lo referente a este tema. En primer lugar se analizan brevemente las causas del creciente interés que presenta este tipo de estudios. A continuación se centra el tema y se plantean las ecuaciones básicas que rigen el fenómeno, haciéndose algunos comentarios. Después se indican algunas formas usuales de superar las dificultades que presenta su resolución, terminándose con un comentario sobre las tendencias actuales.

INTRODUCCION

El continuo desarrollo que en diversas actividades está experimentando nuestro país hace que vaya aumentando al mismo ritmo el volumen total de residuos insalubres que han de verterse a la atmósfera, a las aguas continentales o al litoral, siendo en la mayor parte de los casos muy superior a la capacidad depuradora natural. Por ello, cualquier nuevo vertido debe estar precedido normalmente por un tratamiento de depuración artificial que será más o menos completo en función de las condiciones del medio receptor. De esto se deduce que un aumento en la concentración de los elementos contaminantes (microorganismos, suspensiones colorantes, elementos químicos, radiactividad, temperatura, etc.) permisible en el vertido, garantizado por un estudio detallado de los fenómenos de dispersión y de depuración en el medio receptor, se traduce automáticamente en un ahorro del coste de la instalación depuradora. Si se trata de un vertido al litoral mediante un emisario submarino, la concentración de los elementos contaminantes viene impuesta. En este caso, el resultado del estudio sería la determinación del punto donde debe efectuarse la inyección, y el ahorro estaría en la posible disminución de la longitud del emisario. Además de esto, el progresivo aumento del nivel de confort exigido por la sociedad hace que, por un lado, las consecuencias de un error en la previsión de la contaminación producida por un vertido sean más graves que antaño y, por otro lado, que el nivel de contaminación (proporcional a la concentración de los elementos contaminantes) aceptado sea cada vez menor. Todo ello acentúa la necesidad de una mejora en los métodos de previsión de dichas concentraciones.

Varios son los caminos por los que se puede conseguir esta mejora. El más frecuente es el de establecer un modelo matemático a partir de las ecuaciones bá-

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta revista hasta el 30 de noviembre de 1976.

sicas, que con unos ciertos datos de entrada obtenidos mediante mediciones nos den la distribución de concentraciones del elemento que se trate, en el espacio y a lo largo del tiempo. Este es precisamente el tema principal de este artículo. Otros métodos están basados esencialmente en reproducciones del fenómeno a pequeña escala, o bien en medidas realizadas sobre el propio terreno, a base de inyectar algún producto adecuado para medir de forma rápida y económica sus concentraciones.

Sin embargo, hasta el momento presente, ninguno de ellos considerado aisladamente es apropiado para el estudio completo del fenómeno, siendo necesario, por tanto, elegir adecuadamente la combinación de los métodos existentes para poder realizar un análisis suficientemente exacto y económico en función del problema que se quiera resolver.

Como se ha dicho anteriormente, en lo que sigue se van a dar las generalidades sobre el estudio de la dispersión de vertidos mediante la técnica de los modelos matemáticos. Como podrá observarse se ha restringido este estudio al caso de que el medio receptor sea agua, continental o marítima.

PLANTEAMIENTO

Lo que generalmente se espera de un estudio de este fenómeno es la obtención de las características que deben tener las aguas residuales antes de su vertido para que en determinados puntos (captaciones, playas, viveros, etc.), las concentraciones de elementos contaminantes (e. c.) no sobrepasen unos ciertos límites.

Para centrar el problema vamos a repasar brevemente lo que ocurre cuando se realiza un vertido de aguas residuales. En primer lugar se produce una rápida homogeneización en la zona cercana al punto de inyección debido a diversas causas, entre las cuales se encuentran:

- a) Alto gradiente de concentraciones.
- b) Fuerte turbulencia debido a la diferencia de velocidades entre vertido y medio receptor.
- c) Fenómenos de convección libre por diferencias acusadas de temperaturas.
- d) Diseño adecuado de la boca de descarga.

Cuando todos los gradientes se han suavizado (concentraciones, temperaturas, velocidades), el fenómeno de dispersión se produce de forma mucho más lenta; entonces, la mezcla evoluciona fundamentalmente por convección y toman importancia los factores incluidos en el término S de la ecuación (9) (mortalidad de microorganismos, neutralización de productos tóxicos, decantación, transmisión de calor a la atmósfera a través de la superficie libre, "decay" de los elementos radiactivos, etc).

Por tanto, para obtener las concentraciones de e. c. en los puntos de interés vamos a dividir el área afectada en dos zonas que llamaremos de *inyección* y de *evolución*. En primer lugar debería estudiarse el proceso de homogeneización rápida que se produce en la zona de inyección porque:

- a) Nos da el orden de magnitud de las concentraciones que van a existir en una amplia zona.

- b) Los límites establecidos por las diversas reglamentaciones suelen referirse al final de este proceso.

Pero también debemos estudiar lo que ocurre posteriormente en la zona de evolución, donde, por ser predominante el fenómeno de convección es de interés primordial el conocimiento de las velocidades del medio receptor.

Es lógico pensar que cada una de estas zonas requerirá para su estudio distintas hipótesis y, por tanto, ambos estudios deben realizarse separadamente, sirviendo los resultados del primero como datos iniciales del segundo.

ECUACIONES FUNDAMENTALES

La ecuación que rige el fenómeno de dispersión en un medio líquido con movimiento turbulento es:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{\nabla} c \cdot \vec{v} = D' \cdot \Delta c - \text{div} (c' \vec{v}') + S \quad (1)$$

siendo:

c : Promedio de concentración de e. c.

t : Tiempo.

$\vec{v}$: Promedio de la velocidad del agua en un punto.

D' : Coeficiente de difusión molecular.

$c' \vec{v}'$: Densidad de flujo de e. c. debido a las desviaciones de la velocidad y de la concentración respecto a sus promedios respectivos.

S : Adición o eliminación de e. c.

En esta ecuación, el campo $\vec{v}$ entra como dato y puede obtenerse por medición directa en la zona donde vaya a efectuarse el vertido o bien resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

- a) Continuidad (fluido incompresible):

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (2)$$

- b) Balance de cantidad de movimiento:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \vec{v} \right] = \vec{\nabla} p + \mu' \Delta \vec{v} - \rho \text{div} (\vec{v}' \otimes \vec{v}') + \vec{f} \quad (3)$$

siendo:

p : Presión.

ρ : Densidad.

μ' : Viscosidad molecular.

$\vec{v}' \otimes \vec{v}'$: Tensiones de Reynolds.

La resolución del sistema de ecuaciones (2) y (3) es, en la mayoría de los casos, independiente de la ecuación (1), lo cual simplifica mucho el problema. Sólo

en el caso de que se desee obtener la distribución de temperaturas en un medio que se mueve por convección libre sería necesario considerar simultáneamente el conjunto de las tres ecuaciones, puesto que entonces el valor de c influye en el campo $\vec{v}$.

En cualquier caso, la resolución de estas ecuaciones es extremadamente difícil hasta tal punto que incluso utilizando métodos de resolución aproximados (diferencias finitas, cálculo de variaciones, elementos finitos, etc.) es necesario hacer algunas hipótesis simplificativas. A continuación vamos a comentar las que se usan con más frecuencia.

TERMINOS DE TURBULENCIA

El producto $c' \vec{v}'$ que aparece en (1) puede interpretarse como responsable de un aumento de difusión debido al movimiento turbulento. Por esta razón suele hacerse la siguiente hipótesis:

$$\vec{q}^t = -c' \vec{v}' = D^t \cdot \vec{\nabla} c \quad (4)$$

en total, analogía con la ley de Fick de difusión molecular:

$$\vec{q}^t = D^t \cdot \vec{\nabla} c \quad (5)$$

No obstante, existen notables diferencias entre ambas hipótesis, la más importante de las cuales es que el coeficiente D^t no es una propiedad del fluido (como ocurre con D^l), sino que depende del campo de velocidades instantáneas.

Esto hace que en muchos casos interese considerar D^t como un tensor de segundo orden para tener en cuenta las direcciones privilegiadas de dispersión debidas a las condiciones del movimiento turbulento. Por ello, el valor de D^t será, en general, diferente para cada problema e incluso para cada zona del fenómeno a estudiar. Su determinación directa, o a través de algunas consideraciones teóricas (longitud de mezcla de Prandtl), debe hacerse empíricamente.

Algo parecido ocurre con el producto tensorial $(\vec{v}' \otimes \vec{v}')$ que aparece en (3), considerado por Reynolds como un tensor de tensiones adicional debido a la turbulencia. También suele hacerse la hipótesis:

$$\tau^t = -\rho (\vec{v}' \otimes \vec{v}') = \mu^t \cdot S(\vec{v}) \quad (6)$$

que en notación indicial puede expresarse:

$$\tau^t_{ij} = -\rho (\overline{v'^i \cdot v'^j}) = \mu^t (\overline{v^i_{,j}} + \overline{v^j_{,i}}) \quad (7)$$

Esto se hace por analogía con la ley de Newton:

$$\tau^l_{ij} = \mu^l (\overline{v^i_{,j}} + \overline{v^j_{,i}}) \quad (8)$$

existiendo entre μ^l y μ^t diferencias del mismo tipo que las señaladas para los coeficientes de difusión.

De acuerdo con esto, las ecuaciones (1) a (3) quedarían de la siguiente forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{\nabla} c) \cdot \vec{v} = D \cdot \Delta c + S \quad (9)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (10)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \vec{v} \right] = \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f} \quad (11)$$

siendo:

$$D = D' + D'' \quad (12)$$

$$\mu = \mu' + \mu'' \quad (13)$$

y suponiendo además que D' y μ' son constantes.

ZONA DE EVOLUCION. PROMEDIOS ESPACIALES

Una de las técnicas que con más frecuencia se utilizan para simplificar las ecuaciones fundamentales es la de los promedios espaciales. Consiste en integrar dichas ecuaciones a lo largo de todo el campo de variación de alguna coordenada. El resultado es una nueva ecuación con nuevas variables que pueden interpretarse como promedios espaciales de las variables antiguas.

Para aclarar ideas vamos a aplicar esta técnica al estudio de la zona de evolución de un vertido en el litoral marítimo. En este caso, la profundidad es pequeña en comparación con las dimensiones en planta de la zona en estudio, lo cual nos aconseja promediar respecto a la coordenada vertical. Usaremos coordenadas cartesianas y la notación de la figura 1.

La primera ecuación que vamos a integrar es la de continuidad:

$$\frac{\partial v^1}{\partial x_1} + \frac{\partial v^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v^3}{\partial x_3} = 0 \quad (14)$$

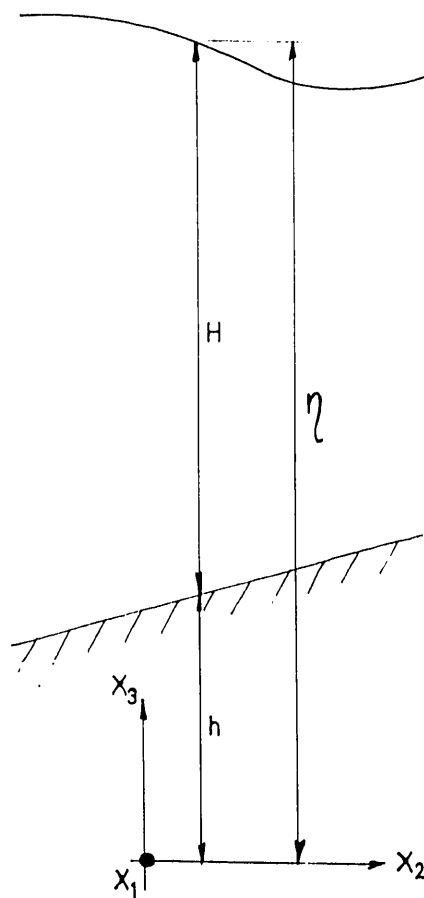


Figura 1.

Partimos de la identidad:

$$\int_h^\eta \left[\frac{\partial v^1}{\partial x_1} + \frac{\partial v^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v^3}{\partial x_3} \right] dx^3 = 0 \quad (15)$$

Ahora integramos cada sumando:

$$\int_h^{\eta} \frac{\partial v^1}{\partial x_1} dx^3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_h^{\eta} v^1 dx^3 - v^1 \left[\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + v^1 \right]_h \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (16)$$

$$\int_h^{\eta} \frac{\partial v^2}{\partial x_2} dx^3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_h^{\eta} v^2 dx^3 - v^2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial x_2} + v^2 \right]_h \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad (17)$$

$$\int_h^{\eta} \frac{\partial v^3}{\partial x_3} dx^3 = v^3 \left[\right]_{\eta} - v^3 \left[\right]_h \quad (18)$$

y, por tanto, la identidad 15 se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_h^{\eta} v^1 dx^3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_h^{\eta} v^2 dx^3 - [\vec{v} \cdot \vec{n}_\eta]_\eta + [\vec{v} \cdot \vec{n}_h]_h = 0 \quad (19)$$

siendo $\vec{n}_\eta$ y $\vec{n}_h$ vectores normales a la superficie libre y al fondo, respectivamente. Analicemos ahora los dos últimos términos del segundo miembro. Como la velocidad en el fondo no puede tener componente normal a éste se deduce:

$$[\vec{v} \cdot \vec{n}_h]_h = 0 \quad (20)$$

Por otro lado es fácil deducir que en la superficie libre se verifica (fig. 2):

$$v^3]_\eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} + v^1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + v^2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad (21)$$

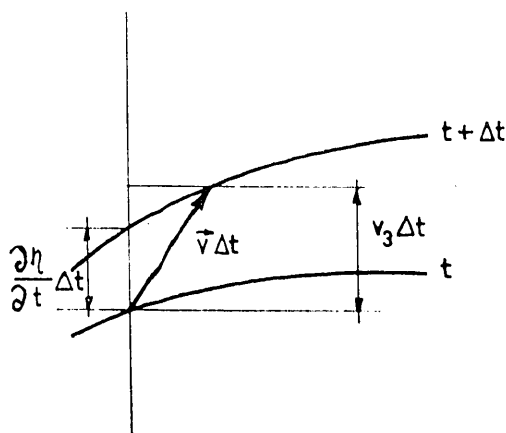


Figura 2.

o lo que es lo mismo:

$$[\vec{v} \cdot \vec{n}_\eta]_\eta = - \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (22)$$

con lo cual la ecuación (19) se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_h^{\eta} v^1 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_h^{\eta} v^2 dx_3 + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

Por último, si hacemos:

$$u^1 = \frac{1}{H} \int_h^{\eta} v^1 dx_3; \quad u^2 = \frac{1}{H} \int_h^{\eta} v^2 dx_3 \quad (24)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

se obtiene:

$$\frac{\partial (H u^1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (H u^2)}{\partial x_2} = - \frac{\partial H}{\partial t} \quad (26)$$

o en notación vectorial:

$$\boxed{\operatorname{div} (H \vec{u}) = - \frac{\partial H}{\partial t}} \quad (27)$$

Nótese que esta ecuación puede interpretarse como la ecuación de continuidad en dos dimensiones de un fluido con densidad variable $\rho = H$. Como veremos, esto se verifica también para otros muchos casos, por lo que es admisible retenerlo como regla nemotécnica.

Integremos ahora la ecuación que nos da el balance de la cantidad de movimiento. Previamente vamos a hacer la hipótesis de que la distribución de presiones es hidrostática:

$$p = \rho g (\eta - x_3) \quad (28)$$

con lo cual, la ecuación vectorial (11) se convierte en el sistema:

$$\rho \left[\frac{\partial v^1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^1 \right] = \mu \Delta v^1 - \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + f_1 \quad (29)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v^2}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^2 \right] = \mu \Delta v^2 - \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + f_2 \quad (30)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v^3}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^3 \right] = \mu \Delta v^3 + \rho g + f_3 \quad (31)$$

De éstas, sólo necesitamos integrar las dos primeras. A continuación indicamos algunos resultados típicos:

$$\int_h^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} d x_3 = H \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \quad (32)$$

$$\int_h^{\eta} \frac{d v^1}{\partial t} d x_3 = \frac{\partial}{\partial t} \int_h^{\eta} v^1 d x_3 - v^1 \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} + v^1 \right|_h \frac{\partial h}{\partial t} \quad (33)$$

$$\int_h^{\eta} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^1 d x_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_h^{\eta} (v^1)^2 d x_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_h^{\eta} v^1 \cdot v^2 d x_3 + v^1 \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right. \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \int_h^{\eta} \tau_{11} d x_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_h^{\eta} \tau_{11} d x_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_h^{\eta} \tau_{12} d x_3 - \\ &- \tau_{11} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \tau_{21} \right| \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \tau_{31} \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} + \tau_{21} \right| \frac{\partial h}{\partial x_2} - \tau_{31} \left| \right. \end{aligned} \quad (35)$$

Ahora hacemos:

$$u^i = \frac{1}{H} \int_h^{\eta} v^i d x_3; \quad v^i(x_1, x_2, x_3, t) = u^i(x_1, x_2, t) + u^{*i}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (36), (37)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{H} \int_h^{\eta} \tau_{ij} d x_3; \quad F_i = \frac{1}{H} \int_h^{\eta} t_i d x_3 \quad (38), (39)$$

$$- \tau_{1i} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \tau_{2i} \right| \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \tau_{3i} \left| \right. = \tau_{ij} \eta \quad (40)$$

$$- \tau_{1i} \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} - \tau_{2i} \right| \frac{\partial h}{\partial x_2} + \tau_{3i} \left| \right. = \tau_{ij} h \quad (41)$$

$$N_{ij} = H \sigma_{ij} - \rho \int_h^{\eta} u^{*i} u^{*j} d x_3 \quad (42)$$

De todo ello resulta que las ecuaciones (29) y (30) se transforman en:

$$\rho \left[\frac{\partial (H u^1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (H u^1 u^1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H u^1 u^2) \right] = \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + \tau_{11} \eta - \tau_{11} h - \rho g H \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + H \tau_{11} \quad (43)$$

$$\rho \left[\frac{\partial (H u^2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (H u^2 u^1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H u^2 u^2) \right] = \frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \tau_{21} \eta - \tau_{21} h - \rho g H \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + H \tau_{21} \quad (44)$$

que con notación vectorial puede escribirse:

$$\rho \left\{ \frac{\partial (H \vec{u})}{\partial t} + [\vec{\nabla} (H \vec{u})] \cdot \vec{u} \right\} = \vec{\text{div}} \vec{N} + \frac{\vec{\tau}}{\tau} / \eta - \frac{\vec{\tau}}{\tau} / h - \rho g H \vec{\nabla} \eta + H \vec{F} \quad (45)$$

Del mismo modo, de la ecuación (9) obtenemos:

$$\frac{\partial (H \theta)}{\partial t} + H \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = D^* [\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} \theta + H \Delta \theta] + H \cdot S^* \quad (46)$$

siendo:

$$\theta = \frac{1}{H} \int_h^{h_1} \theta \, dx_3; \quad S^* = \frac{1}{H} \int_h^{h_1} S \, dx_3 \quad (47), (48)$$

$$D^* [\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} \theta + H \Delta \theta] = D \Delta \theta + \text{div} \left[\int_h^{h_1} \theta^* \vec{u}^* \, dx_3 \right] \quad (49)$$

Las tres ecuaciones, (27), (45) y (46), junto con sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno, pueden resolverse utilizando cualquiera de los métodos aproximados existentes, siendo el más apropiado para este caso el de diferencias finitas.

El procedimiento indicado puede aplicarse también al estudio de la dispersión en ríos, efectuándose entonces la integración respecto a las dos coordenadas transversales. Las ecuaciones resultantes pueden deducirse formalmente de las obtenidas para el caso del litoral marítimo.

Como puede verse, la técnica de los promedios espaciales disminuye el número de variables, simplificando el problema a costa de sacrificar información sobre la dependencia de las diversas magnitudes con respecto a las variables respecto a las cuales se ha efectuado la integración. Además, como consecuencia de este proceso se obtienen algunos términos (D , N_{ij}) que tienen en cuenta el hecho de que las distintas magnitudes no son constantes para un mismo valor de la coordenada de integración. Su naturaleza, por tanto, es análoga a la de los términos de turbulencia analizados anteriormente. Esto significa que se han hecho nuevas hipótesis para su determinación.

ZONA DE INYECCION

El método de los promedios espaciales es válido solamente para el estudio de la zona de evolución. Para analizar lo que ocurre en la zona de inyección se utilizan normalmente otro tipo de simplificaciones basadas en lo que se va a explicar a continuación.

Como lo que sucede en esta zona depende mucho de la forma en que se realiza el vertido (superficial o profundo, situación de la boca de descarga respecto a

los límites de la masa fluida, relación de caudales, forma de los difusores, etc.) vamos a elegir dos tipos simples que de alguna forma dan las directrices de lo que debe hacerse en cualquier caso práctico: el *chorro* puro, donde la mezcla se efectúa principalmente debido a la energía cinética del vertido, despreciándose la convección libre, y la *pluma* térmica, donde sucede todo lo contrario.

En el primer caso (fig. 3), las ecuaciones del movimiento se reducen a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} (u'v') \quad (51)$$

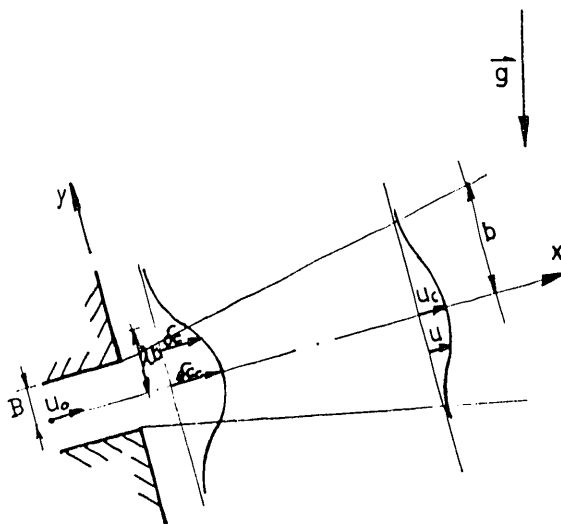


Figura 3.

con las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow u = u_0 \\ y = \pm \infty &\Rightarrow u = 0 \\ y = 0 &\Rightarrow v = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Este problema puede resolverse por integración directa utilizando métodos numéricos, pero es mucho más frecuente hacer las siguientes hipótesis:

a) Semejanza del perfil de velocidades:

$$\frac{u}{u_c} = f\left(\frac{y}{b}\right) \quad (53)$$

b) Distribución hidrostática de presiones.

Como consecuencia de ambas se obtiene:

$$\frac{db}{dx} = \text{cte} ; u_c \propto \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (54), (55)$$

A veces se supone conocido el perfil de velocidades:

$$\frac{u}{u_c} = e^{-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (56)$$

con lo cual puede resolverse totalmente el problema. Si por el contrario queremos obtener la función f como resultado del cálculo es necesario hacer una nueva hipótesis relativa a las tensiones de Reynolds:

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \quad (57)$$

La ecuación de la difusión se convierte en:

$$u \frac{\partial (\delta c)}{\partial x} + v \frac{\partial (\delta c)}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} [\overline{v' \cdot (\delta c)'}] \quad (58)$$

que suele resolverse suponiendo:

$$\frac{\delta c}{\delta c_c} = e^{-\left(\frac{y}{\lambda b}\right)^2} \quad (59)$$

siendo λ el llamado número de Schmidt.

En el caso de la pluma térmica (fig. 4), las ecuaciones son:

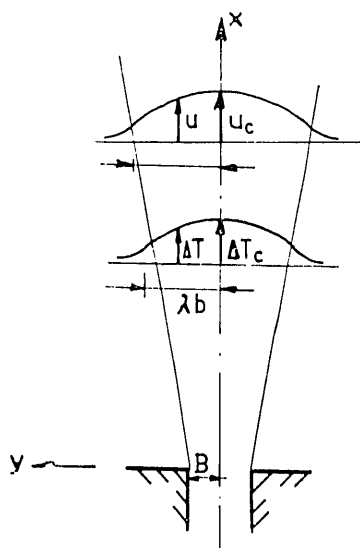


Figura 4.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (60)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{(\delta \rho) \cdot g}{\rho} - \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} \quad (61)$$

$$u \frac{\partial (\delta \rho)}{\partial x} + v \frac{\partial (\delta \rho)}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} [\overline{v' \cdot (\delta \rho)'}] \quad (62)$$

Se supone que el incremento de densidad es proporcional al decremento de temperatura. Además, de forma análoga a la que se hizo antes, se supone:

$$\frac{db}{dx} = \text{cte} ; u_c = \text{cte} ; (\delta \rho)_c \propto \frac{1}{x} \quad (63)$$

y perfiles de velocidades y densidades de tipo gaussiano.

En ambos casos, la resolución completa requiere el uso de varios coeficientes que deberían determinarse en cada caso por métodos empíricos. No obstante, para algunas condiciones particulares, estos coeficientes están tabulados.

CONCLUSION

Se han visto algunos de los planteamientos básicos en los que se apoyan los modelos matemáticos existentes para el estudio de la dispersión de vertidos. Aunque ya se obtienen resultados aceptables, el creciente interés experimentado por este tema hace que en estos momentos esté siendo objeto de numerosas investigaciones en todo el mundo.

La tendencia que se observa en los Congresos internacionales es la de recopilar todos los datos de campo existentes para testear y mejorar en lo posible los modelos matemáticos, que hasta ahora se han desarrollado fundamentalmente, basándose en consideraciones semiteóricas.