

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL PROBLEMA DEL PANDEO(*)

Por JAVIER GOIZUETA ROMERO

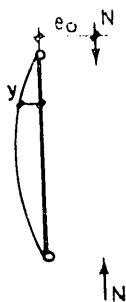
Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos.

En este artículo se describe un procedimiento para analizar el problema del pandeo, partiendo de la curva que relaciona los esfuerzos en una sección de la pieza con los giros unitarios. No se hace distinción entre cargas instantáneas y de larga duración, pues eso no afectaría para nada el procedimiento y si únicamente, en algunos materiales, a la forma de la curva de la que se parte. En el ejemplo que se pone para piezas de hormigón armado la curva de deformación se supone en caso de carga instantánea.

El hecho de haber proyectado unas pilas altas para un viaducto de la autopista Oviedo-Gijón-Avilés, que han suscitado una ligera polémica sobre su estabilidad, me ha llevado a estudiar este asunto en lo posible, ya que me ha parecido que la fórmula que se da en la Instrucción EH-68 no introduce todos los factores que pueden influir en la excentricidad adicional. Por otra parte, no dice nada sobre la manera de considerar el fenómeno cuando hay fuerzas transversales.

Supongamos una pieza de sección constante articulada en los dos extremos, sometida a unas fuerzas axiales con excentricidad e_0 y de valor N ; si es y la ordenada

de la deformada el momento flector valdrá $M = N(e_0 + y)$; por otra parte, dando un valor de N , a cada valor del momento corresponderá una deformación de la sección; es decir, que se podrá poner:



$$N(e_0 + y) = f\left(N, \frac{1}{r}\right)$$

siendo r el radio de curvatura de la pieza; por otra parte, $\frac{1}{r} = -y''$ y, por consiguiente, $N(e_0 + y) = f(N, -y'')$ ecuación diferencial que, resuelta y poniendo las condiciones en los límites, nos da la ecuación de la deformada y , por consiguiente, nos resuelve el problema.

La dificultad del asunto está en que no es fácil determinar la expresión analítica de la función f y que, incluso si está determinada, la ecuación diferencial que se obtiene no se puede integrar fácilmente.

Si hay proporcionalidad entre tensiones y deformaciones la relación que existe entre el momento y la curvatura es:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}; \text{ o sea, } -y'' = \frac{N(e_0 + y)}{EI}$$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de junio de 1974.

$y + \frac{EI}{N} y'' + e_0 = 0$; la solución general de la ecuación diferencial será:

$$y = A \cos \frac{x}{\sqrt{\frac{EI}{N}}} + B \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{\frac{EI}{N}}} - e_0$$

para $x = 0$; $y = 0$; $A = e_0$; $x = L$; $y = 0$

$$B = \frac{e_0 \left(1 - \cos \frac{L}{\sqrt{\frac{EI}{N}}} \right) \operatorname{sen} \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}}}{\operatorname{sen} \frac{L}{\sqrt{\frac{EI}{N}}} \cos \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}}} = e_0 \frac{\operatorname{sen} \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}}}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}}}$$

y, por consiguiente, la ecuación de la deformada vendrá dada por:

$$y = e_0 \left[\cos \frac{x}{\sqrt{\frac{EI}{N}}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}}}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}}} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{\frac{EI}{N}}} - 1 \right] = e_0 \left[\frac{\cos \frac{L-2x}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}} - 1}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}} - 1} \right]$$

Produciéndose el máximo de y en $x = \frac{L}{2}$, y siendo la excentricidad adicional máxima:

$$y = e_0 \left[\frac{1}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}}} - 1 \right]$$

y la excentricidad total en el centro:

$$y = \frac{e_0}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}}}$$

La carga crítica de pandeo corresponderá a:

$$\cos \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}} = 0$$

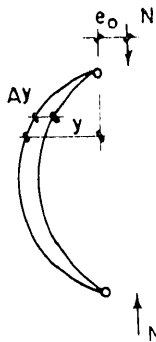
es decir:

$$\frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}} = \frac{\pi}{2} \text{ o sea, } N = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

que es la fórmula de Euler.

Si hay una carga transversal repartida uniformemente de valor P por unidad de longitud todo ocurre como si la directriz inicial tuviera por ecuación:

$$y = -\frac{Px(L-x)}{2N}; \text{ con una curvatura inicial de } \frac{1}{r_1} = \frac{P}{N}.$$



La ecuación que hemos de considerar en este caso será:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{M}{EI},$$

o lo que es lo mismo:

$$-y'' = \frac{P}{N} + \frac{N(e_0 + y)}{EI}$$

y, por lo tanto, la ecuación diferencial será:

$$y + \frac{EI}{N} y'' + \frac{PEI}{N^2} + e_0 = 0$$

Ecuación cuya solución viene dada igual que la anteriormente analizada sustituyendo e_0 por $e_0 + \frac{PEI}{N^2}$ luego:

$$y = \left(e_0 + \frac{PEI}{N^2} \right) \left[\frac{\cos \frac{L-2x}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}} - 1}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{\frac{EI}{N}}} - 1} \right]$$

y, por lo tanto, la ecuación de la deformada real será:

$$y = \left(e_0 + \frac{P E I}{N^2} \right) \left[\frac{\cos \frac{L-2x}{2} \sqrt{\frac{EI}{N}}}{\cos \frac{L}{2} \sqrt{\frac{EI}{N}}} - 1 \right] - P x \frac{(L-x)}{2N}$$

y la excentricidad adicional viene dada por:

$$y = \left(e_0 + \frac{P E I}{N^2} \right) \left[\frac{1}{\cos \frac{L}{2} \sqrt{\frac{EI}{N}}} - 1 \right] - \frac{P L^2}{8N}$$

Siendo la carga crítica de pandeo la misma que si no hubiese fuerzas transversales.

Supongamos ahora que la relación entre la curvatura y la excentricidad de la fuerza sigue una relación lineal que no pasa por el origen de coordenadas, es decir:

$$y + e_0 - E = m_1 \times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) = -m_1 \left(y'' + \frac{P}{N} \right)$$

Siendo E la ordenada en el punto de abscisa "0".

La integración de esta ecuación diferencial dará:

$$y = \left(e_0 - E + \frac{P m_1}{N} \right) \left(\frac{\cos \frac{L-2x}{2} \sqrt{\frac{EI}{m_1}}}{\cos \frac{L}{2} \sqrt{\frac{EI}{m_1}}} - 1 \right)$$

y, por consiguiente, la deformación real será:

$$y = \left(e_0 - E + \frac{P m_1}{N} \right) \left(\frac{\cos \frac{L-2x}{2} \sqrt{\frac{EI}{m_1}}}{\cos \frac{L}{2} \sqrt{\frac{EI}{m_1}}} - 1 \right) - P x \frac{(L-x)}{2N}$$

para $P = 0$:

$$y = (e_0 - E) \left(\frac{\cos \frac{L - 2x}{2 \sqrt{m_1}}}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{m_1}}} - 1 \right)$$

Las excentricidades adicionales a considerar serán las expresiones anteriores particularizadas para $x = L/2$, es decir:

$$y = \left(e_0 - E + \frac{P m_1}{N} \right) \left(\frac{1}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{m_1}}} - 1 \right) - \frac{P L^2}{8 N}$$

$$y = (e_0 - E) \left(\frac{1}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{m_1}}} - 1 \right)$$

Si la fuerza axial está suficientemente lejos de la carga crítica de pandeo podremos desarrollar en serie la expresión:

$$\frac{1}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{m_1}}}$$

obteniendo:

$$\frac{1}{\cos \frac{L}{2 \sqrt{m_1}}} = 1 + \frac{L^2}{8 m_1} + \frac{5 L^4}{2^4 \times 24 m_1^2} + \dots$$

y con esto la expresión anterior sería:

$$y = \left(e_0 - E + \frac{P m_1}{N} \right) \left(\frac{L^2}{8 m_1} + \frac{5 L^4}{2^4 \times 24 m_1^2} + \dots \right) - \frac{P L^2}{8 N}$$

$$\simeq \frac{e_0 - E}{m_1} \frac{L^2}{8} + \frac{P}{N} \frac{5 L^4}{2^4 \times 24 m_1} = \frac{e_0 - E}{m_1} \left[\frac{L^2}{8} + \frac{P L^2}{8 N m_1} \frac{5}{48} L^2 + \dots \right]$$

Ahora bien:

$$\frac{e_0 - E}{m_1} = \frac{1}{r_0},$$

es decir, la abscisa correspondiente a los apoyos:

$$\frac{P L^2}{8 N m_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}$$

luego:

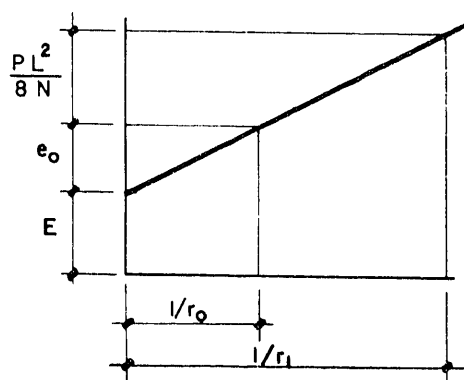
$$y = \frac{1}{r_0} \frac{L^2}{8} + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \frac{5}{6} \frac{L^2}{8} =$$

$$= \frac{L^2}{8} \left[\frac{5}{6} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{6} \frac{1}{r_0} \right]$$

Si $P = 0$:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0};$$

$$y = \frac{1}{r_0} \frac{L^2}{8}$$

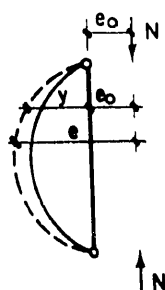


Vemos, por consiguiente, que es fácil obtener un valor aproximado en el caso de que el diagrama sea recto.

En el caso de que el diagrama sea curvo normalmente se puede sustituir el arco por la cuerda y hallar la excentricidad adicional mediante las expresiones anteriores; la comprobación de que esto es así no hay más remedio que hacerla *a posteriori* y ver si esto es realmente cierto.

De todas maneras, dado que la concavidad de las curvas con las que tratamos va hacia el eje de abscisas normalmente estaremos del lado de la seguridad al sustituir el arco por la cuerda; sin embargo, puede que necesitemos afinar más en el proceso de cálculo de la excentricidad adicional para obtener un mayor ahorro de material; en este caso se intenta dar un método adecuado al problema que nos ocupa.

Supongamos la pieza correspondiente con la forma inicial:

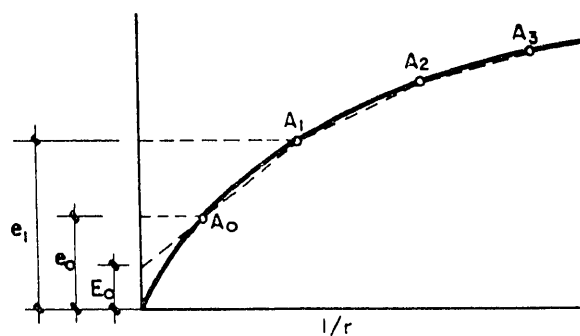


$$y = \frac{P x (L - x)}{2 N}$$

y con curvatura inicial $\frac{P}{N}$

Supongamos también que en el diagrama $\left[\frac{1}{r}, e \right]$ el punto A_0 es representativo de $y = 0, e = e_0$; podemos aproximar la curva me-

diante la quebrada A_0, A_1, A_2, A_3 , en que la recta $A_0 A_1$ tiene por ecuación:



$$e - e_0 = m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

o sea:

$$y = \frac{m_1}{r} - \frac{m_1}{r_0} = m_1 \frac{1}{r} - (e_0 - E_0)$$

y, por consiguiente:

$$y + e_0 - E_0 = - \left(y'' + \frac{P}{N} \right) m_1$$

$$y + m_1 y'' + m_1 \frac{P}{N} + e_0 - E_0 = 0$$

Esta ecuación tiene por solución general la siguiente:

$$y = A \cos \frac{x}{m_1} + B \operatorname{sen} \frac{x}{m_1} - \left(e_0 - E_0 + m_1 \frac{P}{N} \right)$$

Hay que observar que $e_0 - E_0 = m_1 \times \frac{1}{r_0}$ y, por consiguiente, la solución se convierte en:

$$y = A \cos \frac{x}{m_1} + B \operatorname{sen} \frac{x}{m_1} - m_1 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{P}{N} \right)$$

La única condición que tenemos es para $x = 0, y = 0$:

$$A = m_1 \times \left(\frac{1}{r_0} + \frac{P}{N} \right)$$

Por consiguiente, la deformada del primer tramo vendrá dada por:

$$y = B_1 \operatorname{sen} \frac{x}{m_1} - m_1 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{P}{N} \right) \left(1 - \cos \frac{x}{m_1} \right)$$

Esta ecuación es válida hasta $e = y + e_0 = e_1, y = e_1 - e_0$, es decir:

$$e_1 - e_0 = B_1 \operatorname{sen} \frac{x_1}{m_1} - m_1 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{P}{N} \right) \left(1 - \cos \frac{x_1}{m_1} \right)$$

La derivada en ese punto viene dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_1}{\sqrt{m_1}} \cos \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{m_1}{\sqrt{m_1}} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{P}{N} \right) \sin \frac{x_1}{\sqrt{m_1}}$$

En el tramo $A_1 A_2$ la ecuación de la deformada será análogamente:

$$y = B_2 \sin \frac{x}{\sqrt{m_2}} - m_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{P}{N} \right) \left(1 - \cos \frac{x}{\sqrt{m_2}} \right)$$

Habiendo puesto en este caso el origen de coordenadas en $x = x_1, y = e_1 - e_0$. La derivada en el origen viene dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_2}{\sqrt{m_2}}$$

y la expresión anterior es válida hasta $y = e_2 - e_1$:

$$e_2 - e_1 = B_2 \sin \frac{x_2}{\sqrt{m_2}} - m_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{P}{N} \right) \left(1 - \cos \frac{x_2}{\sqrt{m_2}} \right)$$

Luego entonces tenemos las tres ecuaciones siguientes:

$$e_1 - e_0 = B_1 \sin \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} - m_1 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{P}{N} \right) \left(1 - \cos \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} \right) \quad (1)$$

$$e_2 - e_1 = B_2 \sin \frac{x_2}{\sqrt{m_2}} - m_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{P}{N} \right) \left(1 - \cos \frac{x_2}{\sqrt{m_2}} \right) \quad (2)$$

$$\frac{B_2}{\sqrt{m_2}} = \frac{B_1}{\sqrt{m_1}} \cos \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{m_1}{\sqrt{m_1}} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{P}{N} \right) \sin \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} \quad (3)$$

$$e_1 - e_0 = m_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right); \quad e_2 - e_1 = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) m_2$$

con lo cual tenemos:

$$B_1 = m_1 x \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} + \left(\frac{1}{r_0} + \frac{P}{N} \right) \left(1 - \cos \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} \right)}{\sin \frac{x_1}{\sqrt{m_1}}}$$

$$B_2 = m_2 \times \frac{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{P}{N} \right) \left(1 - \cos \frac{x_2}{|m_2|} \right)}{\sin \frac{x_2}{|m_2|}}$$

poniendo:

$$\frac{1}{r} + \frac{P}{N} = \frac{1}{R}; \quad y \frac{x_i}{|m_i|} = X_i$$

$$B_1 = m_2 \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0} (1 - \cos X_1)}{\sin X_1} = m_1 \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \cos X_1}{\sin X_1}$$

$$B_2 = m_2 \frac{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \cos X_2}{\sin X_2}$$

y dada la igualdad (3):

$$\left[m_2 \frac{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \cos X_2}{\sin X_2} \right] = \left[m_1 \left(\frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \cos X_1}{\sin X_1} \cos X_1 - \frac{1}{R_0} \sin X_1 \right) \right]$$

Es decir,

$$\left[m_2 \frac{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \cos X_2}{\sin X_2} \right] = \left[m_1 \frac{\frac{1}{R_1} \cos X_1 - \frac{1}{R_1}}{\sin X_1} \right]$$

Sencilla expresión que nos relaciona dos valores consecutivos de X. El último trozo de deformada se reconocerá en que:

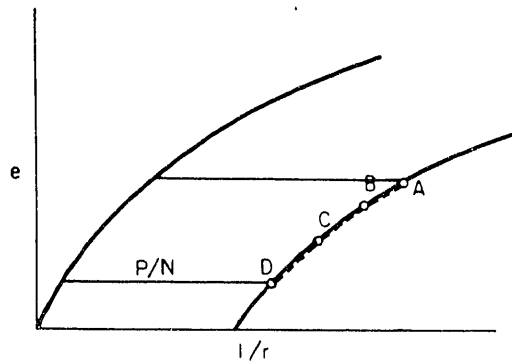
$$\frac{1}{R_n} \cos X_n - \frac{1}{R_{n-1}} = 0$$

es decir:

$$\cos X_n = \frac{\frac{1}{R_{n-1}}}{\frac{1}{R_n}}$$

La condición anterior equivale a decir que la curva deformada ha alcanzado un máximo.

El modo de proceder será el siguiente: Dada la curva que nos relaciona $\frac{1}{r}$ con e se desplazará esta curva una longitud $\frac{P}{N}$ según el eje de abscisas.



Partiendo de un punto A se hará una poligonal A, B, C, D, etc. y se tendrá:

$$\cos X_n = \frac{\frac{1}{R_{n-1}}}{\frac{1}{R_n}}$$

$$\left| m_{n-1} \frac{\frac{1}{R_{n-1}} \cos X_{n-1} - \frac{1}{R_{n-2}}}{\sin X_{n-1}} \right| = \left| m_n \frac{\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n-1}} \cos X_n}{\sin X_n} \right|$$

si llamamos:

$$\frac{\frac{1}{R_{n-2}}}{\frac{1}{R_{n-1}}} = C_{n-1}$$

queda:

$$\frac{\cos X_{n-1} - C_{n-1}}{\sin X_{n-1}} = \left| \frac{m_n}{m_{n-1}} \frac{\frac{1}{R_n} - \cos X_n}{\sin X_n} \right|$$

Resolviendo todas estas ecuaciones se averigua para cada punto A del diagrama el valor e en función de L ; obteniendo así una familia de curvas que ligan la excentricidad adicional con la luz de la pieza y la excentricidad inicial para el valor dado de $\frac{P}{N}$.

Como ejemplo de aplicación de este sistema estudiemos lo que puede pasar en una sección rectangular armada simétricamente con anchura b y canto h ; las letras significan lo mismo que en EH-68.

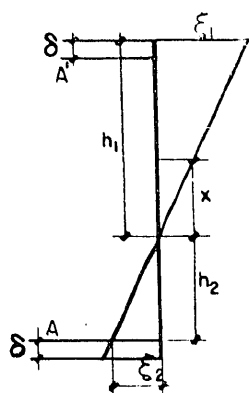
Suponemos que el diagrama de deformaciones del hormigón es una parábola

con un máximo en la ordenada correspondiente a la resistencia media σ_b y la abscisa del 2/1000.

La ecuación de tal diagrama será:

$$\sigma = \sigma_b \left(10^3 \xi - \frac{(10^3 \xi)^2}{4} \right)$$

Suponemos acero de dureza natural y, por consiguiente, la ley de deformaciones será: $\sigma = E_a \xi = 2,1 \times 10^6 \times \xi$.



Suponemos también deformación plana de la sección. Si actúan sobre la sección un momento M y una resultante N , la ecuación que liga la abscisa x con la deformación ξ es:

$$\xi = \xi_1 \left(\frac{x}{h_1} \right)$$

$$\sigma = \sigma_b \left(10^3 \xi_1 \frac{x}{h_1} - \frac{(10^3 \xi_1)^2}{3} \frac{x^2}{h_1^2} \right)$$

Por consiguiente, el volumen de compresiones que suministra el hormigón será:

$$\begin{aligned} & \sigma_b b \int_0^{h_1} \left(\frac{10^3 \xi_1 x}{h_1} - \frac{(10^3 \xi_1)^2}{4} \frac{x^2}{h_1^2} \right) dx = \\ & = \sigma_b b \left[\frac{10^3 \xi_1}{h_1} \frac{h_1^2}{2} - \frac{(10^3 \xi_1)^2}{4} \frac{h_1^3}{3 h_1^2} \right] = \\ & = \sigma_b b \left[10^3 \xi_1 \frac{h_1}{2} - \frac{(10^3 \xi_1)^2}{4} \frac{h_1}{3} \right] \end{aligned}$$

se tiene $h_1 = \frac{h \xi_1}{\xi}$ siendo $\xi = \xi_1 - \xi_2$; luego queda:

$$\sigma_b b h \left[\frac{10^3}{2} \frac{\xi_1^2}{\xi} - \frac{10^6}{3 \times 4} \frac{\xi_1^3}{\xi} \right]$$

Este volumen de compresiones suministra un momento desde la fibra neutra que vale:

$$\begin{aligned} & \sigma_b b \int_0^{h_1} \left(\frac{10^3 \xi_1 x^2}{h_1} - \frac{(10^3 \xi_1)^2}{4} \frac{x^3}{h_1^2} \right) dx = \\ & = \sigma_b b \left[\frac{10^3 \xi_1}{h_1} \frac{h_1^3}{3} - \frac{(10^3 \xi_1)^2}{4} \frac{h_1^4}{4 h_1^2} \right] = \\ & = \sigma_b b h^2 \left[\frac{10^3 \xi_1^3}{3 \xi^2} - \frac{10^6 \xi_1^4}{16 \xi^2} \right] \end{aligned}$$

Además de esto tenemos que la fuerza que suministra la armadura A' de sección A será:

$$F = E_a \xi_1 \left(1 - \frac{\delta}{h_1} \right) \quad A = E_a \xi_1 \left(1 - \frac{\delta \xi}{h \xi_1} \right) A$$

y la fuerza que suministra la armadura A de tracción es:

$$F' = A E_a \xi_2 = A E_a (\xi - \xi_1)$$

La ecuación de equilibrio de fuerzas es:

$$\sigma_b b h \left(\frac{10^3}{2} \frac{\xi_1^2}{\xi} - \frac{10^6}{12} \frac{\xi_1^3}{\xi} \right) + A E_a \left(\xi_1 - \frac{\delta}{h} \xi \right) - A E_a (\xi - \xi_1) = N \quad (1)$$

y la ecuación de equilibrio de momentos da, se toman momentos desde la fibra neutra,

$$\begin{aligned} \sigma_b b h^2 \left(\frac{10^3}{3} \frac{\xi_1^3}{\xi^2} - \frac{10^6}{16} \frac{\xi_1^4}{\xi^2} \right) + (h_1 - \delta) A E_a \xi_1 \left(1 - \frac{\delta}{h_1} \right) - A E_a (\xi - \xi_1) h_2 = \\ = N \left(e + \frac{h'}{2} - h_2 \right) \end{aligned}$$

con la condición:

$$h_1 = \frac{h \xi_1}{\xi} ; \quad h_2 = \frac{h (\xi - \xi_1)}{\xi}$$

queda:

$$\begin{aligned} \sigma_b b h^2 \left[\frac{10^3}{3} \frac{\xi_1^3}{\xi^2} - \frac{10^6}{16} \frac{\xi_1^4}{\xi^2} \right] + \left(\frac{h \xi_1}{\xi} - \delta \right) A E_a \xi_1 \left(1 - \frac{\delta \xi}{h \xi_1} \right) - A E_a \frac{h (\xi - \xi_1)^2}{\xi} = \\ = N \left(e + \frac{h - \delta}{2} - \frac{h (\xi - \xi_1)}{\xi} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

Si dividimos la expresión (1) entre $\sigma_b b h$ y la expresión (2) $\sigma_b b h^2$ y llamamos:

$$\frac{A E_a}{\sigma_b b h} = \alpha ; \quad \frac{N}{\sigma_b b h} = n$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{10^3}{2} \frac{\xi_1^2}{\xi} - \frac{10^6}{12} \frac{\xi_1^3}{\xi} \right) + \alpha \left(\xi_1 - \frac{\delta}{h} \xi \right) - \alpha (\xi - \xi_1) = n \\ \left(\frac{10^3}{3} \frac{\xi_1^3}{\xi^2} - \frac{10^6}{16} \frac{\xi_1^4}{\xi^2} \right) + \alpha \left(\frac{\xi_1}{\xi} - \frac{\delta}{h} \right) \xi_1 \left(1 - \frac{\delta \xi}{h \xi_1} \right) + \alpha \frac{(\xi - \xi_1)^2}{\xi} = \\ = n \left(\frac{e}{h} + \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2h} - 1 + \frac{\xi_1}{\xi} \right) \end{aligned}$$

Este sistema lo representamos en términos de " ξ " como abscisa y la relación $\left(\frac{e}{h}\right)$ como ordenada para distintos valores de " n "; y fijando $\alpha = 20 \frac{\delta}{h} = 0,1$.

Obtenemos así una serie de curvas para distintos valores de n . Puede ser interesante detallar cómo se hace el cálculo de la curva que nos da las excentricidades de pandeo a partir de la curva que relaciona el valor de ξ con el valor de $\frac{e}{h}$. En primer lugar se ha de decir que a cada excentricidad final corresponde una curva. Elegimos para poner el ejemplo la curva en que $n = 0,10$, es decir:

$$\frac{N^*}{\sigma_b b h} = 0,10$$

siendo σ_b la resistencia media, suponemos que es igual a 1,15 la resistencia característica; es decir,

$$\sigma_b = 1,15 \sigma_{b,k}, \text{ luego } \frac{N^*}{1,15 \sigma_{b,k} b h} = 0,10$$

es decir, poniendo un coeficiente de minoración de resistencia del hormigón de 1,50

$$\frac{N^*}{1,15 \times 1,50 V} = 0,10 \quad ; \quad N^* = 0,1725 V$$

por otra parte, suponemos un acero de alto límite elástico;

$$\sigma_{a'} = 4.000 \text{ Kg/cm}^2$$

además:

$$\frac{A E_a}{1,725 V} = 20 ;$$

$$A E_a = 34,50 V; \quad A \sigma'_{a'} = 34,50 V \times \frac{\sigma'_{a'}}{E_a} = 34,50 V \times \frac{4.000}{2,1 \times 10^6} = 65,70 \times 10^{-3} V = 0,0657 V;$$

$$h' = h - \delta = h \left(1 - \frac{\delta}{h}\right) = 0,9 h;$$

se tiene fórmula (26), página 338 de EH-68.

$$0,0657 V = \frac{0,1725 V}{0,9 h} (e_0 + 0,45 h) - \frac{1}{0,9} 0,1725 V \left(1 - \frac{0,1725}{2}\right)$$

$$0,0657 = 0,192 \left(\frac{e_0}{h} + 0,45\right) - 0,192 \times 0,914$$

$$0,343 = \frac{e_0}{h} + 0,45 - 0,914; \quad \frac{e_0}{h} = 0,807$$

luego es el valor máximo que puede tener $\frac{e_0}{h}$; por ello empezaremos el cálculo desde 0,80.

La poligonal que adoptamos es la $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 0$.

El cálculo se inicia tomando el segmento $A_1 A_2$ y obteniendo:

Primer tramo $A_1 A_2$:

$$m_n = \frac{(0,80 - 0,70) h^2}{(3,19 - 2,48) \times 10^{-3}} = \frac{0,10}{0,71} \times 10^3 h^2$$

$$\left| m_n = 10 \right| \left/ \frac{1}{0,71} \times h = 11,87 h; \frac{1}{r_n} = 3,19; \right.$$

$$\left. \frac{1}{r_{n-1}} = 2,48 \right.$$

$$\cos X_n = \frac{2,48}{3,19} = 0,778; X_n = 38,90^\circ = \frac{38,90 \times \pi}{180}$$

$$r_n = \left| m_n \times X_n = 11,87 h \times \frac{38,90 \pi}{180} = 8,05 h. \right.$$

Segundo tramo $A_2 A_3$:

$$\cos X_n = 0,778; \sin X_n = 0,626; C_n = 0,778;$$

$$\frac{1}{C_n} = 1,285; C_{n-1} = \frac{1,55}{2,48} = 0,625$$

$$\left| m_n = 11,87 h, \right| \left| m_{n-1} = \right| \left/ \frac{0,70 - 0,575}{2,48 - 1,55} 10^3; h = 11,60 h. \right.$$

$$\frac{\cos X_{n-1} - 0,625}{\sin X_{n-1}} = \frac{11,87}{11,60} \times \frac{1,285 - 0,778}{0,628} = \frac{11,87}{11,60} \times \frac{0,507}{0,628} = 0,826$$

$$\cos X_{n-1} - 0,826 \sin X_{n-1} = 0,625;$$

$$\cos X_{n-1} = 0,93$$

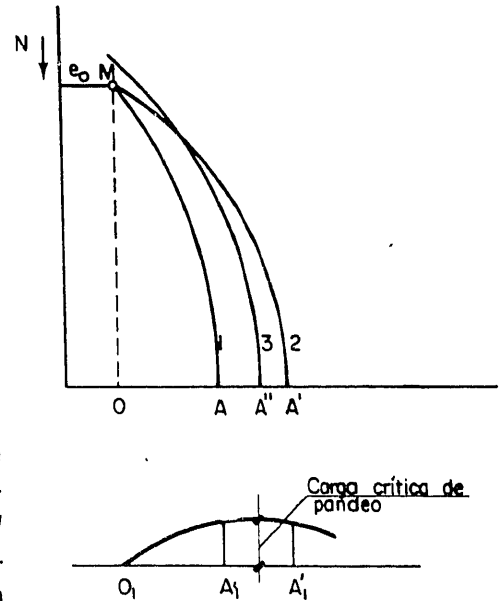
$$\sin X_{n-1} = 0,37 \quad ; \quad X_{n-1} = 21,50 \quad ; \quad X_{n-1} = 21,50 \times \frac{\pi}{180}$$

Seguimos así dibujando la curva que es una solución a la posible deformada debida al pandeo.

Si tomamos otras flechas menores obtenemos otras curvas deformadas que tienen la particularidad de que cortan a la anterior; quiere esto decir que a cada situación inicial de carga corresponde más de una solución posible de deformación, la que hay que tomar para un adecuado estudio es la de menor deformación y, por lo tanto, menor energía de deformación.

Discusión sobre las dos curvas obtenidas que pueden ser solución al problema del pandeo.

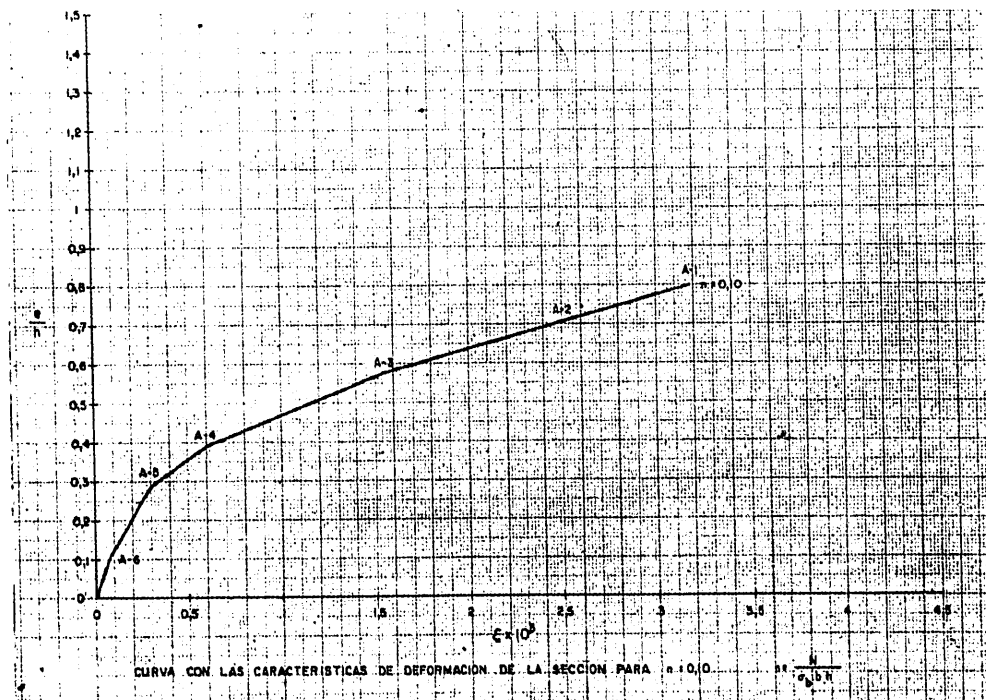
Las curvas 1 y 2 pueden ser solución al problema planteado de la deformada de una pieza articulada en M , y en su simétrico respecto a O con una carga N a una distancia e_0 ; la curva 3 es una curva intermedia que hemos obtenido y que corta a $A'M$ entre A' y M y que, por consiguiente, pasa a la derecha de M ; quiere ello decir que una solución al problema planteado que pasara por A'' y M requeriría una fuerza mayor que N ; por lo tanto, el diagrama de N que correspondería a soluciones que pasarían por M sería el de la figura, el máximo sería la carga crítica de pandeo. Por otra parte, si en la deformada MA se desplaza, conservando el punto M fijo, el punto A hacia la derecha, la situación de equilibrio que se obtiene es para un $N + \Delta N$; si se resta ΔN , la pieza tiende a volver a su posición original; es posición, por consiguiente, de equilibrio estable; si por otra parte se desplaza el punto A' hacia la izquierda, el equilibrio se realiza con un $N + \Delta N$; si se resta este ΔN , la pieza tiende a ir todavía más hacia la izquierda, es decir, separarse de su posición; es, pues, situación de equilibrio inestable.



RESUMEN Y CONCLUSIONES

Para terminar un pequeño resumen de lo que aquí se pretende.

En esencia, lo único que se pretende es analizar el problema de deformación de una pieza partiendo del diagrama que enlaza las excentricidades de una fuerza dada en una sección con las curvaturas que adopte dicha sección; es decir, partiendo de las características de deformación de una sección de la pieza; el ejemplo que se pone en el que se hacen hipótesis sobre las características de deformación



del hormigón no es objeto principal de este artículo, aunque sí creemos que son suficientemente correctas y, sobre todo del lado de la seguridad. En sucesivos artículos se darán ya curvas deformadas para distintos casos de fuerzas normales y transversales y para distintas cuantías de armaduras y recubrimientos, así como también para otros materiales de los cuales conozcamos las características de deformación. También analizaremos cargas críticas de pandeo, etc.

