

LA SOLUCION GENERAL DEL PROBLEMA ELASTICO CON FUERZAS DE MASA NULAS(*)

Por ANTONIO LECHUGA ALVARO
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

A partir de la ecuación general de la elasticidad con fuerzas de masa nulas, se llega a la solución general del vector desplazamiento en función de un vector biarmónico $\vec{f}$ y de un vector irrotacional $\vec{\nabla} \varphi$ y, a partir de ella, al tensor de tensiones se aplica a continuación la solución general hallada al caso particular de deformación plana, previo establecimiento de condiciones suplementarias.

1. CASO GENERAL

La ecuación general de la elasticidad sin fuerzas másicas se puede expresar vectorialmente por:

$$(\lambda + G) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + G \Delta \vec{u} = 0 \quad (1)$$

en donde:

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

siendo E el módulo de elasticidad y σ el módulo de Poisson, $\vec{u}$ es el vector desplazamiento que ha de cumplir la ecuación (1), que es la de equilibrio interno en función de los corrimientos.

En cada punto del sólido elástico existe, por tanto, un campo de vectores $\vec{u}$ que cumplen con la ecuación antedicha.

La solución general de $\vec{u}$, que cumple con la referida ecuación, la podemos poner en función de un vector biarmónico $\vec{f}$ y de un vector irrotacional $\vec{\nabla} \varphi$, veremos en qué condiciones:

Podremos expresar $\vec{u}$ por el siguiente valor:

$$\vec{u} = \Delta \vec{f} + A \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{f}$$

siendo:

$$\Delta \Delta \vec{f} = 0 \quad \Delta \vec{f} = \Delta f_x \vec{i} + \Delta f_y \vec{j} + \Delta f_z \vec{k}$$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la redacción de esta Revista hasta el 28 de febrero de 1975.

y A una constante a determinar para que se cumpla idénticamente la ecuación (1).
En efecto:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \Delta \vec{f} + A \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{f} \\ \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div} (\Delta \vec{f}) + A \Delta (\operatorname{div} \vec{f})\end{aligned}$$

Pero sabemos que:

$$\operatorname{div} (\Delta \vec{f}) = \Delta (\operatorname{div} \vec{f})$$

luego:

$$\operatorname{div} \vec{u} = (1 + A) \Delta (\operatorname{div} \vec{f})$$

igualmente:

$$\Delta \vec{u} = A \vec{\nabla} \Delta \operatorname{div} \vec{f}$$

ya que igualmente:

$$\Delta (\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{f}) = \vec{\nabla} (\Delta \operatorname{div} \vec{f})$$

entrando con estos valores en la ecuación de equilibrio obtenemos:

$$(\lambda + G) \vec{\nabla} [(1 + A) \Delta (\operatorname{div} \vec{f})] + G A \vec{\nabla} (\Delta \operatorname{div} \vec{f}) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$[(\lambda + G) (1 + A) + G A] \vec{\nabla} (\Delta (\operatorname{div} \vec{f})) = 0$$

Para que se cumpla siempre idénticamente ha de ser:

$$\begin{aligned}(\lambda + G) (1 + A) + G A &= 0 \\ A &= \frac{-\lambda + G}{\lambda + 2 G} = -\frac{1}{2 (1 - \sigma)}\end{aligned}$$

y, por tanto, la solución general del vector desplazamiento será:

$$\boxed{\vec{u} = \Delta \vec{f} - \frac{1}{2 (1 - \sigma)} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{f}}$$

Tratemos de expresarla en otra forma en que nos sea más cómoda para ulteriores pasos:

$$\vec{u} = \frac{1}{2 G} \left[\frac{2 G}{(1 - \sigma)} (1 - \sigma) \Delta \vec{f} - \frac{2 G}{2 (1 - \sigma)} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{f} \right]$$

y ahora llamamos a:

$$\frac{2G}{1-\sigma} \vec{f} = \vec{g}$$

obtenemos:

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \left[(1-\sigma) \Delta \vec{g} - \nabla \frac{\text{div} \vec{g}}{2} \right]$$

si hacemos ahora:

$$\Delta \vec{g} = \vec{h}$$

y:

$$\text{div} \vec{g} = 2\varphi$$

obtenemos:

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \left[(1-\sigma) \vec{h} - \nabla \varphi \right]$$

con las condiciones siguientes:

$$\Delta \vec{h} = \Delta h_x \vec{i} + \Delta h_y \vec{j} + \Delta h_z \vec{k} = 0$$

y:

$$\text{div} \vec{h} = 2\Delta \varphi$$

como se puede observar por simple comparación con la primitiva.

Evidentemente siempre que $\Delta \Delta \varphi = 0$, ya que $\text{div} \Delta \vec{h} = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \left((1-\sigma) \vec{h} - \nabla \varphi \right)$$

con:

$$\text{div} \vec{h} = 2\Delta \varphi$$

y:

$$\Delta \vec{h} = 0$$

expresemos ahora sus componentes:

$$u_i = \frac{1}{2G} \left((1-\sigma) h_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)$$

Sabemos que el tensor de deformaciones lo podemos expresar por:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

y valdrá en función de la solución general encontrada:

$$u_{ik} = \frac{1}{2G} \left((1-\sigma) h_{ik} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)$$

siendo:

$$h_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_k} + \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right)$$

sabemos, por otra parte, que contrayendo los dos índices obtenemos:

$$u_{ll} = \text{div } \vec{u} = \frac{1}{2G} ((1-\sigma) \text{div } \vec{h} - \Delta \varphi)$$

ahora bien:

$$\text{div } \vec{h} = 2 \Delta \varphi$$

luego:

$$u_{ll} = \text{div } \vec{u} = \frac{1}{2G} [1-2\sigma] \Delta \varphi = \frac{\sigma}{\lambda} \Delta \varphi$$

lo cual lo podíamos haber obtenido directamente sacando divergencias en $\vec{u}$.

La expresión del tensor de tensiones σ_{ik} en función del tensor de deformación u_{ik} es:

$$\sigma_{ik} = u_{ll} \cdot \lambda \delta_{ik} + 2G u_{ik}$$

siendo δ_{ik} el tensor unidad, por tanto:

$$\sigma_{ik} = \sigma \Delta \varphi \delta_{ik} + (1-\sigma) h_{ik} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$$

Naturalmente, la expresión del tensor σ_{ik} satisface las ecuaciones de equilibrio, que se pueden expresar por:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

y las de compatibilidad en función de las tensiones que las podemos expresar por:

$$(1 + \sigma) \Delta \sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

Veamos, en efecto, las primeras:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \sigma \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (1 - \sigma) \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_k} - \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

ahora bien:

$$h_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_k} + \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left[\Delta h_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot 2 \Delta \varphi = \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

ya que:

$$\Delta h_i = 0$$

y:

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_k} = \overset{\rightarrow}{\text{div } h} = 2 \Delta \varphi$$

luego:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = (1 - \sigma) \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - (1 - \sigma) \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

veamos las de compatibilidad:

$$\Delta \sigma_{ik} = \sigma \Delta \Delta \varphi \cdot \delta_{ik} + (1 - \sigma) \Delta h_{ik} - \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = - \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$$

ya que:

$$\Delta \Delta \varphi = 0$$

y:

$$\Delta h_{ik} = 0$$

$$\sigma_{ll} = 3 \sigma \Delta \varphi + (1 - \sigma) 2 \Delta \varphi - \Delta \varphi = (1 + \sigma) \Delta \varphi$$

y sustituyendo obtenemos:

$$-(1 + \sigma) \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial x_i \partial x_k} + (1 + \sigma) \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

como era de prever.

Las únicas condiciones que nos quedan por cumplir son las de cortorno, que se plantean tensorialmente por:

$$\nabla_{ik} \cdot n_k = F_i$$

Siendo $\vec{n}$ el vector de la normal a la superficie. Por tanto, éstas quedan así:

$$F_i = \sigma \Delta \varphi n_i + (1 - \sigma) h_{ik} n_k - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \cdot n_k$$

Con lo cual queda expresado el problema elástico con toda generalidad.

2. CASO PARTICULAR. DEFORMACION PLANA

Veamos ahora el caso particular de deformación plana, es decir, el caso en que:

$$u_z = 0 \quad \sigma_{z,x} = \sigma_{z,y} = 0 \quad \sigma_z = \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

y todas las expresiones restantes sólo dependen de x e y; en este caso, sería:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2G} \left((1 - \sigma) h_x - \frac{\partial \varphi}{\partial k} \right) \\ u_y &= \frac{1}{2G} \left((1 - \sigma) h_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ u_{xx} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta h_x &= 0 \\ \Delta h_y &= 0 \\ \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} &= 2 \Delta \varphi \end{aligned}$$

siendo ahora:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

igualmente se tendrá que:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{u} &= \frac{\sigma}{\lambda} \Delta \varphi \\ u_{xx} &= \frac{1}{2G} \left((1 - \sigma) \frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \\ u_{yy} &= \frac{1}{2G} \left((1 - \sigma) \frac{\partial h_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \\ u_{xy} &= \frac{1}{2G} \left(\frac{(1 - \sigma)}{2} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma \Delta \varphi + (1 - \sigma) \frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma \Delta \varphi + (1 - \sigma) \frac{\partial h_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1 - \sigma}{2} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

si hacemos ahora como condición suplementaria:

$$\boxed{\frac{\partial h_x}{\partial x} = \frac{\partial h_y}{\partial y} = \Delta \varphi}$$

obtenemos:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

ahora bien, si se cumple esta condición podemos hacer que:

$$h_x = \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad h_y = \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

con lo que:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = \Delta \varphi \quad \Delta \chi = 0$$

y entonces:

$$\frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{\partial h_y}{\partial x} = \Delta \chi = 0$$

y:

$$\sigma_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

con lo cual vemos que φ es la llamada función de Airy y χ es la llamada función de Filon, quedando, por tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2G} \left[(1 - \sigma) \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \\ u_y &= \frac{1}{2G} \left[(1 - \sigma) \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \end{aligned}}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\partial_z z = \sigma \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

$$\sigma_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

3. CONCLUSIONES

1. Para llegar a las soluciones generales de desplazamientos y tensiones en elasticidad bidimensional de Airy y de Filon hemos tenido que poner una condición suplementaria, cual es que los dos términos de la divergencia del vector $\vec{h}$ sean idénticos, lo cual podemos expresar tensorialmente en la forma:

$$h_{ik} = \delta_{ik} \Delta \varphi$$

es decir:

$$h_{xx} = \Delta \varphi \quad h_{yy} = \Delta \varphi \quad h_{xy} = 0$$

2. En el caso de elasticidad bidimensional el poner la condición $h_{ik} = \delta_{ik} \Delta \varphi$ no nos ha hecho perder generalidad, ya que las soluciones de Filon y Airy a las que llegamos son generales.

Habría que demostrar que esta solución puede ponerse, aunque la demostración la tengamos de considerar que con ella no llegamos a ningún absurdo.

3. En el caso de elasticidad tridimensional parecería que las funciones h_{ik} tuviesen, por analogía, que cumplir alguna otra condición, como en el caso bidimensional, aunque esta condición no se presenta tan fácilmente.

BIBLIOGRAFIA

FILONENKO-BORODICH: "Teoría de la elasticidad".

LANDAU: "Elasticidad". Curso de Física Teórica.

TORROJA: "Elasticidad".