

PANDEO LATERAL DE ARCOS

ESTUDIO GENERALIZADO Y REVISADO (*)

Por JOSE M.^a OCTAVIO DE TOLEDO
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

El tema objeto del presente artículo fue tratado ya por el autor en otro trabajo, aparecido en esta Revista (noviembre 1971), bajo el título "Estudio sobre pandeo lateral de arcos".

Partiendo de aquel trabajo, en el presente se revisa una interpretación que allí se hacía, y se generaliza el método empleado a los diversos tipos de sustentación posibles, indicando, además, la manera de incluir el efecto de los esfuerzos axil y cortante.

1. INTRODUCCION

Partimos de nuestro trabajo "Estudio sobre pandeo lateral de arcos" (REVISTA DE OBRAS PUBLICAS, noviembre 1971). En aquel trabajo se exponía un método para el estudio de la estabilidad elástica de los arcos, a efectos de deformaciones transversales a su plano. Se consideraba solamente el efecto de los momentos flectores laterales y de los momentos torsores (esfuerzos, en la práctica, preponderantes, particularmente el primero), y se estudiaba el caso de un arco biarticulado en los apoyos, entendiéndose biarticulado a todos los efectos, es decir, con libertad de giros sobre cualquier eje que pasara por la articulación. Se hacía también una indicación somera sobre la manera de adaptar el método a cualquier otro tipo de sustentación.

El presente trabajo persigue tres objetivos:

En primer lugar una revisión de la interpretación que en aquél se hacía del caso analizado.

En segundo lugar, tomar en consideración el efecto de los demás esfuerzos (no incluidos en aquél), esto es, los esfuerzos axiales y cortantes.

Y por último, estudiar con detalle el caso de otros tipos de sustentación, adaptando el método establecido a sus condiciones propias y dándole carácter general.

2. EXPOSICION SUCINTA DEL METODO

Refiriéndonos al caso del arco biarticulado a todos los efectos, haremos una exposición del método mencionado, reducida a sus aspectos esenciales.

2.1. Aprovechando la libertad de giros en el apoyo izquierdo, introduciremos uno (muy pequeño, como son las deformaciones admisibles en los materiales de corriente empleo), según el eje de flexión lateral, normal a la directriz.

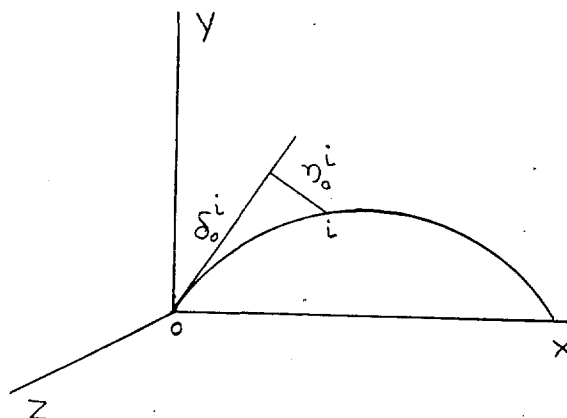
Consideramos el arco dividido en un número n de dovelas, definidas por los puntos $0, 1, \dots, n$ de la directriz.

Por efecto del giro inicial φ_0 el punto 1 sufrirá un corrimiento z_1 (normal al plano del arco), de valor $z_1 = \delta_0^1 \varphi_0$. (En la figura adjunta se ve el significado de los símbolos δ y η .)

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 28 de febrero de 1974.

Por efecto de este corrimiento se inducirán momentos flectores laterales y torsores en la sección correspondiente a 1. Consideraremos que éstos son los esfuerzos actuando sobre la dovela 0-1 (lo cual es correcto cuando el valor de n se hace tender a infinito).

Llamaremos a los momentos inducidos $(M_f)_1$ y $(M_t)_1$, con sus correspondien-



tes giros φ_1 y θ_1 . Los momentos citados son proporcionales al ángulo φ_0 , ya que z_1 lo es.

En el punto 2 se producirán corrimientos por efecto de todos los giros anteriores, siendo el valor definitivo:

$$z_2 = \delta_0^2 \varphi_0 + \delta_1^2 \varphi_1 + \eta_1^2 \theta_1 \quad (\text{proporcional a } \varphi_0),$$

y así sucesivamente, hasta el punto i , cuyo corrimiento será:

$$z_i = \delta_0^i \varphi_0 + \sum_{j=1}^{i-1} (\delta_j^i \varphi_j + \eta_j^i \theta_j)$$

Si existiera, además, un giro θ_0 sobre la tangente en el origen, la expresión sería:

$$z_i = \delta_0^i \varphi_0 + \eta_0^i \theta_0 + \sum_{j=1}^{i-1} (\delta_j^i \varphi_j + \eta_j^i \theta_j) \quad (1)$$

Haciendo tender n a infinito, resulta la expresión como una ecuación integral.

Para el extremo derecho obtendremos un corrimiento final que, si es nulo, nos indicará que existen infinitas posiciones de equilibrio elástico del arco (pues lo que hemos hecho ha sido simplemente comprobar que las deformaciones producidas tras haber introducido el giro φ_0 son compatibles con las condiciones de sustentación). Cada posición vendrá definida por el ángulo φ_0 .

Partiendo de un giro inicial θ_0 sobre la tangente en el origen, se llega a resultados análogos. Y como cualquier giro que produzca corrimientos transversales se descompone en otros dos como los anteriores, superponiendo los resultados podremos analizar su efecto. (Nota: Consideraremos sólo el caso de primer estado crítico de pandeo, cuando el signo de z_i se mantiene constante, único que estimamos de interés.)

Lo que acabamos de exponer en este apartado es un esquema general, válido para cualquier tipo de arco biarticulado. Formularemos a continuación las expresiones correspondientes a uno de directriz circular, sometido a su propio peso, a fin de dejar perfectamente claro cuanto hemos dicho.

Convenimos los signos representados con los que se obtiene desplazamientos positivos para giros positivos.

Se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{(M_f)_i}{EI} \Delta s \\ \theta_i &= \frac{(M_t)_i}{C} \Delta s \end{aligned} \right\} (\Delta s = \text{espesor de una dovela}). \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (M_f)_i &= V(M_f)_i + H(M_f)_i + \sum_{j'=1}^i (M_f)_{i,j'} \\ (M_t)_i &= V(M_t)_i + H(M_t)_i + \sum_{j'=1}^i (M_t)_{i,j'} \end{aligned} \quad (3)$$

Con V señalamos el efecto de la reacción vertical, con H el de la horizontal. El tercer término corresponde al efecto del peso de la dovela comprendida entre los dos puntos $(j-1)$ y j , cuyo punto medio es j' (será, por lo tanto, $\alpha_{j'} = \frac{1}{2}(\alpha_{j-1} + \alpha_j)$).

Una fuerza vertical f_v dará unos componentes, normal y tangencial, de valor:

$$f_v \cos \alpha_i, \quad f_v \sin \alpha_i.$$

Una fuerza horizontal:

$$f_h \sin \alpha_i, \quad f_h \cos \alpha_i.$$

Lo cual nos permitirá establecer:

$$\left. \begin{aligned} V(M_f)_i &= -V \cos \alpha_i z_i \\ H(M_f)_i &= -H \sin \alpha_i z_i \\ (M_f)_{i,j'} &= p \Delta s \cos \alpha_i (z_i - z_{j'}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} V(M_t)_i &= V \sin \alpha_i z_i \\ H(M_t)_i &= -H \cos \alpha_i z_i \\ (M_t)_{i,j'} &= -p \Delta s \sin \alpha_i (z_i - z_{j'}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En donde $z_{j'} = \frac{1}{2}(z_{j-1} + z_j)$ (al tomar intervalos muy pequeños) y p es el peso por unidad de longitud.

Además:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} p S \\ H &= \frac{\sum_{i=0}^n M_i Y_i \Delta s}{\sum_{i=0}^n (Y_i)^2 \Delta s} \\ M_i &= V x_i - p \Delta s \sum_{j'=1}^i (x_i - x_{j'}) \\ x_i &= R (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_i) \\ y_i &= R (\sin \alpha_0 - \sin \alpha_i) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

donde S representa la longitud del arco.

Y, por fin:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij} &= R [1 - \cos (\alpha_i - \alpha_j)] \\ \eta_{ij} &= R \operatorname{sen} (\alpha_i - \alpha_j) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Los sistemas numerados de (1) a (2) indican el proceso de cálculo. En el estudio citado se concretaron para el caso de un arco de hormigón de 50 m de luz, 20 de flecha y canto constante de 1 m. Comentaremos a continuación los resultados obtenidos.

2.3. Realizado el programa para ordenador, los primeros cálculos mostraron, al estudiar las convergencias, que se obtenía una aproximación aceptable con 350 dovelas.

Una segunda serie de cálculos, con $\varphi_0 = 10^\circ$, $\theta_0 = 0^\circ$ (al resultar z_i proporcional a φ_0 , o a θ_0 , para el cálculo efectivo se pueden tomar valores de cierta magnitud) y ancho de 0,50, 0,70 y 0,80 m, dio los siguientes valores de z_n :

0,50	0,70	0,80
-2,10	-0,57	-0,09

Por extrapolación, el valor nulo se obtenía para un ancho de 0,82.

Partiendo de estos resultados se establecía la conclusión de que para un ancho de 0,82 m el arco pandearía irremediablemente, viniendo determinado el fenómeno por los infinitos valores posibles de φ_0 , de acuerdo con el esquema explicado en 2.1. Para los valores ensayados se habrían rebasado las condiciones críticas.

Para $\varphi_0 = 0^\circ$, $\theta_0 = 10^\circ$ se obtenía $z_n = 7,23$, y se llegaba a la conclusión de que el pandeo determinado por el valor de θ_0 tendría lugar después de haber rebasado ampliamente las condiciones críticas del determinado por φ_0 .

La interpretación dada era correcta en el sentido de que, efectivamente, para un ancho de 0,82 el arco alcanzaría irremediablemente una situación de inestabilidad elástica. Sin embargo, era incompleta, y no explicaba satisfactoriamente el fenómeno, como vamos a ver en el apartado siguiente. (Esta crítica, que nos obliga a revisar la interpretación que dimos entonces, afecta tan sólo a esa interpretación, pero no al método en sí, que mantiene su plena validez.)

3. INTERPRETACION REVISADA DE LOS RESULTADOS

Anteriormente decíamos que los efectos de dos giros φ_0 y θ_0 se superponían. Si los corrimientos relativos fueran z'_n y z''_n , el corrimiento total sería:

$$z_n = z'_n + z''_n.$$

Si, en vez de θ_0 , tomáramos $\theta'_0 = -\frac{z'_n}{z_n} \theta_0$, el corrimiento total sería nulo, y el arco inestable. Las infinitas posiciones posibles de equilibrio elástico vendrían determinadas por ángulos de la forma $\lambda \varphi_0$ y $\lambda \theta_0$. El caso que vimos antes, en que z'_n se hacía nulo para $\varphi_0 = 10^\circ$, sucediendo, al mismo tiempo, que z''_n resul-

taba no nulo para $\theta_0 = 10^\circ$, es un caso particular en que la inestabilidad resulta para $\theta'_0 = 0^\circ$.

En consecuencia, podremos decir que un arco con el tipo de sustentación considerado *siempre* sufrirá un efecto de pandeo lateral, queriendo decir que *siempre* existirán infinitas posiciones de equilibrio elástico.

Por otra parte, puede observarse que este arco, dadas las condiciones de sustentación, estará también *siempre* en equilibrio estático inestable, volcando irremediabilmente tan pronto se dé la menor excentricidad en las acciones. Su interés es, por lo tanto, puramente teórico, en cuanto que nos ha permitido desarrollar para él un método que puede adaptarse a cualquier otro caso (como luego veremos). Antes de abordar esta cuestión, examinaremos el efecto de los otros esfuerzos que intervienen en las deformaciones, como ya anunciábamos en 1.

4. INFLUENCIAS DE LOS ESFUERZOS AXILES Y CORTANTES

4.1. Los esfuerzos axiales no provocan directamente corrimientos transversales. Tan solo son causa de pequeñas variaciones en los valores de δ_i^j , η_i^j y α_i . Como la variación relativa de estos valores es muy pequeña, no la tendremos en cuenta.

4.2. Los esfuerzos cortantes, por el contrario, sí provocan corrimientos transversales. Son consecuencia de los giros de las secciones del arco, por los que éstas dejan de ser perpendiculares al plano XY.

Para tenerlos en cuenta en el proceso de cálculo establecido, bastará considerar que es:

$$T_i \Delta s = (M_f)_i - (M_f)_{i-1}.$$

El corrimiento correspondiente, que se transmite a los puntos situados a la derecha de i , será de valor:

$$T_i / GA \quad (G = \text{módulo de deformación angular}).$$

La inclusión de este término en las fórmulas (1) establecidas anteriormente (y en la expresión integral) es inmediata.

Es práctica corriente no tener en cuenta estos efectos, debido a que su influencia relativa suele ser muy pequeña.

5. GENERALIZACION DEL METODO

5.1. Examinaremos, en primer lugar, el caso de un arco empotrado en su extremo izquierdo, queremos decir con coacciones que impiden el giro sobre el eje de flexión lateral (normal a la directriz) y sobre el eje de torsión (tangente a la directriz). Los giros de flexión longitudinal pueden ser libres (sería el caso de un apoyo articulado, en que el contacto fuera de tipo cilíndrico, que permitiría giros tan sólo en el plano del arco). Se trata, pues, de un empotramiento a efectos de deformaciones transversales.

El extremo derecho lo supondremos libre de coacciones para giros. En este caso introduciremos un momento inicial, transversal, en el apoyo izquierdo. La es-

tabilidad estática del arco exigirá la presencia de otras reacciones que anulen a ese momento.

El signo de los momentos flectores y torsores será el de los ángulos de deformación que provocan (el cual fue convenido anteriormente). El signo de un momento lo estableceremos mediante el esquema siguiente, en el que figura el vector representativo de dicho momento.

Sentado este convenio, vamos a deducir las reacciones de sustentación provocadas por la introducción de un momento transversal $(M_f)_0$ en el origen. (Nota: $(M_f)_0$ no tiene por qué ser muy pequeño, ya que, aunque sea de cierta magnitud, las deformaciones serán, en cambio, muy pequeñas.)

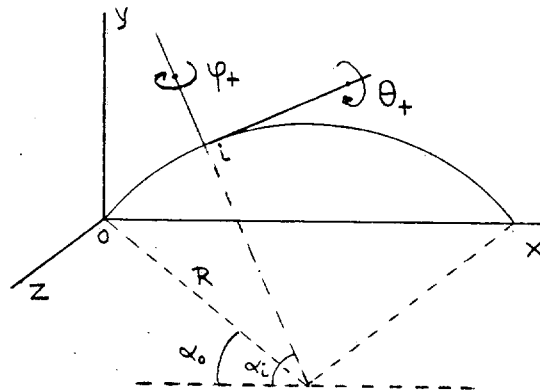
Las reacciones de sustentación por efectos transversales, en el caso que analizamos, tras haber introducido el momento $(M_f)_0$, serán el momento $(M_t)_0$ y el par f . El momento representativo del par f estará situado sobre el eje OY , y su magnitud será fL . El equilibrio de la pieza exige que sea:

$$(M_f)_0 \cos \alpha_0 = (M_t)_0 \sin \alpha_0$$

$$(M_f)_0 \sin \alpha_0 + (M_t)_0 \cos \alpha_0 = fL$$

Estas relaciones nos dan los valores absolutos de $(M_t)_0$ y de f .

Los sentidos vienen definidos en la figura, y han sido establecidos de acuerdo con el convenio de signos adoptado. Ese convenio nos guiará también en lo su-



cesivo, aunque no se cite explícitamente. Estimamos que proporciona un criterio claro a efectos de evitar errores.

Volviendo a las relaciones, observaremos que los valores de $(M_t)_0$ y de f son proporcionales a $(M_f)_0$. Por lo tanto, en este caso, no vamos a contar con una duplicidad de valores iniciales, independientes entre sí, como ocurría en 2 y en 3. Este hecho conducirá a una interpretación diferente del fenómeno, como luego veremos. (Nota: La estabilidad estática del arco fuera de su plano exige la presencia de las tres coacciones que dan lugar a los tres esfuerzos iniciales considerados. No se puede suprimir ninguno sin que el arco pierda la estabilidad. Es, pues, isostático a estos efectos. Añadiendo coacciones en el otro extremo obtendremos grados de hiperestaticidad, que exigirán la presencia de nuevos esfuerzos, dados por nuevas relaciones, lo cual será objeto de posteriores apartados.)

5.2. Tenemos ya el arco sometido en el extremo izquierdo a las tres sollicitaciones $(M_f)_0$, $(M_t)_0$, f , las cuales no son independientes entre sí, siendo las dos últimas proporcionales a la primera, es decir, si variamos $(M_f)_0$ las otras variarán

proporcionalmente. Además estarán todas las correspondientes a la posición de partida del arco.

El proceso de cálculo es esencialmente el mismo que en el caso que ya estudiamos, con algunas diferencias, que vamos a destacar.

En el esquema general expuesto en 2.1 se veía que las fuerzas situadas a la izquierda del punto i inducían unos esfuerzos en la sección i como consecuencia del desplazamiento z_i (algunas de estas fuerzas, v. gr.: los pesos de las dovelas comprendidas entre 0 e i , se habían apartado de su posición original a causa de los corrimientos experimentados por los puntos situados a la izquierda de i , hecho éste que se tenía en cuenta en la formulación).

En el presente caso, las diferencias son las siguientes:

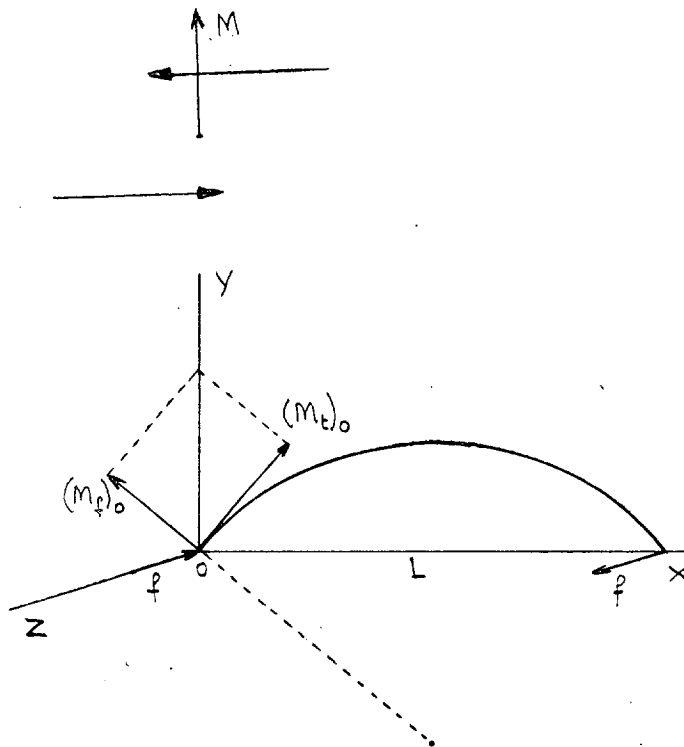
- Los ángulos φ_0 y θ_0 son nulos.
- A las fuerzas consideradas en 2.1 (reacciones en el apoyo izquierdo y acciones situadas entre los puntos 0 e i) hay que añadir los momentos $(M_f)_0$, $(M_t)_0$ y la fuerza f .

La expresión (1) resultará ser, en este caso:

$$z_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\delta_i^j \varphi_j + \eta_i^j \theta_j) \quad (\text{con } z_1 = 0).$$

Las (2) no cambiarán y las (3) contarán con la adición, en el segundo miembro, de los términos correspondientes a $(M_f)_0$, $(M_t)_0$ y f (acciones estas que también inducen esfuerzos en cada sección i).

Es de notar que las acciones que acabamos de citar inducen su influencia



independientemente del valor de z_i . Designaremos los momentos inducidos por $(M'_f)_i$ y $(M'_t)_i$, que son los términos a añadir en las expresiones (3).

Su valor, para el caso de arco de directriz circular, vendrá dado por las siguientes expresiones, deducidas por la observación de las figuras de 2.1 y 5.1:

$$\left. \begin{aligned} (M'_f)_i &= (M_f)_0 \cos(\alpha_i - \alpha_0) + (M_t)_0 \sin(\alpha_i - \alpha_0) - f \delta_{i0} \\ (M'_t)_i &= -(M_f)_0 \sin(\alpha_i - \alpha_0) + (M_t)_0 \cos(\alpha_i - \alpha_0) + f \eta'_{i0} \end{aligned} \right\}$$

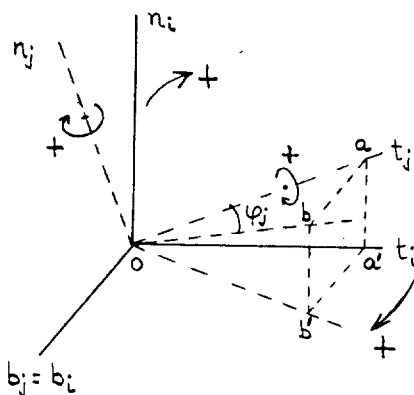
(Para los signos se han tenido en cuenta las observaciones hechas en 5.1).

Las expresiones (4) y (5) no varían.

Acabamos de ver, pues, que el proceso de cálculo es, en lo esencial, el mismo, salvando las diferencias que hemos establecido. Aquí, como puede demostrarse trivialmente, los valores de z_i son proporcionales a $(M_f)_0$.

La interpretación, sin embargo, es diferente, y acorde con los resultados obtenidos para la pieza recta en nuestro "Estudio sobre pandeo lateral de arcos". En efecto, aquí un valor nulo de z_n indica que el arco es elásticamente inestable, viniendo definidas las infinitas posiciones de equilibrio por un solo parámetro: $(M_f)_0$. (En el caso biarticulado, al existir los parámetros φ_0 y θ_0 , combinándolos adecuadamente conseguíamos siempre un valor nulo de z_n .)

5.3.1. El arco cuya estabilidad elástica hemos analizado en el apartado anterior es, según hemos indicado allí, isostático a efectos transversales. Añadiendo al apoyo



derecho las coacciones a los giros que le faltan obtendremos el mayor grado de hiperestaticidad posible a causa de las condiciones de sustentación. Este es el caso que vamos a estudiar a continuación.

En los casos estudiados anteriormente sólo se exigía que el corrimiento final z_n fuera nulo. Esto era suficiente para que las deformaciones fueran compatibles con las condiciones de sustentación. En el caso presente, éstas exigen además que los ángulos girados por la última sección del arco sean nulos. Es necesario, pues, estudiar el proceso de transmisión de giros, cosa que haremos en el siguiente apartado.

En la figura se han representado las tangentes normales y binormales a la directriz (t_i , b_i , ..., etc.) en dos puntos i y j (se trata realmente de paralelas a esas rectas).

El giro φ_i sobre n_j da lugar a que la tangente t_i gire un ángulo:

$$\frac{a b}{0 a'} = \frac{a b}{0 a \cos(\alpha_i - \alpha_j)} = \varphi_j / \cos(\alpha_i - \alpha_j).$$

En definitiva, los giros inducidos serán:

— Para t_i :

$$\varphi_j / \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \theta_j / \sin(\alpha_i - \alpha_j)$$

— Para n_i :

$$-\varphi_j / \sin(\alpha_i - \alpha_j) + \theta_j / \cos(\alpha_i - \alpha_j).$$

Y los giros totales:

$$(\varphi_i) = \sum_{j=1}^i [\varphi_j / \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \theta_j / \sin(\alpha_i - \alpha_j)];$$

$$(\theta_i) = \sum_{j=1}^i [-\varphi_j / \sin(\alpha_i - \alpha_j) + \theta_j / \cos(\alpha_i - \alpha_j)].$$

5.3.4. Las condiciones que antes citábamos se formularán, por lo tanto:

$$(\varphi_n) = 0 \quad \text{y} \quad (\theta_n) = 0.$$

Los momentos iniciales $(M_f)_0$ y $(M_t)_0$ y las fuerzas f vendrán determinados por el cumplimiento de esta condición. En efecto:

Se puede superponer la influencia de $(M_f)_0$, $(M_t)_0$ y f , tomando éstos separadamente.

Tomando primero, por ejemplo, $(M_f)_0$, los corrimientos z_i vendrían expresados por las ecuaciones (1), etc., de 2.1, a las que habría que añadir los primeros términos de las (3') de 5.2, o sea:

$$\begin{aligned} (M'_f)_i &= (M_f)_0 \cos(\alpha_i - \alpha_0), \\ (M'_t)_i &= -(M_f)_0 \sin(\alpha_i - \alpha_0). \end{aligned}$$

Considerando, además, las ecuaciones (8), se obtendrá unos valores finales:

$$(z_n)_1, (\varphi_n)_1 \text{ y } (\theta_n)_1.$$

Tomando, después, $(M_t)_0$, de manera análoga, se obtendrá:

$$(z_n)_2, (\varphi_n)_2 \text{ y } (\theta_n)_2.$$

Tomando f :

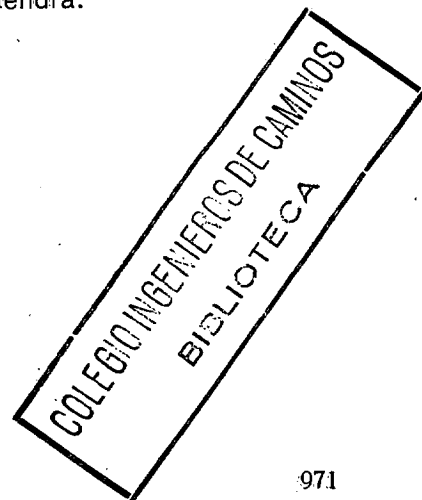
$$(z_n)_3, (\varphi_n)_3 \text{ y } (\theta_n)_3.$$

Estableceremos, luego, el sistema:

$$\begin{aligned} (\varphi_n)_1 + k_2 (\varphi_n)_2 + k_3 (\varphi_n)_3 &= 0, \\ (\theta_n)_1 + k_2 (\theta_n)_2 + k_3 (\theta_n)_3 &= 0, \end{aligned}$$

que nos permita determinar:

$$(M'_t)_0 = k_2 (M_t)_0 \text{ y } f' = k_3 f,$$



tales que para estos valores y para $(M_f)_0$ los ángulos finales (φ_n) y (θ_n) resultarán nulos, cumpliéndose así las condiciones impuestas por la sustentación.

Los esfuerzos iniciales deberán ser, pues, $(M_f)_0$, $(M'_t)_0$ y f' , u otros proporcionales a ellos. El corrimiento final será:

$$z_n = (z_n)_1 + k_2 (z_n)_2 + k_3 (z_n)_3,$$

que nos permite analizar el fenómeno como en 5.2. Con esto, podremos dar por resuelto el estudio del caso de biempotrado.

(Nota: Podría haberse impuesto la condición:

$$z_n = 0, \quad (\theta_n) = 0,$$

o bien:

$$z_n = 0, \quad (\varphi_n) = 0,$$

y estudiar la estabilidad según los valores de (φ_n) o de (θ_n) , respectivamente. El método sería el mismo, salvo diferencias puramente formales.)

5.4. Nos quedan los casos, de escaso interés práctico, resultantes de suprimir alguna de las coacciones a giros en el apoyo derecho, o de suprimir alguna del apoyo izquierdo añadiendo otra al derecho. Con las ideas expuestas hasta aquí, estimamos que el método puede adaptarse sin dificultad a esos casos.

Otro tanto decimos del caso en que alguna coacción sea elástica: había que contar, en el apoyo izquierdo, con un esfuerzo y ángulo iniciales, relacionados por el módulo correspondiente; en el apoyo derecho, la condición sería análoga.

NOTA.—El autor da las gracias a D. Alberto Dou, S. J., que ha tenido la amabilidad de leer el presente trabajo y que una vez más le ha demostrado su interés y su apoyo.