

ESTUDIO SOBRE PANDEO LONGITUDINAL DE ARCOS (*)

Por JOSE MARIA OCTAVIO DE TOLEDO EUGUI
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

En el presente artículo se estudia un fenómeno que ya ha sido tratado por otros autores, siguiendo métodos distintos del que aquí se expone.

La conclusión, totalmente original, a que se llega consiste en que no se da, salvo en casos particulares, un fenómeno de pandeo propiamente dicho, sino lo que el autor llama una "limitación de la capacidad de empuje".

Tras una aproximación intuitiva, y tras haber comentado las hipótesis establecidas —comunes en el planteamiento de esta clase de problemas—, se aborda el asunto partiendo de la viga curva isostática con un apoyo deslizante, y se analiza el proceso de deformaciones siguiendo un método cuyas bases aparecieron en otros dos artículos del autor referentes al pandeo lateral de arcos, publicados ya en esta Revista. Como resultado se obtiene un corrimiento del extremo final del arco, que permite juzgar su estabilidad elástica.

1. UNA IMAGEN DEL FENOMENO DEL PANDEO

Al plantear el problema del pandeo de la pieza recta sometida a compresión uniforme, consecuencia de la acción de dos fuerzas iguales y contrarias situadas en ambos extremos, se parte de unas condiciones iniciales, consistentes en que la carga está perfectamente centrada y que la directriz es perfectamente rectilínea. En estas condiciones, la pieza agota su capacidad resistente cuando las tensiones sobrepasan los valores llamados de rotura.

Alterando esas condiciones y dando una cierta excentricidad a las solicitaciones, éstas producirán momentos flectores, con las consiguientes deformaciones transversales de la pieza. Estas pueden aumentar la excentricidad de los esfuerzos, provocando nuevos momentos y nuevas flexiones, éstas, a su vez, mayores excentricidades con nuevos momentos, y así sucesivamente. Si la carga es inferior a la crítica se alcanzará una posición de equilibrio, en la cual, la pieza absorbe las compresiones y las flexiones.

De acuerdo con este esquema, las compresiones juegan un papel determinante en el pandeo como consecuencia del aumento ilimitado de su brazo mecánico y al margen de otras acciones diferentes. Aclaremos esto como sigue:

En el caso de la figura 1, las fuerzas f pueden ser sustituidas por la (f) y los momentos M . Por efecto de la deformación, el punto x experimenta un corrimiento y , como consecuencia del cual se obtendrá un momento adicional fy , resultando el momento total $M + fy$. Vemos que es únicamente el valor de f el que puede provocar el pandeo, pues al ser constante M , en la expresión $M + fy$ sólo el término fy puede crecer indefinidamente.

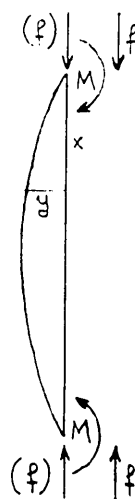


Figura 1.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de diciembre de 1974.

En el caso de los arcos, los esfuerzos serán momentos flectores y esfuerzos cortantes, combinados con compresiones, actuando sobre las tangentes a la directriz. Y nuevamente podremos considerar a estas compresiones como capaces de provocar el pandeo en cuanto se produzca alguna excentricidad y las tensiones de segundo orden resultantes crezcan indefinidamente.

2. HIPOTESIS HABITUALES INTRODUCIDAS AL ESTUDIAR EL FENOMENO DEL PANDEO

2.1. La primera de estas hipótesis consiste en considerar las deformaciones como "muy pequeñas". Esta hipótesis es razonable cuando los módulos de deformación de los materiales de que esté constituida la pieza sean muy elevados como en el caso del hormigón y del acero de construcción.

Si se trata de la pieza recta tendremos, por un lado, deformaciones longitudinales, que se traducen en un pequeño acortamiento, el cual lleva consigo una pequeña disminución de la luz libre de pandeo sin efectos apreciables, cuantitativamente hablando.

Por otro lado tendremos las deformaciones transversales, que aumentan el brazo mecánico de las compresiones, y desempeñan, por tanto, un papel clave en el fenómeno. Al ser aquéllas muy pequeñas, las variaciones angulares en la directriz serán despreciables (nos referimos a los ángulos de las tangentes en dos puntos cualesquiera de la directriz). Los corrimientos de los puntos serán normales a la posición inicial de equélla, ya que proceden de los pequeños giros de flexión que se producen a lo largo de la pieza (más adelante analizaremos el pandeo de ésta y quedará perfectamente claro lo que acabamos de decir).

En el caso de los arcos, como luego veremos, se llega a conclusiones semejantes.

2.2. La segunda de estas hipótesis se refiere al comportamiento elástico del material, que proporciona un planteamiento matemático más sencillo del problema.

En realidad, los materiales dejan de comportarse elásticamente a partir de ciertos valores de las tensiones, disminuyendo progresivamente sus módulos de deformaciones, resultando éstas mayores para los mismos esfuerzos. De acuerdo con el esquema explicado en el apartado 1, esto supone un empeoramiento de sus condiciones de estabilidad. Al hacer la hipótesis de elasticidad ilimitada nos situamos, pues, del lado de la seguridad. (En el método que expondremos más adelante podrían considerarse también deformaciones no elásticas, mediante la introducción de módulos variables, suponiendo que se conocen sus leyes de variación. Recomendamos al lector que vuelva sobre este apartado tras una primera lectura del presente trabajo.)

2.3. Otras hipótesis son las normalmente admitidas en resistencia de materiales, y que consisten en la conservación de secciones planas en el caso de las piezas prismáticas (que es el nuestro), y en que los ángulos de flexión obedecen a una ley del tipo:

$$\Delta \varphi = \frac{M}{EI} \Delta s$$

cuyo significado es sobradamente conocido.

Todas las hipótesis expuestas han sido, pues, razonablemente introducidas. Al avanzar en el presente trabajo se irá viendo con mayor claridad su razón de ser.

3. PANDEO DE LA PIEZA RECTA SOMETIDA A COMPRESION UNIFORME

3.1. Utilizaremos este caso como introducción al de pandeo de arcos esbozando las ideas fundamentales. (Una exposición más detallada puede verse en el trabajo del autor "Estudio sobre pandeo lateral de arcos", publicado en la REVISTA DE OBRAS PUBLICAS, noviembre, 1971.)

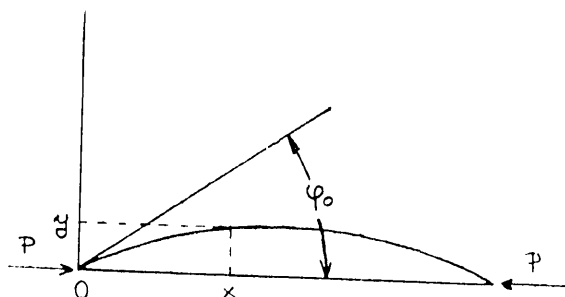


Figura 2.

Consideramos la pieza recta representada en la figura 2, sometida a la compresión uniforme p .

Suponiendo que admite una deformación compatible con las acciones a que está sometida (queremos decir una deformación transversal), la elástica puede ser deducida como sigue:

La ordenada y de un punto correspondiente a una abscisa x será el resultado de los corrimientos resultantes de los giros de las rebanadas comprendidas entre 0 y x . Para mayor claridad dividiremos la pieza en un número finito de rebanadas iguales. Al hacer crecer indefinidamente este número, y tender a cero el espesor de cada rebanada, obtendremos un valor límite de y , que será el que buscamos.

Por efecto del giro inicial, φ_0 , obtendremos:

$$y = x \varphi_0, \text{ (suponiendo } \varphi_0 \text{ muy pequeño)}$$

Siendo las abscisas correspondientes a las rebanadas sucesivas: $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2 \Delta x$, etc., tendremos:

Por el giro de la rebanada comprendida entre x_0 y x_1 :

$$y = (x - x_1) \Delta \varphi_1$$

donde $\Delta \varphi_1$ es el ángulo que flexiona la primera rebanada; o sea, su cara derecha respecto de la izquierda. Lo supondremos también muy pequeño. Y sí sucesivamente.

Pasando al límite:

$$y = x \varphi_0 + \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} (x - \alpha) d\varphi$$

A partir de esta última expresión se llega a la conocida ecuación de Euler, tal como puede verse en el trabajo "Estudio sobre pandeo lateral de arcos" antes citado.

Empleando métodos numéricos se tendría:

$$y_n = x \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \Delta \varphi_i$$

y otra relación análoga para y_{n+1} .

De ambas se deduciría:

$$y_{n+1} = y_n + \varphi_n \Delta x$$

donde:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n (x_n - x_i) \Delta \varphi_i$$

(El desarrollo completo puede verse en el mencionado trabajo.)

Además se tiene:

$$\Delta \varphi = \frac{M}{EI} \Delta x, \quad M = -p y, \quad \text{o sea:} \quad \Delta \varphi_i = -\frac{p}{EI} y_i \Delta x$$

De estas relaciones se deduce el proceso de cálculo numérico, esquematizado como sigue:

1. Se fija un valor inicial φ_0 arbitrariamente.
2. Se toma $y_0 = 0$.
3. Se va calculando sucesivamente:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_0 + \varphi_0 \Delta x \\ \varphi_1 &= \varphi_0 - \frac{p}{EI} y_1 \Delta x \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= y_{n-1} + \varphi_{n-1} \Delta x \\ \varphi_n &= \varphi_{n-1} - \frac{p}{EI} y_{n-1} \Delta x \end{aligned} \right\}$$

Se demuestra que los sucesivos valores de y_i y φ_i son proporcionales al valor inicial φ_0 .

El valor final de y es el correspondiente al extremo derecho de la pieza. Si este valor es nulo, la elástica deducida es compatible con las condiciones de sustentación de la pieza. Ahora bien, si tal ocurre, al partir de un valor diferente llegaremos también a un valor final nulo por la proporcionalidad establecida. Los demás valores de y_i , en cambio, variarán proporcionalmente con el valor φ_0 adoptado.

Este hecho conduce de inmediato a la interpretación de que en este caso, la

forma de la elástica ha quedado indeterminada. Si el valor de la fuerza p de compresión fuera nulo, el valor del corrimiento final sería: $y_n = L \varphi_0$ (L = longitud de la pieza). Si introducimos esfuerzos progresivamente mayores, las flexiones originadas harán bajar ese valor hasta conseguir uno que lo anule, el cual hará que la pieza, según acabamos de ver, resulte inestable elásticamente o, en otros términos, que pandee. (Prescindimos del estudio de otros estados críticos de pandeo, a los que se llegaría tras variaciones sucesivas del signo de los diversos y_i , estimando muy escaso el interés práctico, e incluso teórico, de los mismos.)

Para cargas superiores a la crítica entraríamos de lleno en el proceso explicado en el apartado 1.

Advertiremos, finalmente, que aprovechando la proporcionalidad existente entre los valores de y_i y φ_0 , para el cálculo efectivo podremos adoptar valores de φ_0 de cierta magnitud, evitando las dificultades que se presentarían al adoptarlos muy pequeños.

3.2. Acabamos de ver el papel fundamental que desempeña el hecho de que los valores y_i sean proporcionales a φ_0 . Esto ha sido posible por haber elegido un valor muy pequeño de este ángulo que nos ha permitido admitir: $\varphi_0 = \sin \varphi_0$. Volviendo a lo que decíamos en 2.1., esta hipótesis de "pequeñez" está justificada cuando el módulo de deformación elástica del material sea de valor muy elevado, pues las tensiones originadas por deformaciones de cierta magnitud serían muy superiores a las de rotura. Es decir, al sobrepasar la carga, el valor crítico deducido, se producirían deformaciones de tal magnitud que la pieza rompería antes de que fuera preciso abandonar la hipótesis citada.

En todo caso, aun cuando los valores del módulo no sean elevados, con esta hipótesis estudiamos la estabilidad en un entorno de la posición original.

Se ve inmediatamente también que la pequeñez de φ_0 y el valor elevado del módulo permiten admitir que los corrimientos son perpendiculares a la posición original de la directriz.

3.3. Examinaremos ahora el posible efecto de los otros esfuerzos que pueden actuar sobre cada sección o, más bien, dé la variación de dichos esfuerzos como consecuencia de la deformación de la pieza.

Tenemos, en primer lugar, el esfuerzo axil, cuyo valor, en cada sección, será el producto de p por el coseno de un ángulo muy pequeño, siendo, por tanto, despreciable la variación relativa de su valor.

En segundo lugar, el esfuerzo cortante, que en la posición original era nulo, deja de serlo al considerar la pieza deformada. Si es T_i el esfuerzo cortante que actúa en la sección i (correspondiente a la abscisa x_i), se tendrá:

$$T_i \Delta x = M_{i+1} - M_i$$

de donde se deduce que el valor de T_i es también proporcional al de φ_0 . Los corrimientos debidos a este esfuerzo serían traslaciones paralelas a las caras de la rebanada (y, por tanto, perpendiculares a la posición original de la elástica), que se sumarían, con su signo correspondiente, a los debidos a las flexiones. Estimamos que la influencia de los primeros es mucho menor que la de los segundos, razón por la que no los consideramos al establecer las ecuaciones de 3.1. De todas maneras, si se quisiera tenerlos en cuenta, bastaría añadir el término correspondiente en

la expresión de $y_{,,}$, resultando, en lo esencial, el mismo método y el mismo proceso de cálculo.

4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL PANDEO LONGITUDINAL DE ARCOS

Estudiaremos primero el caso del arco biarticulado, generalizando después a los demás tipos posibles de sustentación las conclusiones a que lleguemos. De esta manera, expondremos las ideas fundamentales a través de un caso particular, buscando la mayor sencillez y claridad posibles.

4.1. Los métodos usuales de cálculo utilizan el artificio de suponer deslizante una de las articulaciones (la derecha, por ejemplo). Bajo el efecto de las cargas, esta articulación experimenta un desplazamiento sobre el plano de deslizamiento (que podemos suponer horizontal). Se introduce a continuación un esfuerzo horizontal H , aplicado en el extremo deslizante, que produce un corrimiento opuesto al primero, volviendo a llevar dicho extremo a su posición original. De esta manera el arco queda en equilibrio estático, bajo la acción de las cargas, de las reacciones isostáticas del primer estado, y de la hiperestática H . Esta última suele ser llamada "empuje" del arco.

Las fórmulas que permiten hallar los valores de los corrimientos vienen dadas como funciones de los esfuerzos que actúan a lo largo del arco: esfuerzos axiales y cortantes, y momentos flectores.

Para hallar estos esfuerzos se desprecia el efecto de los corrimientos, apoyándose en la hipótesis de que éstos son muy pequeños. Por ejemplo, el momento flector en el punto a de la figura 3, inducido por la reacción vertical V , vendrá dado por:

$$M = V \cdot A'a \cdot \cos \alpha$$

en donde $A'a$ y α corresponden a la posición inicial del arco, sin deformarse. No son los valores exactos, pues éstos serían los correspondientes a la posición deformada del arco, pero dada la pequeñez de los corrimientos, la variación relativa de dichos valores se estima despreciable.

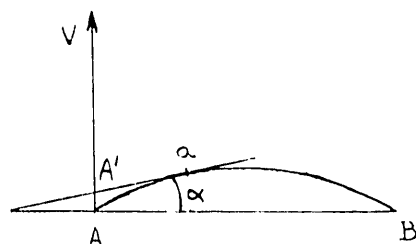


Figura 3.

4.2. Para analizar el fenómeno del pandeo longitudinal emplearemos el mismo artificio de hacer deslizante un apoyo, pero con la diferencia de que introduciremos empujes de valor variable, estudiando el comportamiento de la pieza en los diversos casos posibles.

Sea el arco representado en la figura 4, biarticulado, con la articulación derecha deslizante sobre el eje OX , en equilibrio estático bajo la acción de las cargas, de las reacciones verticales, de un esfuerzo horizontal introducido en el extremo derecho, y de una reacción horizontal en su extremo izquierdo (opuesta a ese esfuerzo). Es como si tomáramos una viga cur-

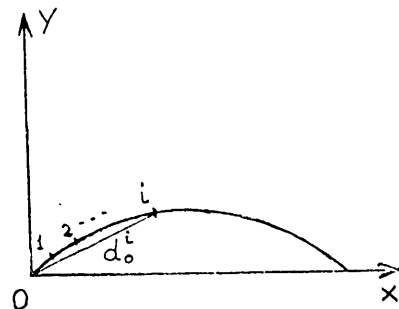


Figura 4.

va isostática, sometida a unas cargas, y le añadiríamos el esfuerzo horizontal como una sollicitación más.

Si se diera un caso crítico de inestabilidad elástica, la forma de la directriz del arco quedaría indeterminada, es decir, existirían infinitas posiciones de equilibrio elástico de la pieza, compatibles con las condiciones de sustentación, de manera análoga a lo que ocurriría en el caso de pandeo de la pieza recta. Estudiaremos la cuestión de una manera también análoga (apartado 3.1.).

La nueva posición i' de un punto i del arco será el resultado de los corrimientos debidos a un giro inicial y a los giros de flexión de las dovelas comprendidas entre 0 e i (sólo consideramos la influencia de los momentos flectores; examinaremos más adelante la influencia de los demás esfuerzos).

Nos referimos a flexiones adicionales sobre las que ya existían en la pieza en su posición original. Más claramente:

Partimos del ángulo φ_0 que forman las tangentes en el extremo izquierdo de la pieza, correspondientes a las dos posiciones de la misma. Este ángulo lo consideramos muy pequeño, de acuerdo con la hipótesis establecida, y ya comentada.

Dividiendo la pieza en un cierto número de dovelas iguales (el cual, posteriormente, haremos tender a infinito), tendremos, en primer lugar, un giro del punto 1 respecto del 0, de magnitud φ_0 . El corrimiento correspondiente será de magnitud $d_{01} \varphi_0$ (fig. 4).

Como consecuencia al momento ya existente en 1 se añade uno nuevo, M_1 , función de φ_0 .

El momento M_1 producirá un giro φ_1 en el punto 1, el cual, a su vez, provocará un desplazamiento de magnitud $d_{12} \varphi_1$ en el punto 2. La suma vectorial de los desplazamientos de 2 por efecto de los giros φ_0 y φ_1 nos dará su desplazamiento total, induciéndose un momento M_2 , el cual provocará un giro φ_2 en 2, y así sucesivamente.

Todos estos nuevos momentos se inducen como consecuencia de la variación del brazo mecánico de las compresiones, como ya anunciábamos en el apartado 1.

Utilizando nuevamente la hipótesis de pequeñez consideraremos despreciables las variaciones de distancias entre puntos de la directriz y de ángulos entre tangentes en los mismos. Esto lo tendremos en cuenta en la formulación de las expresiones a que lleguemos para el cálculo de los corrimientos.

Como resultado final del proceso obtendremos un corrimiento del extremo derecho de la pieza, que nuevamente nos permitirá decidir la cuestión.

Este punto es el que vamos a tratar a continuación.

4.3.1. Para mayor claridad de la exposición concretaremos las condiciones de carga del arco, suponiéndolo sometido a una carga vertical uniformemente repartida de valor P por unidad de longitud.

Consideramos, en primer lugar, los puntos 0 y 1 y el punto medio de la dovela 0 — 1, (1), que al tomar espacios muy pequeños podremos asimilar al punto medio de

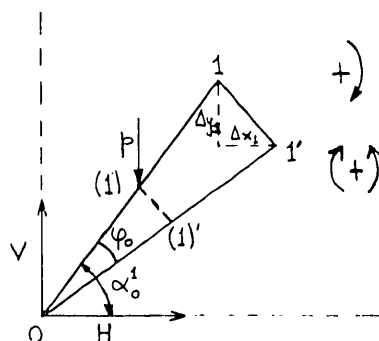


Figura 5.

segmento 0 — 1. Los signos de giros y momentos aparecen definidos en la figura 5.

Tras el giro, 1 y (1) pasan a ocupar las posiciones 1' y (1)', obteniéndose:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= (d_{0,1}^1 \sin \alpha_{0,1}^1 \varphi_0) \\ \Delta y_1 &= -(d_{0,1}^1 \cos \alpha_{0,1}^1 \varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

donde $d_{0,1}^1$ es la longitud del segmento 0 — 1.

El momento inducido en 1' será:

$$M_1 = v(M_1) + H(M_1) + {}^1(M_1) \quad [2]$$

en donde:

$v(M_1)$ = momento inducido por la reacción vertical.

$H(M_1)$ = momento inducido por la reacción horizontal.

${}^1(M_1)$ = momento inducido por el peso de la dovela 0 — 1.

Siendo además:

$$\left. \begin{aligned} v(M_1) &= V \Delta x_1 \\ H(M_1) &= -H \Delta y_1 \\ {}^1(M_1) &= -p (\Delta x_1 - \Delta x_{1,1}) \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

Sistema que quedará completado con:

$$p = P \Delta s; \quad s = \frac{S}{n}$$

donde S es la longitud del arco, y n , el número de dovelas.

$$\varphi_1 = -\frac{M_1}{EI} \Delta s \quad [4]$$

$$\Delta x_{1,1} = \frac{1}{2} (0 + \Delta x_1) \quad [5]$$

Para un punto genérico i se tendría:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &= \sum_{h=0}^{i-1} (d_{h,i}^i \sin \alpha_{h,i}^i) \varphi_h \\ \Delta y_i &= -\sum_{h=0}^{i-1} (d_{h,i}^i \cos \alpha_{h,i}^i) \varphi_h \end{aligned} \right\} \quad [1']$$

$$M_i = v(M_i) + H(M_i) + \sum_{k=1}^i (M_i) \quad [2']$$

$$\left. \begin{aligned} v(M_i) &= V \Delta x_i \\ H(M_i) &= -H \Delta y_i \\ k(M_i) &= -p (\Delta x_i - \Delta x_{i,k}) \end{aligned} \right\} \quad [3']$$

$$\varphi_i = -\frac{M_i}{EI} \Delta s \quad [4']$$

$$\Delta x_{(k)} = \frac{1}{2} (\Delta x_{k-1} + \Delta x_k) \quad [5']$$

En forma integral se tendría:

$$\begin{aligned} \Delta x_s &= d_{s0} \sin \alpha_{s0} \varphi_0 - \int_0^s \left[d_{st} \sin \alpha_{st} \frac{M_t}{EI} \right] dt \\ \Delta y_s &= -d_{s0} \cos \alpha_{s0} \varphi_0 + \int_0^s \left[d_{st} \cos \alpha_{st} \frac{M_t}{EI} \right] dt \end{aligned}$$

donde d_{st} , $\sin \alpha_{st}$, $\cos \alpha_{st}$ y M_t son funciones de t y lo mismo l .

$$M_t = V \Delta x_t - H \Delta y_t - p \int_0^t (\Delta x_t - \Delta x_u) du$$

Observaremos además que las relaciones [1] y [5] ponen de manifiesto que Δx_1 , Δy_1 y $\Delta x_{(1)}$ son proporcionales a φ_0 . Las [2], [3] y [4] nos dicen que también M_1 y φ_1 son proporcionales a φ_0 .

Suponiendo que así sucede hasta el punto $i-1$, las relaciones anteriores, referidas al punto i , ponen de manifiesto a su vez, la proporcionalidad de Δx_i , Δy_i , $\Delta x_{(i)}$, φ_i y M_i con φ_0 .

Según esto será:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &= K_1 \varphi_0 \\ \Delta y_i &= K_2 \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad y_i = \frac{K_2}{K_1} \Delta x_i$$

lo que demuestra que los corrimientos, además de ser de magnitud proporcional a φ_0 , son de dirección constante, hechos ambos de significativa importancia como vamos a ver.

(NOTA.—Las conclusiones que acabamos de obtener son independientes de la forma geométrica de la directriz, del sistema de cargas y de la ley de variación de la inercia como es fácilmente observable. Dichas conclusiones son, por tanto, generales.)

4.3.2. La condición impuesta por la sustentación es que sea $\Delta y_n = 0$. Supongamos que para un esfuerzo horizontal H , de valor nulo, resulta $\Delta y_n \neq 0$, y que aumentando la magnitud de dicho esfuerzo llegamos a un valor de H , para el que resulta $\Delta y_n = 0$ y $\Delta x_n \neq 0$.

La propiedad que hemos deducido, por la cual todos los corrimientos posibles,

correspondientes a un mismo punto, son de magnitud proporcional a φ_0 y de dirección constante, nos conduce a la siguiente interpretación:

El valor de Δx_n para este valor H queda indeterminado. Varía proporcionalmente al valor de φ_0 , resultando que la viga curva analizada admite infinitas posiciones de equilibrio compatibles con las condiciones de sustentación; es decir, que ha llegado a la situación crítica de pandeo. Para cualquier incremento del valor de H , por pequeño que sea el extremo derecho de la pieza, se desplazará indefinidamente en la dirección del esfuerzo. Y con ese valor de H , para un cierto valor de φ_0 , conseguiremos que el extremo derecho de la pieza ocupe el lugar que le correspondería si no hubiera abandonado su condición de arco; es decir, el apoyo derecho de éste.

Este valor de H es, por tanto, el mayor empuje que puede proporcionar el arco. En consecuencia, si por los métodos usuales de cálculo determinamos un empuje inferior al anterior, el resultado es correcto, y el arco, elásticamente estable. Si, por el contrario, ese empuje es superior, el resultado es falso, por no haber tenido en cuenta en el proceso de cálculo (con su artificio de hacer deslizante el apoyo) la posibilidad de que surja una situación de inestabilidad elástica. En este último caso, el arco permanecerá en equilibrio estático bajo la acción de las cargas, de las reacciones isostáticas y del empuje máximo. Siendo así que éste es inferior al determinado por los métodos usuales, la consecuencia podría ser un alejamiento del arco de las condiciones de antifunicularidad, con el riesgo de que se produzca la rotura por esta causa.

El método seguido ha consistido, pues, en estudiar la estabilidad elástica de la viga curva isostática, en la que sí puede darse un fenómeno de pandeo, según hemos visto, y después introducir la condición de invariabilidad de distancia entre apoyos propia del arco, llegando luego a la conclusión que se expone en el párrafo anterior. Según ella, en el arco no se da propiamente un fenómeno de pandeo, sino lo que pudiéramos llamar una *"limitación de la capacidad de empuje"*.

4.3.3. La hipótesis establecida en el apartado anterior ($\Delta y_n = 0$, $\Delta x_n \neq 0$, para el menor valor de H , que hace que $\Delta y_n = 0$) es, evidentemente, la más general.

Otro caso posible es que para $H = 0$ resulte $\Delta y_n = 0$, que es un caso particular del anterior. Bajo estas condiciones, el arco no es capaz de proporcionar ningún empuje. La misma viga curva isostática se encuentra en una situación crítica de pandeo, ya antes de introducir esfuerzo horizontal alguno en su apoyo derecho (ya que Δx_n queda indeterminado, variando en proporción a φ_0).

Y, finalmente, queda el caso en que Δx_n y Δy_n se anulan simultáneamente para un cierto valor de H (que pudiera ser nulo). En estas circunstancias, en la viga curva se da también una situación crítica de pandeo, pero de naturaleza diferente a la de la que vimos anteriormente, pues el extremo derecho de la pieza permanece fijo para todas las infinitas posiciones de equilibrio elástico. El fenómeno adquiere, pues, una apariencia muy similar al del pandeo de la pieza recta. Si esta situación se produce para un valor de H superior al calculado para el empuje por los métodos usuales el arco es elásticamente estable. Si los dos valores coinciden, el arco se encontrará en situación crítica de pandeo (es el único caso en que esto sucede). Y si el primer valor es inferior al segundo, el arco habrá rebasado las condiciones críticas de pandeo.

4.4. Lo que hemos expuesto hasta aquí proporciona una imagen completa del fenómeno del pandeo longitudinal de los arcos biarticulados en sus apoyos.

Vimos anteriormente que para estudiar el pandeo de la pieza recta era preciso prescindir de unas condiciones ideales, admitidas para estudiar situaciones en las que no se tuvieran en cuenta posibles fenómenos de inestabilidad elástica o en las que no existiera la posibilidad de tales fenómenos. Estas condiciones ideales consistían fundamentalmente en suponer que la directriz (perfectamente rectilínea) mantenía su posición primitiva. Siendo así, no existía la posibilidad de un aumento indefinido del brazo mecánico de las compresiones. La condición ideal de carga perfectamente centrada se establecía para el caso de compresión uniforme, precisamente para evitar que hubiera flexiones que pudieran alterar la rectilineidad de la directriz.

En el caso general existirán flexiones en la pieza que alterarán ya esta rectilineidad, si bien esta alteración no se tiene en cuenta para estudiar fenómenos diferentes del pandeo (fundamentalmente para el cálculo de los esfuerzos y tensiones consiguientes). Sucede como si se considerara la pieza bajo el efecto de unos momentos flectores, unos esfuerzos cortantes y unos esfuerzos axiales situados sobre la directriz, que se supone sigue siendo perfectamente rectilínea. Dicho de otra manera, se admite que la deformación de la directriz no tiene influencia apreciable en la distribución de los esfuerzos. O sea, la invariabilidad de dicha directriz es la condición ideal fundamental, realmente la única.

Para estudiar el pandeo longitudinal de arcos se prescinde de la condición ideal de que la directriz mantiene su forma geométrica primitiva. Esta condición se establecía para no tener en cuenta la alteración de esa forma a efectos de analizar la distribución de esfuerzos. El abandono de esa hipótesis permite, nuevamente, considerar la posibilidad de un aumento indefinido del brazo mecánico de las compresiones.

Se puede observar que el pandeo de la pieza recta es un caso particular del pandeo de la viga curva isostática, ya que la condición $\Delta y_{,i} = 0$ es idéntica en ambos casos. La particularidad proviene de que, en la pieza recta, los corrimientos resultan ser todos perpendiculares a la directriz ($\Delta x_i = 0$ para todo i).

5. CASOS CONCRETOS ANALIZADOS

5.1. Tomaremos un arco de directriz circular, inercia constante $I = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, módulo de elasticidad $E = 2,5 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, 50 m de luz y 20 m de flecha.

El sistema de fórmulas de 4.3.1 quedará completado con las siguientes:

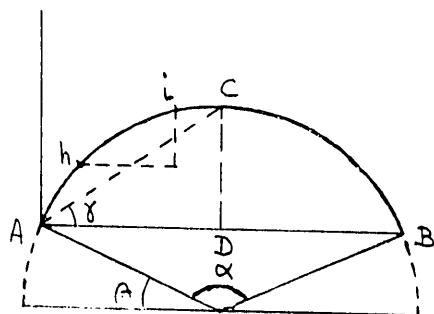


Figura 6.

$$E = 2,5 \times 10^6$$

$$I = 4 \times 10^{-3}$$

$$AB = 50$$

$$CD = 20$$

$$\gamma = \arctg \frac{2CD}{AB}$$

$$\beta = \pi/2 - 2\gamma$$

$$R = \frac{1}{2} AB / \cos \beta$$

$$\begin{aligned}
S &= R \alpha \\
\Delta \alpha &= \alpha/n \\
\Delta s &= S/n \\
p &= P \Delta s \\
\operatorname{tg} \alpha_{i_h} &= (y_i - y_h)/(x_i - x_h) \text{ (cosenos positivos)} \\
x_i &= R [\cos \beta - \cos (\beta + i \Delta \alpha)] \\
y_i &= R [\operatorname{sen} (\beta + i \Delta \alpha) - \operatorname{sen} \beta] \\
d_{i_h}^2 &= [(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2]^{1/2} \\
V &= \frac{1}{2} P \Delta s
\end{aligned}$$

Para el cálculo del empuje por métodos usuales tendremos además:

$$\begin{aligned}
(M)_i &= V x_i - p \sum_{k=1}^i (x_i - x_{i_k}) \\
H &= \left| \sum_{i=0}^n (M)_i y_i \right| / \left| \sum_{i=0}^n (y_i)^2 \right|
\end{aligned}$$

Con estos sistemas de fórmulas se ha elaborado el programa que aparece al final del trabajo.

5.2. Daremos cuenta, seguidamente, de los resultados de una serie de cálculos, interpretando los resultados de acuerdo con las ideas expuestas en 4.3.2.

En primer lugar se estudió la convergencia de esos resultados al aumentar el número de dovelas. Con $P = 1$, $\varphi_0 = 20^\circ$, y H el deducido por la última fórmula del apartado anterior se ensayaron los valores: $n = 100, 200, 300$ y 500 dovelas.

Los valores de los corrimientos para el punto n aparecen en el cuadro siguiente:

n	100	200	300	500
x_n	12,06	12,02	12,00	11,99
y_n	4,17	4,24	4,26	4,28

En este cuadro se aprecia la convergencia de los resultados. Para los cálculos posteriores hemos estimado suficiente la aproximación proporcionada por $n = 300$.

En segundo lugar, se tantearon los valores $P = 1/2$ y $P = 2$, con $\varphi_0 = 20^\circ$, tomando, también, el valor de H deducido por los métodos de cálculo usuales. Los resultados fueron:

P	$1/2$	1	2
x_n	9,10	12,00	8,65
y_n	— 3,78	4,26	10,11

Con arreglo a este cuadro se ha hecho el diagrama número 1. (En este diagrama las curvas hubieran quedado mejor encajadas si hubiéramos considerado más valores de P , pero, desde nuestro punto de vista, creemos suficiente dar una idea aproximada de su aspecto.) Se ve que el valor de H , deducido por los métodos de cálculo usuales, para $P \sim 0,65$ coincide con el empuje máximo que puede proporcionar el arco.

Finalmente se ensayaron una serie de casos con $P = 1$, $\varphi_0 = 20^\circ$, $H = 0,0, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$ y $1,0$. El empuje deducido por los métodos usuales resultó ser: $H = 16,69$. Los resultados fueron:

H	0,0	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0
x_H	10,47	10,51	10,53	10,56	10,58	10,68
y_H	-0,128	-0,053	-0,016	0,022	0,059	0,242

De acuerdo con estos resultados se ha realizado el diagrama número 2, que nos permite afirmar que el empuje máximo es, aproximadamente, 0,34.

En este caso encontramos una gran discrepancia entre este valor y el deducido por medio de los métodos usuales. Esta discrepancia no es fruto de la casualidad, sino de haber elegido un valor bajo de la inercia, intencionadamente, que proporcione una esbeltez tal que haga ponerse de manifiesto la "limitación de la capacidad de empuje" del arco (fenómeno en cierto modo equivalente, desde un punto de vista práctico, al de pandeo en otros tipos estructurales). En efecto, suponiendo que el arco es de sección rectangular, con una anchura de 0,30 m, resulta un canto de 0,54 m.

Dado que el valor adoptado para E ($2,5 \times 10^4$ t/m²), es propio del hormigón, cualquier ingeniero algo familiarizado con el proyecto de este tipo de estructura consideraría que la esbeltez es muy elevada y que sería sumamente probable un fenómeno de naturaleza semejante al de pandeo (o de pandeo, simplemente), aunque no poseyera criterio teórico alguno en qué apoyarse, e incluso, aunque hubiera comprobado que el arco es capaz de resistir las sollicitaciones por los métodos usuales de cálculo. (Nota: incluimos este párrafo porque consideramos muy útil una aproximación intuitiva al fenómeno.)

6. EFECTO DE LAS VARIACIONES DE LOS ESFUERZOS AXIL Y CORTANTE

6.1. Consideraremos, en primer lugar, el concerniente al esfuerzo axil.

Según hemos visto anteriormente (4.2. y 4.3.1.), introduciendo el giro inicial φ_0 se producían flexiones a lo largo de toda la pieza. El giro de una sección cualquiera se obtiene integrando los giros de flexión de las dovelas situadas a la izquierda. Esta integración, para un punto i del arco, con la notación que antes establecimos, vendrá dada por:

$$\gamma_i = \sum_{k=0}^{i-1} \varphi_k$$

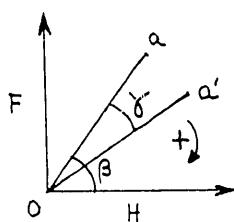


Figura 7.

de donde se deduce que γ_i es proporcional a φ_0 . Para analizar el efecto del giro sobre el valor del esfuerzo axial, partamos de la figura 7, en la que se han representado las fuerzas F y H , vertical y horizontal, que actúan sobre una pieza recta o a , la cual, mediante un giro γ , pasa a ocupar la posición o a' . Sean N' y N'' las variaciones de las compresiones causadas por F y H , respectivamente. Tendremos, suponiendo que γ es muy pequeño:

$$\left. \begin{aligned} N' &= F [\text{sen} (\beta - \gamma) - \text{sen} \beta] \simeq -(F \cos \beta) \gamma \\ N'' &= H [\cos (\beta - \gamma) - \cos \beta] \simeq (H \text{sen} \beta) \gamma \end{aligned} \right\}$$

La variación total será: $N = N' + N''$.

En el caso analizado en 4.3.1., para un punto i del arco, resulta ser:

En vez de F , $V_i = (V - P s_i)$, con $s_i = i \Delta s$

En vez de β , $\beta_i = \alpha_{i-1}$ (al aumentar n , β_i tiende al valor de la pendiente)

Resultando:

$$\left. \begin{aligned} N'_i &= -(V_i \cos \beta_i) \gamma_{i-1} \\ N''_i &= (H \text{sen} \beta_i) \gamma_{i-1} \end{aligned} \right\} N_i = N'_i + N''_i \text{ (proporcional a } \varphi_0 \text{, ya que } \gamma_{i-1} \text{ lo es)}$$

Siendo A la sección del arco, la variación de espesor de la dovela definida por los puntos $i-1$ e i , resulta ser:

$$\epsilon_i = -\frac{N_i}{EA} \Delta s \text{ (proporcional a } \varphi_0 \text{)}$$

Estos acortamientos (o alargamientos) producirán corrimientos en los puntos de la directriz, siguiendo un mecanismo análogo al de los corrimientos debidos a los giros de flexión, que estudiamos en 4.2. En el caso presente son traslaciones ϵ_i , en la dirección de las tangentes a la directriz. Es decir, por efecto de la variación ϵ_i , todos los puntos de la directriz situados a la derecha de i sufrirán una traslación ϵ_i .

El corrimiento de un punto i se obtendrá, pues, integrando las traslaciones a que dan lugar las dovelas situadas a su izquierda. Las componentes de este corrimiento serán:

$$\begin{aligned} \delta_1 x_i &= \sum_{k=1}^{i-1} \epsilon_k \cos \beta_k \\ \delta_1 y_i &= \sum_{k=1}^{i-1} \epsilon_k \text{sen} \beta_k \end{aligned}$$

que son proporcionales a φ_0 , resultando constante, por tanto, la dirección de los corrimientos.

Habida cuenta de esta proporcionalidad, el considerar este efecto se traduce en añadir un término a las expresiones [1]' de 4.3.1., sin que esto suponga una al-

teración sustancial del método ni del proceso de cálculo, que, realmente, siguen siendo los mismos.

La inclusión de estos términos en las expresiones integrales de 4.3.1. es inmediata.

6.2. De la misma figura del apartado anterior se deducen las variaciones del esfuerzo cortante, resultando:

$$\left. \begin{aligned} T' &= (F \operatorname{sen} \beta) \gamma \\ T'' &= -(F \cos \beta) \gamma \end{aligned} \right\} T = T' + T''$$

Y en el arco:

$$\left. \begin{aligned} T'_i &= (V_i \operatorname{sen} \beta_i) \gamma_{i-1} \\ T''_i &= -(V_i \cos \beta_i) \gamma_{i-1} \end{aligned} \right\} T_i = T'_i + T''_i \text{ (proporcional a } \varphi_0)$$

Siendo G el módulo de deformación angular, los corrimientos elementales (esta vez normales a la directriz) serán:

$$x_i = \frac{T_i}{G A} \Delta s$$

Por lo que el corrimiento total del punto i vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \delta_2 x_i &= - \sum_{l=1}^{i-1} x_{l.} \operatorname{sen} \beta_{l.} \\ \delta_2 y_i &= \sum_{l=1}^{i-1} x_{l.} \cos \beta_{l.} \end{aligned}$$

ambos proporcionales a φ_0 .

Las conclusiones son análogas a las del caso de los esfuerzos axiles.

6.3. Los dos efectos analizados, en la práctica, no suelen ser tenidos en cuenta, ya que normalmente influyen en mucha menor proporción que las flexiones. De ahí que anteriormente hubiéramos dicho que la causa del fenómeno que llamamos "limitación de la capacidad de empuje" era el aumento indefinido del brazo mecánico de las compresiones.

Ahora hemos visto que la variación de los esfuerzos axiles y cortantes tiene también su influencia en el fenómeno, si bien menor.

7. GENERALIZACION DEL METODO A OTROS TIPOS DE SUSTENTACION

7.1. Si el apoyo izquierdo es empotrado, bastará introducir en él un momento M_0 , que hará un papel análogo al del ángulo φ_0 que introducíamos en el caso de que fuera articulado. Si, además, el apoyo derecho es articulado, la estabilidad estática de la pieza exigirá la acción de dos reacciones verticales, una en cada apo-

yo, que formen un par cuyo momento anule el introducido. Siendo f el valor de estas reacciones, y L la luz de la pieza, se tendrá:

$$M_0 = -fL (*)$$

Es decir: en el extremo izquierdo de la pieza existirán, por una parte, las reacciones V y H , y por otra, el momento M_0 y la fuerza vertical f (con el signo que le corresponda).

El proceso de cálculo es esencialmente el mismo que se estableció en 4.3.1, con algunas particularidades que vamos a resaltar:

En primer lugar, aquí el giro inicial es nulo, por lo que las ecuaciones [1] se convierten en:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= 0 \\ \Delta y_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

En segundo lugar, en la expresión de M_1 , dada por la ecuación [2], hay que añadir los términos correspondientes a M_0 y f , resultando:

$$M_1 = M_0 + f(x_1 + \Delta x_1) + {}^I(M_1) + {}^{II}(M_1) + {}^I(M_1)$$

Además, las ecuaciones [3] ponen de manifiesto que:

$${}^I(M_1) = {}^{II}(M_1) = {}^I(M_1) = 0$$

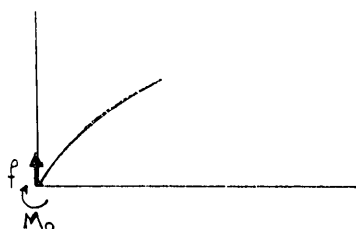


Figura 8.

y ya que antes vimos que f es proporcional a M_0 , deduciremos que M_1 es proporcional a M_0 .

La ecuación [4] pone de manifiesto que φ_1 es proporcional a M_0 , y la [5] mantiene la misma forma.

Las siguientes ecuaciones [1'], etc., no varían, a excepción de la [2'], que resulta ser:

$$M_i = M_0 + f(x_i + \Delta x_i) + {}^I(M_i) + {}^{II}(M_i) + {}^I(M_i)$$

(Es trivialmente demostrable que Δx_i , Δy_i , M_i y φ_i son proporcionales a M_0 . Además, el término $f(x_i + \Delta x_i)$ puede quedar reducido a $f x_i$, dada la pequeñez de Δx_i relativamente a x_i).

7.2. Si ambos extremos son empotrados introduciremos un momento M_0 en el apoyo izquierdo, que transmitirá otro, M'_0 , al apoyo derecho de la viga curva isostática (el cual si bien es deslizante no queda liberado de la condición de empotramiento). Para el equilibrio estático de la pieza será necesario contar con un par de reacciones verticales de valor f tal que:

$$M_0 + M'_0 = -fL$$

Si se determina f , el proceso de cálculo es análogo al explicado en el apartado anterior. Bastará, pues, que determinemos f .

(*) M_0 no tiene por qué ser muy pequeño. Aunque sea de cierta magnitud, las deformaciones que provoca serán pequeñas.

Para ello es necesario contar con la condición de empotramiento en el extremo derecho, que impone que el giro de la última sección sea nulo. Suponiendo que la pieza está bajo la acción de M_0 , M'_0 , y el par de reacciones f se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} M_i &= M_0 + f x_i \\ \varphi_i &= -\frac{M_i}{EI} \Delta s \end{aligned} \right\}$$

cuyo significado es evidente.

Si es γ_i , el ángulo total girado por la sección i se tendrá:

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^i \varphi_k = \frac{-1}{EI} \left[M_0 s_i + f \Delta s \sum_{k=0}^i x_k \right]$$

donde s_i es la longitud del arco definido por los puntos 0 e i . (Esta expresión es válida para I constante; si fuera variable es inmediato establecer, tanto la correspondiente a ésta como a las siguientes expresiones.)

La condición a cumplir es $\gamma_n = 0$, de donde resulta:

$$M_0 S = -f \Delta s \sum_{k=0}^n x_k$$

que en forma integral sería:

$$M_0 S = -f \int_0^S x ds$$

(NOTA.—Las condiciones iniciales M_0 y f se introducen, de acuerdo con el método expuesto, para provocar unos corrimientos Δx_i y Δy_i). Por tanto, en rigor, en las fórmulas anteriores en vez de x_k , x_i , debiera escribirse $x_k + \Delta x_k$, $x_i + \Delta x_i$, pero, como hemos supuesto que los corrimientos son muy pequeños, su influencia, a la hora de hallar el valor de f mediante aquellas fórmulas, es despreciable. Lo que acabamos de decir se extiende también al efecto de los corrimientos sobre el ángulo de giro de la sección final como consecuencia de la acción de las solicitaciones y del esfuerzo horizontal; es decir, aceptamos los resultados obtenidos por los métodos de cálculo usuales, los cuales no tienen en cuenta estos corrimientos. Se ponen así de manifiesto, una vez más, las consecuencias derivadas de la hipótesis de "pequeñez" de las deformaciones.)

7.3. Los resultados del apartado anterior pueden aplicarse a un caso de cierto interés, que es el de un anillo circular sometido a una presión externa uniforme.

Considerando dos mitades separadas por un diámetro, el caso se reduce al de un arco circular biempotrado o, mejor dicho, al de una viga curva biempotrada, ya que no existe coacción externa alguna que obligue a mantener

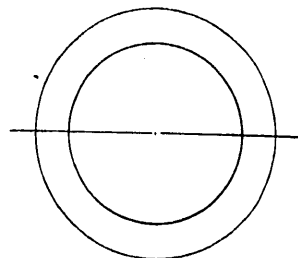


Figura 9.

fija la distancia entre apoyos. Por tanto, en este caso sí se puede dar un fenómeno de pandeo propiamente dicho.

7.4. Los arcos con algún empotramiento elástico son un caso intermedio entre los articulados y los empotrados. En un apoyo de esta clase habría que introducir en ángulo y un momento iniciales.

7.5. La aplicación del método al caso de un arco atirantado es inmediata: existirá una limitación del empuje transmitido por el arco al tirante, y el fenómeno será en todo igual al analizado en 4 y posteriores.

```

A FORTRAN IV (VÉRY037) SOURCE LISTING:

1      PROGRAM JHOTO3
2 C
3 C      ESTUDIO SOBRE PANDEO LONGITUDINAL DE ARCOS
4 C      *****
5 C
6      DIMENSION X(1001),Y(1001),FI(1001),DELX(1001),DELY(1001)
7      PI=3.1415927
8      READ(5,600)E,A1,AB,CD,F10GPA,P,N
9      600 FORMAT(2L10.1,4F10.1,1J)
10     F10=F10GPA*PI/180.
11     100 READ(5,500,END=7)HSUP
12     500 FORMAT(F10.1)
13     WRITE(6,700)E,A1,AB,CD,N,P,F10GPA
14     700 FORMAT(1H1,'E = ',1PE9.3,5X,'I = ',1PE9.3,5X,'AB = ',2PE9.2,5X,
15     'CD = ',2PE9.2,2//1X,'W = ',14,10X,'P = ',1PE9.2,5X,'F10 = ',2PE9.2)
16     N1=N+1
17     U=ATN(2.*E/AB)
18     B=PI/2.-2.*U
19     A=PI-2.*B
20     R=AB/(1.-COS(B))
21     S=R*A
22     DELSE=S/N
23     L=LAL*A/N
24     PP=P*DELSE
25     DO 1 I=1,N1
26     AA=1
27     J(I)=R*(COS(B)-COS(B+AA*DELAL))
28     Y(I)=P*(N1*B-AA*DELAL)-S1N(B)
29     V=P*S/2.
30     S1=0
31     S2=0
32     DO 3 I=1,N1
33     S3=0
34     DO 2 J=2,I
35     2 S3=S3+(X(I)-(X(J-1)+X(J))/2.)
36     AM=V*(X(I)-PP+S3)
37     S1=S1+AM+Y(I)
38     S2=S2+J(I)*Y(I)
39     H=S1/S2
40     WRITE(6,700)HSUP,H
41     700 FORMAT(/'H SUPUESTA = ',1PE13.5,10X,'H CALCULADA = ',1PE13.5/
42     'I/' DELX(I) DELY(I)
43     DELX(I)=0
44     DELY(I)=0
45     FI(I)=F10
46     I=1
47     WRITE(6,300)I,DELX(I),DELY(I),FI(I)
48     300 FORMAT(14,E22.7,2E23.7)
49     DO 6 I=2,N1
50     I1=I-1
51     DELX(I)=0
52     DELY(I)=0
53     DO 4 J=1,I1
54     SANG=SIGN(ATAN((Y(I)-Y(J))/(X(I)-X(J))))
55     CANG=SIGN(1.-SANG*SANG)
56     DIS=SIGN((X(I)-X(J))*2+(Y(I)-Y(J))*2)
57     DELX(I)=DELX(I)+DIS*SANG*FI(J)
58     DELY(I)=DELY(I)-DIS*CANG*FI(J)
59     4 AMIY=Y+DELY(I)
60     AMIX=X-HSUP*DELY(I)
61     AMIKP=0
62     DO 5 K=2,I
63     DELKP=(DELX(K-1)+DELY(K))/2.
64     5 AMIAP=AMIKP-PP*(DELX(I)-DELKP)
65     AMI=AMIY+AMIH+AMIKP
66     FI(I)=AMI/DELSE/(E*A)
67     WRITE(6,300)I,DELX(I),DELY(I),FI(I)
68     6 IF (MOD(I,55).EQ.0)WRITE(6,400)
69     400 FORMAT(1H1//'I DELX(I) DELY(I)
70     1 GO TO 100
71     7 STOP
72     END

```

Figura 11.

8. CASO DE UN ARCO TRIARTICULADO

8.1. Los arcos estudiados hasta el momento son hiperestáticos. El método desarrollado permite estudiarlos utilizando el artificio de liberarlos de una de las coacciones (la que fija la distancia entre apoyos), quedando sometido a las otras, las cuales aseguran el equilibrio estático de la pieza.

Este método, tal como ha sido expuesto, no resulta, pues, aplicable a arcos isostáticos, en los que ninguna coacción puede ser suprimida sin que se pierda la estabilidad estática.

Como caso más representativo de arco isostático encontramos el de tres articulaciones. Para el estudio de su estabilidad elástica adaptaremos el método expuesto anteriormente a sus características propias.

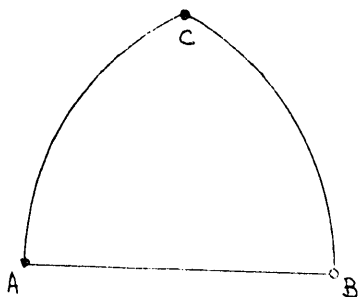


Figura 10.

8.2. Como en 4, introduciendo un giro φ_A , muy pequeño, en la articulación A, admitiendo que las reacciones isostáticas no se ven alteradas por las pequeñas deformaciones derivadas (que es, una vez más, consecuencia de la hipótesis de "pequeñez" de las deformaciones como es fácilmente observable) se desencadenará una serie de corrimientos proporcionales a φ_A y de dirección constante. Estos corrimientos vendrán dados por ecuaciones análogas a las de aquel caso.

Así obtendremos un corrimiento C_A de la articulación C. Si hubiéramos partido de B mediante un giro φ_B , obtendríamos un corrimiento C_B . Si ambos fueran de la misma dirección, la posición de C quedaría indeterminada en función de dos ángulos, φ_A y φ_B , que habrán de guardar una proporción determinada. Se habría producido un fenómeno de pandeo propiamente dicho.

Si, por el contrario, ambos corrimientos fueran de dirección distinta, el arco en conjunto sería elásticamente estable. Habría que estudiar, sin embargo, la estabilidad de cada semiarco A C y B C, que dada la fijeza de C se comportan como arcos biarticulados.

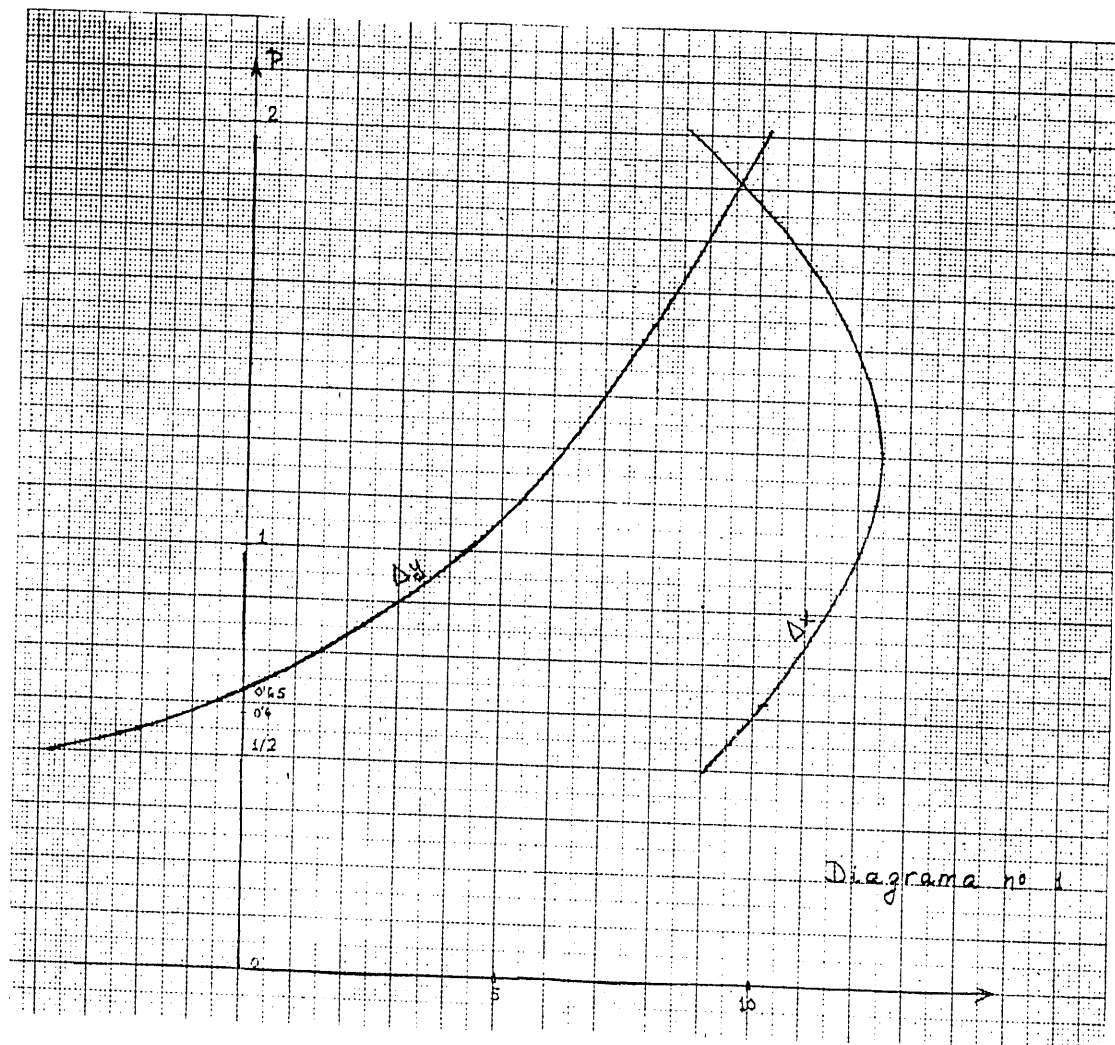


Figura 12.

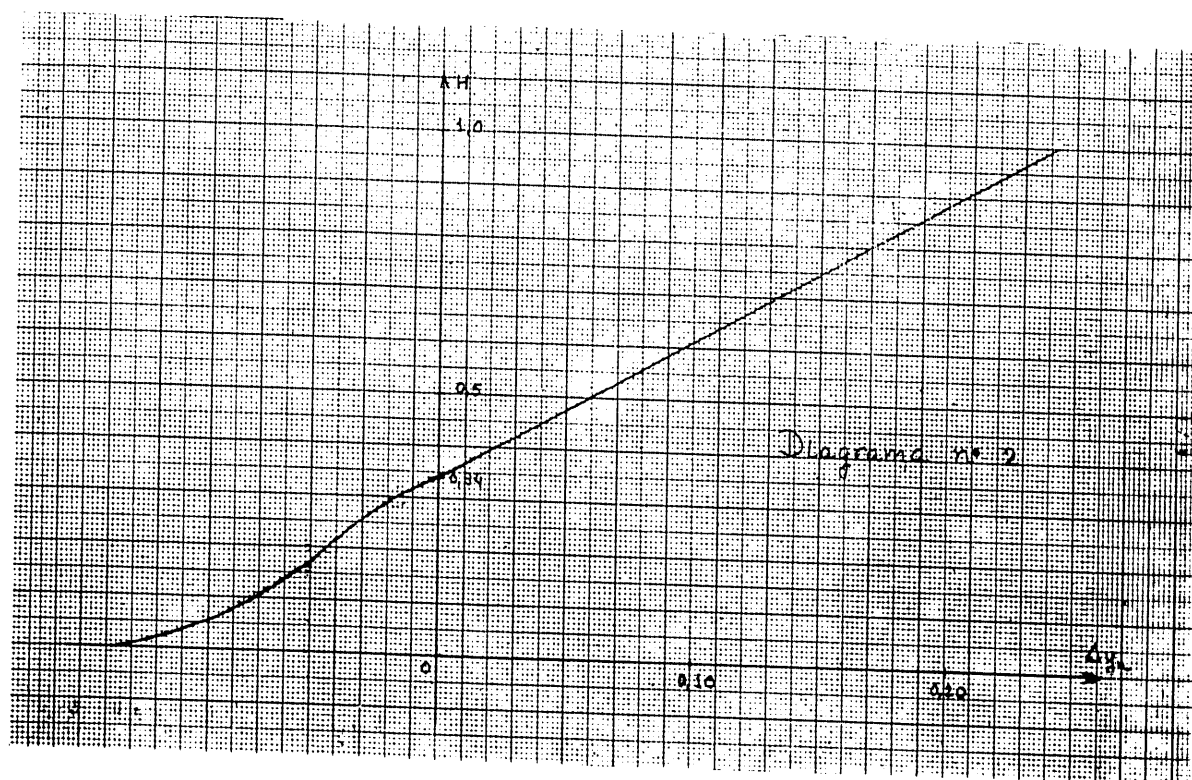


Figura 13.