

ECUACIONES DE LA PLASTIFICACION DE UN CAMPO ELASTICO (*)

Por MANUEL OSSET MORENO

Dr. Ing de Caminos, Canales y Puertos

A partir de las ecuaciones generales, se estudia el fenómeno de la plastificación de un campo elástico con las ecuaciones diferenciales de la red de curvas de plastificación, haciéndose, finalmente, unos comentarios sobre su significación física.

Consideramos un triedro trirrectangular $OXYZ$ de referencia y tres funciones de recorridos $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ continuas y derivables, que definen las deformaciones en un campo elástico.

En la figura 2 se ha representado, por medio de dos sistemas diédricos, el cuerpo deformado del paralelepípedo de la figura 1, no

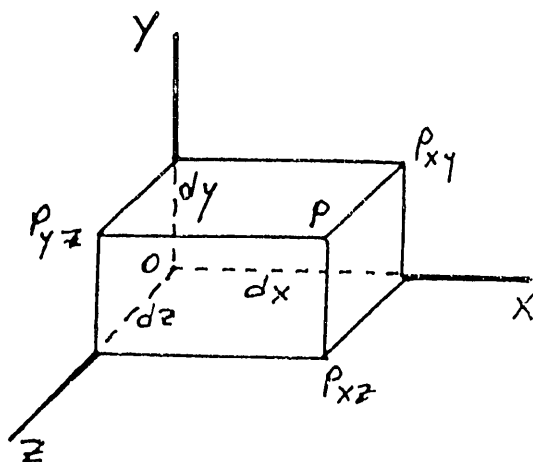


Figura 1.

en el caso general en que éste se convertirá en otro paralelepípedo oblicuo, sino en el caso en que, como inicialmente, los puntos P_{xy} , P_{xz} , P_{yz} son la proyección de un mismo punto P .

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de noviembre de 1974.

De la mencionada figura resulta fácilmente para las coordenadas de P_{xy} :

$$x_{P_{xy}} = (1 + \epsilon_x) dx + (1 + \epsilon_y) \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$y_{P_{xy}} = (1 + \epsilon_y) dy + (1 + \epsilon_x) \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$z_{P_{xy}} = 0$$

Sin dificultad pueden formarse las coordenadas de P_{yz} y de P_{xz} .

La igualación de las proyecciones de las diagonales de cada dos paralelepípedos sobre

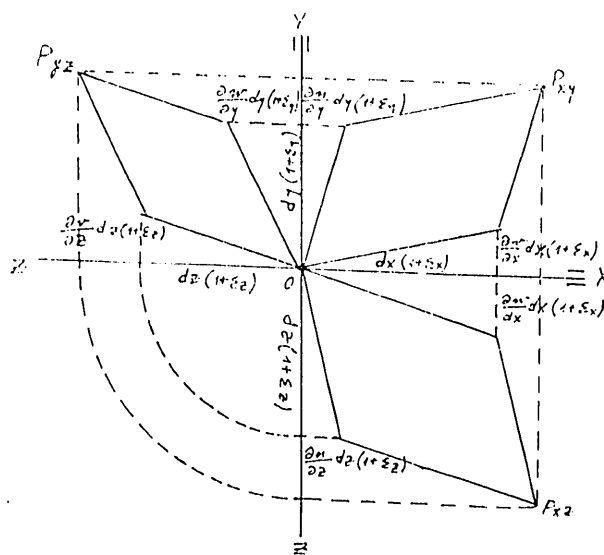


Figura 2.

el eje situado entre ellos, da lugar a las condiciones:

$$\begin{aligned}
 (1 + \varepsilon_x) dx + (1 + \varepsilon_y) \frac{\partial u}{\partial y} dy &= (1 + \varepsilon_x) dx + \\
 &+ (1 + \varepsilon_z) \frac{\partial u}{\partial z} dz \\
 (1 + \varepsilon_y) dy + (1 + \varepsilon_x) \frac{\partial v}{\partial x} dx &= (1 + \varepsilon_y) dy + \\
 &+ (1 + \varepsilon_z) \frac{\partial v}{\partial z} dz \\
 (1 + \varepsilon_z) dz + (1 + \varepsilon_y) \frac{\partial w}{\partial y} dy &= (1 + \varepsilon_x) dz + \\
 &+ (1 + \varepsilon_x) \frac{\partial w}{\partial x} dx
 \end{aligned} \quad (1)$$

Las ecuaciones anteriores garantizan, salvo infinitésimos de orden superior, que las aristas PP_{xy} , PP_{yz} , PP_{xz} , se habrán trasladado paralelamente a sí mismas, sin deformación angular relativa entre cada dos de ellas.

Simplifiquemos las ecuaciones (1):

$$\begin{aligned}
 (1 + \varepsilon_y) \frac{\partial u}{\partial y} dy &= (1 + \varepsilon_z) \frac{\partial u}{\partial z} dz \\
 (1 + \varepsilon_x) \frac{\partial v}{\partial x} dx &= (1 + \varepsilon_z) \frac{\partial v}{\partial z} dz \\
 (1 + \varepsilon_x) \frac{\partial w}{\partial x} dx &= (1 + \varepsilon_y) \frac{\partial w}{\partial y} dy
 \end{aligned} \quad (2)$$

Eliminando dx, dy, dz , en el sistema lineal y homogéneo (2) en estas diferenciales, resulta:

$$\begin{vmatrix}
 0 & -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\
 \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial v}{\partial z} \\
 -\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0
 \end{vmatrix} = 0$$

o bien:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

Esta ecuación (3) es la condición de plastificación buscada; el sistema (2) define las ecuaciones diferenciales de la red de curvas de plastificación.

La condición (3) es similar a la condición que define los planos de rotura del terreno de la teoría de Coulomb. Las curvas alabeadas (2) son las "líneas de corriente" de la plastificación.

El sólido de la figura 3, aparte de despertar un sentimiento de nostalgia y gratitud hacia nuestro bondadoso profesor D. Clemente Sáez, recientemente fallecido, pone de manifiesto que el lugar geométrico de los puntos P es, por así decirlo, una "línea tectónica" de disipación de la energía rotacional puesta en juego.

Esta línea es extremal, o al menos estacionaria, pues la presencia de un triedro indeformado en cada punto P de dicha geodésica hace ver que en el entorno inmediato a P no ha podido producirse deformación angular alguna, hecho que cuadra, evidentemente, con la aparición de la plastificación, o sea, con la formación de estados fluidificados caracterizados por un reparto esferoidal de tensiones.

Todo sucede como si las aristas punteadas de la figura 3 se hubieran separado por tor-

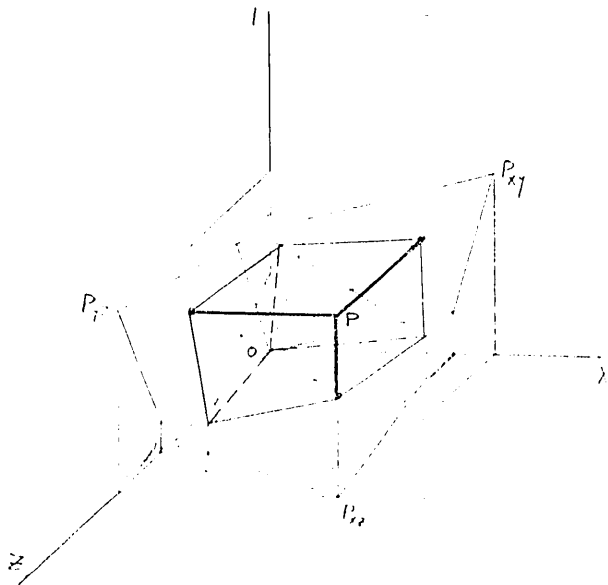


Figura 3.

sión, alrededor de OP aproximadamente, de los pies de las perpendiculares que parten de P hacia los planos coordenados.

Es decir, en O se produce una torsión que termina ya de plastificar el material en el entorno de O , sin poder transmitir deformación angular alguna hacia P .

Es como si dos tetraedros o dos conos de base común se escindieran por ésta al no poder transmitir una torsión diferencial alrededor de sus ejes.

Si imaginamos que estas torsiones opuestas comunicaran movimientos de rotación a los entornos de O y de P , la explicación aquí dada podría hacernos atribuir a la Luna el carácter de un detritus o protuberancia terrestre escindido de nuestro planeta por un esfuerzo que interrumpió el vínculo material inicial. La Luna se quedó girando por encima de nosotros sin enseñarnos, púdicamente, su otra cara, del mismo modo que las caras exteriores del triedro P no son visibles desde O .

Ejemplo sencillo:

Si escogemos como campo elástico el definido por las funciones:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz \\ v &= a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{23}yz \\ w &= a_{31}xz + a_{32}yz + a_{33}y^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

la condición (3) quedará verificada si:

$$a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{32}a_{21} \quad (5)$$

Normalmente, nos ocupamos en Elasticidad de tensiones simétricas, en las que:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ji} \\ (i, j &= 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (6)$$

siendo, por tanto, la condición (5) menos restrictiva que las tres condiciones a que equi-

vale la simetría (6). La integración de (2) es sencilla y conduce a curvas similares a las de un estado de imantación alrededor de una barra con dos polos magnéticos.

* * *

Si algún lector se pregunta por qué se menciona a Einstein en la bibliografía, sin que al parecer tenga algo que ver con lo expuesto en este artículo, le recomendaría mire atentamente las pirámides cuadrangulares o "rutas" de plastificación de la figura 3.

Además, análogamente el papel antagonista asumido por los puntos O y P , polos de la deformación y de la indeformabilidad, respectivamente, en cualquier triángulo rectángulo de la naturaleza, encontraremos a Pitágoras y a Einstein: uno para afirmar a Euclides, sumando los cuadrados de los catetos; el otro para negarle, restando del cuadrado de una hipotenusa, $c^2 - l^2$, el cuadrado de un cateto, x^2 .

BIBLIOGRAFIA

- TORROJA, E.: Elasticidad. Dossat, S. A. Madrid, 1945.
- EINSTEIN, A.: La relativité et le problème de l'espace. Gauthier-Villars. París, 1956.
- SAWCZUK y JAEGER: Grenztragfähigkeitstheorie der Platten. Springer. Berlín, 1963.
- RUSSEL, B. Das ABC der Relativitätstheorie. Rowohlt Verlag, 1972.
- SCHRODINGER, E.: Science theory and man. George Allen and Unwin Ltd., 1957.
- TERRADAS, E., y ORTIZ, R.: Relatividad. Espasa-Calpe. Argentina, 1952.
- KOROLEW, W. I.: Uprygo-plasticheskie deformatsii oblochek. Maschinostroenie. Moscú, 1971.