

Comentarios al artículo "Puntualizaciones sobre el teorema de los trabajos virtuales", de Emilio Garbayo Martínez, publicado en el mes de Julio de 1973.

Por R. GOMEZ DE LOS REYES e I. CANO DE LA TORRE, Doctores Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

En el número 3099 de esta Revista, correspondiente al mes de julio de 1973, y en las páginas 691 y siguientes se publicó el artículo titulado "Puntualizaciones sobre el teorema de los trabajos virtuales", en el que se copió literalmente la demostración del teorema anterior, que figura en nuestro libro "Teoría y práctica de la mecánica racional" (VII edición, páginas 628 y 629), alegando que dicha demostración es incorrecta.

Como quiera que nosotros no estamos de acuerdo y consideramos que casi la totalidad de las afirmaciones hechas en dicho artículo no son correctas y pueden inducir a error a los alumnos que estudian nuestro libro, es por lo que rogamos sean publicados en la REVISTA de OBRAS PUBLICAS los comentarios siguientes:

La demostración del teorema de los trabajos virtuales, como toda demostración de un teorema, se apoya en una multitud de conceptos anteriores, que unos se establecen por definición y otros por postulación.

Son ejemplos de conceptos establecidos por definición: el de punto material; el de desplazamiento virtual; el de desplazamiento virtual compatible con los enlaces; el de desplazamiento real; el de posición de equilibrio, o reposo, de un sistema material en una referencia; el de fuerza solicitante, etc.

Son ejemplo de conceptos establecidos por postulación: Primero, los de la Lógica; por ejemplo, el del tercio excluido, para evitar problemas metafísicos, y que se aplica en toda demostración por reducción al absurdo. En segundo lugar, los de las Matemáticas, por ejemplo: el de

Arquímedes y el de Cantor-Dedekind para la recta; el de Euclides; aceptar que nuestro espacio físico de la experimentación es un espacio puntual afín asociado a un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales tridimensional y euclídeo, etc. Finalmente, los de la Mecánica Racional de Newton, por ejemplo; aceptar la existencia de las referencias inerciales en el espacio puntual afín anterior; el de la acción igual a la reacción; el que dice que $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ sólo es cierta en ejes inerciales, etc.

De lo dicho se deduce que el análisis exhaustivo de la demostración del teorema que nos ocupa requeriría revisar casi todas las definiciones y postulados de la Lógica de las Matemáticas y de la Mecánica, lo que evidentemente se sale fuera de los límites de un artículo. Por tanto, después de recordar que *todas* las palabras que intervienen en el enunciado de un postulado o de un teorema —muchas veces llamado principio por tradición, como, por ejemplo: el principio de Arquímedes, el principio de D'Alembert, el principio de los trabajos virtuales en estática, etc.— han de tener un significado preciso y definido con anterioridad —como ocurre en nuestro libro en el teorema citado—, sólo nos limitaremos a señalar los errores, que creemos contienen casi todos los párrafos del citado artículo y que siguen a la demostración dada:

1. El primer párrafo dice: "La demostración parece impecable, y, sin embargo, una cierta atención sobre la condición:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

demuestra que si se toma literalmente es incorrecta".

En primer lugar, toda ecuación matemática sólo se puede tomar literal y exactamente como es.

En segundo lugar, dicha condición *no figura* en la demostración. La que figura es:

$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0, \quad (1)$$

y antes de figurar en la demostración existe la llamada (número IX-1-2) que no ha sido copiada en el artículo que comentamos. Esta llamada es para indicar al lector que el estudio del equilibrio o reposo es con relación a unos *ejes inerciales*.

En tercer lugar, el asterisco indica que los desplazamientos han de ser compatibles con los enlaces (número VII-4-14).

En cuarto lugar, en nuestro libro, al principio del fascículo, en la página 627, que es la anterior a la demostración que nos ocupa, dice: IX-2-1-*Enlaces*. Por ahora, los únicos enlaces que consideraremos son los que están desprovistos de rozamiento y son holónomos reversibles. Se dice que un enlace está desprovisto de rozamiento cuando es constantemente *nulo* el trabajo desarrollado por su reacción (o reacciones).

Cuando existen varias reacciones sobre varios puntos producidas por un solo enlace, en general no tienen por qué ser normales a las trayectorias de éstos, pero el trabajo total de todas ellas ha de ser nulo si el enlace está desprovisto de rozamiento. Por ejemplo: el enlace $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = 25$ es sin rozamiento y holónimo reversible, produciendo una reacción $\bar{R}_1$ en el punto (x_1, y_1, z_1) y otra $\bar{R}_2$ en el punto (x_2, y_2, z_2) , cada una de estas reacciones produce un trabajo, pero la suma de estos dos trabajos es constantemente nula.)

Según esto, la ecuación (1) es precisamente la expresión de que todos los enlaces son holónomos reversibles y sin rozamiento (véase en nuestro libro los números VII-4-1 y siguientes, y después léanse los números VII-4-14 y siguientes).

2. En el segundo párrafo se dice: "En efecto, es evidente que para desplazamientos virtuales finitos, etc."

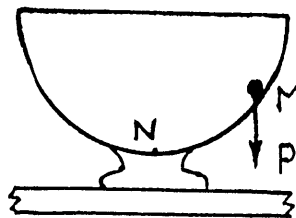
En primer lugar, en la demostración no figura ningún desplazamiento virtual, los que fi-

guran son desplazamientos virtuales *compatibles* con los enlaces. Son cosas distintas (véanse las definiciones 1.^a, 2.^a y 3.^a del número VII-4-14, pág. 513).

En segundo lugar, un desplazamiento siempre es un vector, y un desplazamiento virtual finito es rarísimo que pueda ser compatible con un enlace. Por ejemplo, si un punto material M ha de permanecer en la superficie de una esfera y se le mueve sobre la superficie esférica de un punto A a otro B , el desplazamiento $\overline{AB}$ es una secante de la esfera que es incompatible con la superficie esférica. La superficie esférica es un espacio puntual riemanniano imposible de asociar a un espacio vectorial, luego, los únicos desplazamientos compatibles con dicho espacio puntual y realizados a partir del punto A son, *por definición*, los pertenecientes al espacio puntual euclídeo tangente que *localmente* en A sustituye al riemanniano (véase, por ejemplo: "Elementos de cálculo tensorial", Lichnerowicz, pág. 122 de la traducción española.)

3. Leyendo la conversación de los amigos A y B resulta que ninguno de los dos se había enterado de nada. Por eso, vamos a poner un ejemplo muy sencillo, que es seguro que estará al alcance de estos dos amigos, y con este ejemplo de preámbulo vamos a volver a demostrar la suficiencia, sin escribir ninguna ecuación y quedaremos encantados si nuestros amigos A y B la captan.

Antes de hacer nada, tenemos que recordar que cuando hay enlaces todas las fuerzas que actúan sobre el sistema material que se considera se clasifican en dos clases: una clase la forman todas las reacciones de los enlaces, y la otra clase la forman todas las restantes fuerzas, y éstas se llaman fuerzas solicitantes (VII-4-19 y IX-2-2).



Supongamos que tenemos un tazón sobre una mesa horizontal, cuya superficie interior es esférica y lisa, una bola de acero de un roda-

miento de bicicleta y que unos ejes unidos a la Tierra son inerciales:

1. Si colocamos la bola, sin velocidad, en el punto M de la parte interior del tazón (véase la figura). ¿Este punto M podría ser posición de equilibrio de la bola, si la soltamos?

2. Si colocamos la bola, sin velocidad, en el punto N , fondo de la parte inferior del tazón. ¿Este punto N puede ser posición de equilibrio de la bola, si la soltamos?

3. ¿Conociendo sólo el peso $\bar{P}$, única fuerza solicitante en este caso, y los entornos del enlace en los puntos M y N podemos distinguir para cada uno de ellos si es posición de equilibrio, o no lo es, sin tener para nada en cuenta las reacciones del tazón?

La respuesta a 3 es afirmativa. Basta que hagamos lo siguiente:

Primero empezaremos con el punto M . Nos imaginamos —o sea, virtualmente— que damos un desplazamiento a la bola a partir de M y compatible con la superficie interior del tazón en dicho punto y anotamos el trabajo que realizaría el peso $\bar{P}$; después imaginamos otro desplazamiento compatible de la bola y anotamos el trabajo que realizaría $\bar{P}$; después otro y anotamos el trabajo, etc., hasta haber realizado todos los infinitos desplazamientos compatibles. Si ahora miramos los trabajos anotados veremos que hay infinitos positivos que correspondieron a los desplazamientos hacia abajo, también habrá infinitos negativos que correspondrán a los desplazamientos hacia arriba y otros nulos. Entonces aseguramos, M no es posición de equilibrio, porque para serlo todos los trabajos anotados tenían que haber sido nulos.

Si ahora lo hacemos con N , todos los trabajos realizados por P en todos los desplazamientos compatibles serían nulos. Entonces afirmamos, N es posición de equilibrio.

Así que no debe olvidarse que es necesario ensayar virtualmente, y en la posición dada, en la que suponemos que está quieto el sistema, todos los desplazamientos infinitesimales compatibles, y si todos los trabajos realizados solamente por todas las fuerzas solicitantes hubiesen salido nulos, ya sería imposible cualquier desplazamiento real del sistema material, porque este desplazamiento tenía que ser necesariamente

uno de los anteriores ensayados, por que son los únicos que puede realizar el sistema.

Luego lo que tenemos que probar es que cualquiera de los desplazamientos que ensayamos es imposible que se realice realmente.

Cojamos uno cualquiera de ellos, ya comprobamos que en este desplazamiento y en todos los parciales de que pueda constar —por ser infinitesimo— es nulo el trabajo de todas las fuerzas solicitantes. Si realmente se produjese, también sería nulo el trabajo de todas las reacciones en el desplazamiento total y en cualquiera de sus desplazamientos parciales, porque los enlaces son sin rozamiento. Luego en este desplazamiento y en todos sus parciales es nulo el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, ahora por el teorema de la energía cinética, resulta que el incremento de la energía cinética sería nulo, y partiendo de que inicialmente esta energía cinética era nula por estar el sistema en reposo, resulta que el desplazamiento se tendría que realizar con velocidades nulas. lo cual sería imposible.

Cojamos otro cualquiera de los desplazamientos virtuales compatibles y repitamos lo mismo, tendremos que aplicar otra vez el teorema de la energía cinética, etc. Resulta, pues, que la ecuación escalar de la energía cinética la aplicamos infinitas veces.

Fácilmente se demuestra que no es necesario ensayar los infinitos desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces, porque este conjunto de vectores, con las mismas leyes de éstos, se puede estructurar como un espacio vectorial cuya dimensión coincide con los grados de libertad del sistema y, por tanto, el número máximo de desplazamientos virtuales compatibles y linealmente independientes entre sí coincide con los grados de libertad. !

Aquí podríamos extendernos mucho, pues como dice Lichnerowicz en el libro citado anteriormente (pág. 165), el conjunto de las posiciones de un sistema material con ligaduras holónomas, es el mejor ejemplo de una variedad diferenciable de n dimensiones, llamada el espacio puntual de configuraciones. En dinámica, este espacio puntual se puede metrizar localmente en cada punto, aprovechando el concepto de energía cinética y convertirlo en un espacio puntual riemanniano y tratar todos estos problemas desde este punto de vista.

Concretando, para saber si un sistema material sujeto a enlaces holónomos y desprovistos de rozamiento puede estar en equilibrio en una configuración dada, basta con conocer el campo de fuerzas *solicitantes* y el entorno de la configuración dada, y aplicar el principio de los trabajos virtuales de Estática. O sea, que este principio es suficiente para detectar cuáles son las configuraciones de equilibrio, pero *no* lo es para distinguir la clase de equilibrio-estable, inestable o indiferente.

4. Sigue en el artículo que comentamos otro párrafo en el que se critica también a otros autores y luego aparece el párrafo que a continuación copiamos literalmente.

“Como argumento *meta-mecánico*, que no prueba la incorrección de la demostración que ha sido criticada en este artículo, pero si permite suponerla plausible, expondremos que la demostración expuesta se basa en el teorema de la energía y no utiliza exhaustivamente los demás teoremas fundamentales, siendo, por tanto, sospechoso que *una* sola ecuación escalar (la de energía) pueda describir ciertos aspectos (los aspectos de equilibrio) de sistemas dinámicos con *un número cualquiera* de grados de libertad.”

De todos los errores del artículo, el de este párrafo es el más grande, porque si son “*n*” los puntos materiales que forman el sistema cuya configuración de equilibrio se busca y que han de verificar a “*p*” enlaces holónomos reversibles $f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0$ el trabajo de las fuerzas solicitantes $\bar{F}_i$ en un desplazamiento virtual $\bar{r}_i$ compatible con los enlaces es:

$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i),$$

(Obsérvese que ahora sólo expresamos con símbolos matemáticos todo lo dicho en 3) que, como puede verse, es un polinomio homogéneo de primer grado, cuyas variables reales son las $3n$ variaciones $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, de las cuales sólo $h = 3n - p$ son *independientes* por existir las p ecuaciones de enlace, y precisamente este número $h = 3n - p$ es el número de grados de libertad del sistema (véase VII-4-6).

Ahora bien, por el álgebra elemental se sabe que si un polinomio lineal y homogéneo se anula para todos los valores posibles de sus variables *independientes* es *idénticamente nulo*, o sea,

que es una *identidad escalar* la expresión siguiente:

$$\sum F_i \cdot \delta r_i = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \equiv 0 \quad (2)$$

(tres rayas ($\equiv$) en lugar de dos ($=$) indican *identidad*, que es un concepto distinto del de igualdad).

Finalmente, y también por el álgebra elemental, se sabe que para expresar que un polinomio lineal y homogéneo es idénticamente nulo, es necesario: Primero, eliminar las variables dependientes y si estas variables dependientes dependen linealmente de las independientes, la eliminación, conduce a un nuevo polinomio lineal y homogéneo en las variables independientes. Segundo, *anular* todos los coeficientes de estas variables independientes que han quedado.

Por tanto, la expresión (2) equivale a $h = 3n - p$ ecuaciones escalares con $h = 3n - p$ incógnitas.

Como todos saben, precisamente en esto consisten todos los procedimientos aritméticos —directo, multiplicadores de Lagrange, parámetros independientes, etc.— de aplicación práctica del método de los trabajos virtuales.

Finalmente podríamos demostrar que la *identidad* (2) que expresa el principio de los trabajos virtuales en estática equivale *exactamente* a decir que el *sistema total* de las fuerzas (reacciones de enlace y solicitantes) que actúan sobre el sistema materiales es *nulo*, o sea, con resultante nula y momento central nulo. (Léase el número IX-2-4 y siguientes, así como los ejercicios resueltos.)

Fijándose en que todos los procedimientos para hallar las posiciones de reposo, en una referencia inicial de un sistema (o conjunto) de puntos materiales constan de las siguientes fases:

1. Suponer que el sistema material está en reposo, respecto de la referencia inicial, en la posición considerada.
2. Expresar que la resultante, y el momento central en un punto dado *A*, de *todas* las fuerzas (reacciones de enlace y solicitantes) que actúan sobre *todo* el sistema material, son nulos.
3. Como así sólo podemos poner *seis* ecuaciones algebraicas y el número de in-

cógnitas (parámetros de posición y proyecciones desconocidas de las reacciones de los enlaces) puede ser mayor de seis, se subdivide el sistema material en tantos sistemas materiales parciales como hagan falta, y a cada uno de estos sistemas materiales parciales se le aplica el apartado anterior, hasta lograr que el número de ecuaciones sea igual que el número de incógnitas. (Si no se puede lograr se llama hiperestático y cae fuera del tema.)

4. Aplicar reglas del álgebra para eliminar las proyecciones desconocidas de las reacciones de enlace hasta lograr un sistema de ecuaciones algebraicas igual al número de los parámetros de posición o grados de libertad.

Pues bien, a nadie se le ocurriría decir que los artificios algebraicos utilizados en esta cuarta fase son postulados de la mecánica. Fijémonos ahora con atención en la condición suficiente del principio de los trabajos virtuales — anular una serie de coeficientes de una expresión idénticamente nula deducida siguiendo ciertas reglas operativas — y veremos que es un artificio ingenioso y elegante, que nos elimina de golpe todas las reacciones desconocidas de los enlaces, cuando éstos son holónomos reversibles y desprovistos de rozamiento, facilitándonos las $(3n - p)$ ecuaciones escalares entre los $(3n - p)$ parámetros de posición que necesitamos para poder hallar éstos. Luego no es lógico pretender que la suficiencia del principio de los trabajos virtuales sea un nuevo postulado de la Mecánica.

Con lo que acabamos de decir caen por su base los tres párrafos siguientes del artículo, junto con la llamada que hace el asterisco y que dicen:

5. Con respecto al "teorema" de los trabajos virtuales, creemos que pueden tomarse dos posturas:
 - a) Postulado sin demostración para sistemas cinemáticos con enlaces todos independientes del tiempo (*). Así puede desarrollarse la Estática con independencia lógica de los axiomas de la Dinámica.

- b) Demostrarlo, para enlaces holónomos independientes del tiempo, usando los teoremas generales de la Dinámica, condensados, por ejemplo, en las ecuaciones de Lagrange. Y la llamada (*), que dice: Creemos que otra incorrección muy extendida en la casi totalidad de los libros es no mencionar que los enlaces sean independientes del tiempo. Omitiendo esto se puede caer en dificultades como las que se suceden en la referencia (6).

En primer lugar, en el párrafo (a) se habla de "sistemas cinéticos" — que no sabemos lo que es, pero que parecen relacionados con el movimiento — para establecer un nuevo postulado de la estática, nosotros creemos, sinceramente, que esto es una incongruencia.

En segundo lugar, el estudio del reposo de un sistema material respecto de una referencia inercial, estando este sistema material sometido a las reacciones de enlaces que se están moviendo, pero quedándose el sistema quieto, aparte de que es un caso muy raro, no imposible de equilibrio — por ejemplo: la suspensión cardan empleada para sujetar las brújulas, los cronómetros, los barómetros, etc., marítimos — no modifica en cada la demostración de la suficiencia del teorema que nos ocupa, porque cuando se trata de enlaces que dependen del tiempo y *siempre que se ensayen trabajos virtuales*, lo primero que hay que hacer es *detener* los enlaces — no sólo en *Estática*, incluso en *Dinámica*, léase Método de los trabajos virtuales y métodos analíticos, en donde sólo se habla de enlaces que dependen del tiempo (pág. 513) y en especial léase la página 529, donde dice: "Teniendo esto en cuenta, para aplicar el método se hace lo que sigue...", etc. — para ensayar los infinitos desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces en esa posición en que se han detenido, porque las reacciones han de ser precisamente las originadas en esa posición.

Después se fija otra posición de los enlaces y se vuelve a repetir todo. Después otra posición, etc., hasta ensayar *todas*. Lo único que ha pasado es que la potencia del infinito ensayado ahora es mayor que la del infinito ensayado antes.

En resumen, si los enlaces dependen del tiempo y las fuerzas solicitantes también, para que exista equilibrio en la posición dada, en la identidad (2) al sustituir las variaciones de las coordenadas que sean dependientes en función de las independientes y reordenar la ecuación en estas últimas *tiene que desaparecer el tiempo*.

En el apartado b) está otra comprobación de que la suficiencia del principio de los trabajos virtuales, en ningún caso puede ser un postulado. En efecto, como la *Estática* es un caso particular de la *Dinámica*, todas las propiedades de la *Estática* se deducen de los postulados y teoremas de la *Dinámica* con sólo anular en éstos las velocidades y, por tanto, también las aceleraciones.

Así, por ejemplo: El principio de los trabajos virtuales en *Estática* se deduce del teorema fundamental de *dinámica*:

$$\sum F_{si} \delta r_i = \sum m_i a_i \delta r_i,$$

que en nuestro libro figura con el número VII-4-23-3, página 528.

El método práctico de aplicación numérica del principio de los trabajos virtuales en *estática*, llamado de los multiplicadores de Lagrange (véase IX-2-5), página 631 se deduce del mismo método de *Dinámica*, o sea, de las llamadas primeras ecuaciones de Lagrange (véase VII-4-27, pág. 536) y el otro método práctico de aplicación del principio de los trabajos virtuales en *estática*, llamado de los parámetros independientes o coordenadas generalizadas de Lagrange (véase IX-2-6, pág. 632), se deduce directamente de las segundas ecuaciones de Lagrange en *Dinámica* (véase VII-4-30, pág. 540) y no se olvide que para demostrar todas estas ecuaciones se han empleado trabajos virtuales.

Ahora bien, las ecuaciones de Lagrange, tanto las primeras como las segundas, y tanto si los enlaces son estáticos o dependientes del tiempo, nadie duda que son teoremas necesarios y *suficientes* — sobre todo esto último — para determinar *todas* las posiciones o configuraciones de un sistema material en todos los instantes de su movimiento. ¿Cómo no han de serlo en el caso particular muchísimo más simple del reposo, en que sólo existe una sola posición o configuración en todos los instantes?

Por estas últimas consideraciones es por lo

que es más lógico estudiar primero la *Dinámica* y luego la *Estática*, cuyo estudio, de este modo, además de ser más profundo es mucho más sencillo, por eso seguimos ese orden en nuestro libro. A pesar de ello, aun en muchos sitios se sigue haciendo al revés. Por ejemplo: El ojo humano es una parte del cuerpo humano. ¿Sería lógico en anatomía estudiar primero el ojo humano y después el resto del cuerpo humano? ¿Sería acertado estudiar el ojo con independencia lógica del resto del cuerpo? ¿Qué se adelantaría con ello?

6. En el siguiente párrafo del artículo se habla del Principio de D'Alambert y como parece indicar que también en este punto nuestro libro comete errores, lo que es falso, sólo nos queda decir que la demostración de que el Principio de D'Alambert es un teorema como otro cualquiera, es mucho más simple que la de la suficiencia del principio de los trabajos virtuales de *estática* porque su conexión con los dos postulados de Newton — el de la acción igual a la reacción y el que dice que la resultante de las fuerzas que actúan sobre un punto material es igual a su masa de inercia por su aceleración en unos ejes inerciales — es inmediata, como puede verse en VII-2-4, *teorema fundamental*, página 418.

Agradecemos los elogios, que en el siguiente y último párrafo del artículo se hacen de nuestro libro, y creemos sinceramente que no se ha pretendido hacer un juicio negativo del mismo, pero la realidad es que, en personas poco formadas en la materia, el artículo citado puede haber sembrado desconfianzas, y éstas, a su vez, pueden mermar el prestigio que pudiéramos haber conseguido después de más de treinta años de dedicación a la enseñanza.

No obstante, comprendemos que si analizamos lo que sabemos, llegaremos a la conclusión que casi la totalidad de nuestros conocimientos han sido adquiridos de otras personas, vivas o fallecidas, y que si algunos de estos conocimientos archivados en nuestra memoria son falsos — sin que nosotros lo sepamos, no ha sido por culpa voluntaria nuestra, ha sido: o porque los aceptamos como verdaderos por venir de personas prestigiosas, o porque aun siendo verdaderos los interpretamos mal. Como es imposible analizar *todos* nuestros conocimientos profundamente, siempre tendremos errores archivados en nuestra mente y más actualmente

que apenas tenemos tiempo para ir corriendo apresuradamente de un sitio para otro; así, por ejemplo: A todos los que nos dedicamos a la enseñanza — catedráticos y profesores particulares — no nos llega el tiempo, porque cada curso nos aumentan los programas debido al progreso, y nos quitan horas para dejar sitio a nuevas asignaturas, siéndonos imposible desarrollar éstas con la extensión y profundidad deseada.

A todos los alumnos también les falta tiempo. Se cuentan por millares las definiciones y por millares los postulados y teoremas que tienen que aprender en un curso, y además se les exige que los manejen con rapidez y destreza. Los pobres están sujetos permanentemente casi a una crueldad mental en los mejores años de su vida. En estas condiciones los alumnos pretenden que sus profesores sean unos magos

que les enseñen unos cuantos trucos o artificios para poder resolver los rebuscados problemas de examen y rechazan todo razonamiento profundo y largo.

Por estas breves razones, nosotros somos los primeros que nos equivocamos muchas y repetidas veces en nuestro trabajo y en nuestros libros — de esto puede dar fe cualquiera que sea o haya sido alumno nuestro — en estos mismos comentarios es probable que se hayan deslizado errores; por ello no podemos tomar a mal cualquier crítica de nuestro trabajo o de nuestros libros, y nos ofrecemos, después de la publicación de este artículo, para reunirnos con cualquier persona y discutir cualquier punto sobre la mecánica racional newtoniana o clásica y luego publicar los resultados firmados por todos los reunidos.

Contestación del autor a los comentarios de R. Gómez de los Reyes e I. Cano de la Torre.

Poco resta por decir que sea esencialmente diferente del contenido del mencionado artículo, ya que, según mi opinión, el comentario al que ahora respondo no enfrenta la cuestión fundamental que se planteaba, a saber: la demostración que se criticaba adolece de un defecto lógico importante.

A riesgo de caer en repeticiones, haré unas cuantas observaciones:

1. Para establecer que una proposición es verdadera habría que fundamentar todas las proposiciones sobre las que se apoya; al contrario, si se quiere establecer su falsedad o, como en nuestro caso, su incorrecta deducción, en que basta con exhibir *alguna* proposición o regla de inferencia lógica que sea incorrecta.

2. No existe tal cosa como desplazamientos infinitesimales o configuraciones "infinitamente próximas" (1) (pág. 513), y si estas expresiones se usan a menudo, ello es correcto sólo si se puede traducir al lenguaje riguroso de la teoría de funciones y de los límites, ese lenguaje infinitesimal abreviado.
3. Se puede convenir en llamar, por definición, desplazamiento virtual finito a todo aquel cuyo origen y extremo pertenezcan a la hipersuperficie definida por el enlace holónomo, bilateral e independiente del tiempo que se considera, sin necesidad de que todos los puntos del desplazamiento estén contenidos en la hipersuperficie. Además, los despla-