

COMENTARIOS SOBRE ARTICULOS PUBLICADOS EN MESES ANTERIORES

Continuación al comentario del artículo "Puntualizaciones sobre el teorema de los trabajos virtuales", de Emilio Garbayo Martínez, publicado en el mes de Julio de 1973.

Por I. CANO DE LA TORRE y R. GOMEZ DE LOS REYES Doctores Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

En nuestro comentario anterior publicado en el mes de febrero de 1974 decíamos que, para el análisis exhaustivo de una demostración era necesario revisar todas las definiciones y postulados anteriores. Pues bien, para rebatir el argumento con el que se quiere probar que nuestra demostración es incorrecta, no tenemos más remedio que repetir las definiciones de trabajo y potencia, ya que dicho argumento está basado en un error o confusión de estos conceptos. Este error de concepto ya fue advertido en el primer artículo, pero no se le prestó más atención a la vista de la magnitud de otros errores en conceptos más simples, tales como: confundir una identidad con una igualdad; un desplazamiento compatible con uno que no lo es; el hablar en estática de "sistemas cinéticos", etc.

1.1. *Trabajo elemental* de una fuerza F aplicada en un punto material M , cuya posición está definida en unos ejes inerciales por su vector de posición r , realizado al desplazarse el punto material M , el vector $d r$ es el valor:

$$\bar{F} \cdot d\bar{r}$$

1.2. *Trabajo total* realizado por una fuerza $\bar{F}$ aplicada a un punto material M , cuando este punto describe un arco de curva AB en unos ejes inerciales, es el valor de la integral:

$$\tau_{AB} = \int_{AB} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Luego:

1.3. Para realizarse un trabajo elemental o total es necesario emplear un cierto tiempo Δt , muy pequeño o no, pero que constará inevitablemente de *infinitos* instantes, siendo uno de ellos el instante inicial del desplazamiento $d\bar{r}$ o del arco de curva AB .

1.4. El trabajo es *independiente* de la manera como se recorrió el vector $d\bar{r}$ o el arco de curva AB , o sea, que el trabajo es *independiente* de la velocidad o velocidades del punto material M , en los distintos instantes de que conste el intervalo de tiempo Δt , que duró su movimiento para recorrer el $d\bar{r}$ o el arco AB .

2.1. *Potencia* de una fuerza $\bar{F}$ aplicada a un punto material M , que se mueve en unos ejes inerciales, en un instante t_1 , es el límite:

$$P(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{t - t_1} = \bar{F} \cdot \bar{v}_1$$

siendo $(t - t_1)$ el intervalo de tiempo que emplea M en recorrer $d\bar{r}$ y $\bar{v}_1$ la velocidad de M en el instante t_1 . Es, por tanto, la *derivada del trabajo* —o velocidad con que se realiza— en el instante t_1 .

Luego:

2.2. Durante el tiempo empleado por una fuerza $\bar{F}$, aplicada a un punto M , en realizar un trabajo *elemental*, o total, esta fuerza ha tenido infinidad de potencias, una en cada instante y, en general, distintas entre sí, siendo naturalmente una de ellas la potencia en el instante inicial del recorrido $d\bar{r}$ o del arco AB .

2.3. Por 1-4, el trabajo es independiente de las potencias instantáneas de $\bar{F}$ en los distintos momentos del recorrido, como lo es el espacio respecto de la velocidad.

2.4. Evidentemente si el punto material M —o un sistema de puntos materiales— parte del

reposo, la potencia inicial será nula, *sin que por eso sea nulo* el trabajo $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, o el trabajo:

$$\int_{\Delta t} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como ejemplo sencillo, imagínese que se sostiene un cuerpo en reposo y se abandona a su propio peso. En el instante inicial la potencia del peso es nula, pero en cualquier desplazamiento el trabajo del peso será positivo, y las potencias siguientes a la inicial también serán positivas y crecientes con el tiempo.

Finalmente, el principio —que es un teorema— de los trabajos virtuales de la estática dice:

3. La condición necesaria y *suficiente* para que un sistema material esté en equilibrio en unos ejes inerciales y en una posición dada A, es que la suma de los *trabajos* virtuales de las fuerzas solicitantes sea nula para *todos* los desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces y efectuados a partir de la posición dada A.

El punto principal de la demostración de la *suficiencia* está en que, ensayados todos los desplazamientos compatibles con los enlaces y efectuados a partir de la posición dada —en la que se tenía inmóvil el sistema material— resultan *nulos* todos los *trabajos* de las fuerzas solicitantes. En estas condiciones, si se abandonara el sistema, no podría moverse, porque *si se moviese*, el *trabajo* de las fuerzas solicitantes —*no su potencia inicial*:

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

que evidentemente es nula según el 2-4 anterior— sería *positivo* en contra del resultado nulo obtenido anteriormente.

Copiamos ahora textualmente el argumento erróneo del autor:

$$\sum (F + F') dr = \sum \frac{1}{2} m v^2 > 0; \quad \sum F' dr = 0$$

(1) página 629, podrán expresarse en la forma:

$$\sum F dr = \sum \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m 0^2$$

$$\sum F dr = \sum d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) > 0$$

o bien (...desplazamientos... a partir del punto A... pertenecientes al espacio... tangente...)")

$$\sum F \frac{dr}{dt} = \sum \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) > 0$$

(las derivadas tomadas en el punto inicial A).

Ahora la *derivada* de v^2 es $2av$ que es nula en el punto A, con lo que resulta que:

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

es cero y no mayor que cero, con lo que la contradicción usada para demostrar el teorema por el absurdo deja de tener lugar y, en consecuencia, la demostración dada en (1) (pág. 629) es lógicamente incorrecta.

Hemos subrayado la expresión *o bien*, porque en este momento el autor divide por dt y empieza a confundir el concepto de "*trabajo* de las fuerzas solicitantes en los desplazamientos dr " —que el mismo autor reconoce textualmente en el renglón anterior que es positivo, en contra de lo supuesto y que es en donde radica exactamente la contradicción —con el concepto de la "*potencia*

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

de estas fuerzas en el instante inicial de efectuarse dichos desplazamientos". Por tanto, el autor, con los argumentos anteriores, lo que ha demostrado es que la potencia

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

en el instante de iniciarse los desplazamientos es nula, cosa evidente, porque en dicho instante todos los puntos tienen velocidad nula —y de la que jamás hemos dicho que fuese mayor que cero como se pretende, puesto que ni siquiera se menciona en nuestra demostración—.

Siguiendo en la confusión de los conceptos insiste, para que no pueda haber duda de dicha confusión, con las frases: "*las derivadas toma*

das en el punto inicial" y más adelante "la derivada de v^2 es $2av$ que es nula en el punto A"; que según 2-1, sólo se pueden referir a la potencia inicial y no al trabajo, que es lo único que interesa en el teorema que se comenta.

Para terminar sólo diremos que una confusión análoga en análisis matemático sería confundir el incremento de la variable dependiente Δy , obtenido a partir de un punto dado $x = a$, con la derivada:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a}$$

en el punto $x = a$, y asegurar que, si esta derivada es nula, lo es el Δy .

Por lo tanto, la demostración que figura en nuestro libro "Teoría y práctica de la mecánica racional", 7.^a edición, pág. 628, y que ahora se discute, *no adolece* como se pretende, del supuesto defecto lógico que se le atribuye. Esto lo puede comprobar cualquiera que la analice, si tiene claros los conceptos expuestos.

Ya que esta demostración fue públicamente criticada como falsa, es justo que ahora sea aceptada y reconocida públicamente como válida, o que se nos diga dónde tiene otro supuesto defecto lógico.

Comentarios al artículo "Ficción y realidad de la amortización", de Enrique Díaz-Rato Alonso, publicado en el mes de abril de 1974.

Por JOSE GONZALEZ PAZ Catedrático de Economía.

Vulgarizar no puede ser huir de "tecnicismos" para caer en errores semánticos o conceptuales, sino hacer asequibles conceptos sin cambiar la significación técnica de los mismos. (Y vaya aquí mi más profundo respeto y devoción por don José Echegaray, capaz de poner al alcance del español, que quería ser ilustrado hace un siglo, las razones científico-matemáticas de la estabilidad sobre una bicicleta o los misterios de la electricidad neonata.)

Olvidando definiciones gramaticales o "enciclopedistas" puntualicemos conceptos.

I. Amortización.

a) La expresión contable de la depreciación de un activo es obviamente la llamada amortización contable (o simplemente amortización).

b) La amortización técnica mide la vida probable de un activo como bien productivo en condiciones normales de utilización (por ejemplo, veinte mil horas de funcionamiento).

c) La amortización económica considera no

sólo la amortización técnica, sino también la posible pérdida de valor del activo en el proceso de producción por razones de obsolescencia (por ejemplo, aparición de nuevas máquinas más eficientes).

d) La amortización fiscal coincide con la contable en cuanto ésta no rebase las cuotas anuales, establecidas por la Hacienda pública para el tipo de activo en cuestión en sus tablas de amortización.

e) La amortización financiera hace referencia a la reducción de un crédito o a la progresiva extinción de unos derechos (por ejemplo, amortización financiera del capital en empresas concesionarias en que las instalaciones revierten finalmente al Estado).

II. Amortización como período de recuperación del capital.

Es desde luego inadecuado usar en tal sentido el vocablo "amortización", pero es práctica bastante corriente y no suele prestarse a equívocos.