

PUNTUALIZACIONES SOBRE EL TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES (*)

Por EMILIO GARBAYO
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Es, generalmente, muy mal comprendido que es demostrable y que debe tomarse como principio en este famoso teorema y un elevadísimo porcentaje de los tratados de Mecánica Clásica cometen incorrecciones más o menos gruesas en su exposición.

El presente artículo no pretende, en absoluto, ser exhaustivo sobre el tema; sólo contribuir, por la vía de considerar ciertos ejemplos, a clarificar ciertas ideas.

A continuación examinamos críticamente una "demostración" del teorema, cuya incorrección tiene una cierta sutileza que no hace fácil detectarla y que, por tanto, le confiere un indudable interés didáctico.

En un libro que ha contribuido a formar muchas de nuestras generaciones de ingenieros, por lo demás excelente por otros conceptos, puede leerse (1):

"Principio de los trabajos virtuales. — La condición necesaria y suficiente para que un sistema material esté en equilibrio en una posición dada, es que la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas solicitantes sea nula para todos los desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces y efectuados a partir de la posición dada:

Es decir, si se verifica:

$$\sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i^* = \sum (X_i \delta x_i^* + Y_i \delta y_i^* + Z_i \delta z_i^*) = 0$$

y suponiendo que los enlaces son holónomos reversibles sin rozamiento. En efecto: La condición es necesaria. Porque si el sistema está en equilibrio, la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada punto P_i del sistema será:

$$\bar{F} + \bar{F}'_i = 0 \text{ multiplicando por } \delta \bar{r}_i^*$$

$$(\bar{F}_i + \bar{F}'_i) \delta \bar{r}_i^* = 0$$

y, por tanto:

$$\sum (\bar{F}_i + \bar{F}'_i) \delta \bar{r}_i^* = \sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i^* + \sum \bar{F}'_i \delta \bar{r}_i^* = 0$$

y como suponemos que los enlaces son sin rozamiento y que los desplazamientos virtuales son compatibles con los enlaces, se tendrá:

$$\sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i^* = 0$$

Sustituyendo en la anterior queda demostrado que si el sistema está en equilibrio se verifica:

$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i^* = 0$$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de octubre de 1973.

La condición es suficiente, es decir, que si la suma:

$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i^*$$

es constantemente nula para todos los posibles desplazamientos virtuales $\delta \bar{r}_i^*$, producidos a partir de una cierta posición A y compatibles con los enlaces del sistema, dicha posición A es de equilibrio.

La demostración se hace por reducción al absurdo del siguiente modo: Supongamos que en la citada posición A mantenemos el sistema en reposo y que luego la abandonamos a las fuerzas solicitantes, no pueden ocurrir más que dos cosas: o permanecer en reposo todos los puntos y la posición A es de equilibrio, o se mueve el sistema completo o parte de él.

Si hacemos esta última hipótesis y llegamos a un absurdo, estará demostrado el teorema o principio de los trabajos virtuales.

Pues bien, supongamos que se movió el sistema, o sea, que no fue nula la resultante de todas las fuerzas que actuaban sobre cada punto P_i que se movió, sufriendo un desplazamiento real $d \bar{r}_i$ compatible con los enlaces en esa posición A y, por tanto, el trabajo realizado por su resultante fue:

$$(\bar{F}_i + \bar{F}'_i) d \bar{r}_i = 1/2 m_i v_i^2 > 0$$

y sumando para todos los puntos que se movieron se tendrá:

$$\sum (\bar{F}_i + \bar{F}'_i) d \bar{r}_i = \sum 1/2 m_i v_i^2 > 0$$

ahora bien, como los enlaces son sin rozamiento y el desplazamiento real $d \bar{r}_i$ es compatible con ellos:

$$\sum \bar{F}'_i d \bar{r}_i = 0$$

Con esto se llega a que:

$$\sum \bar{F}_i d \bar{r}_i > 0$$

Contra lo supuesto, ya que en dicha posición A, $\sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i^*$ era nulo para todos los desplazamientos posibles ($\delta \bar{r}_i^*$) compatibles con los enlaces y el real ($d \bar{r}_i$) es uno de ellos.

Resumiendo: la condición necesaria y suficiente para que un sistema de puntos esté en equilibrio es que se verifique:

$$\underline{\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i^* = \sum (X_i \delta x_i^* + Y_i \delta y_i^* + Z_i \delta z_i^*) = 0}$$

para todos los desplazamientos ($\delta \bar{r}_i^*$) compatibles con los enlaces.

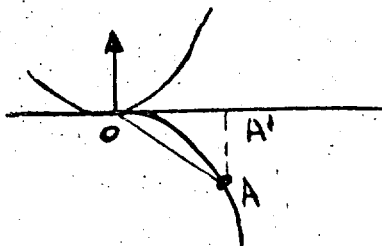
Esta ecuación se llama ecuación fundamental de la estática o ecuación de los trabajos virtuales."

La demostración parece impecable y, sin embargo, una cierta atención sobre la condición:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad [1]$$

demuestra que si se toma *literalmente* es incorrecta.

En efecto, es evidente que, para desplazamientos virtuales finitos, el trabajo virtual de las reacciones sin rozamiento no tiene por qué ser nulo, como ejemplifica la figura 1, esquematizando un enlace de apoyo sin rozamiento entre dos sólidos.



En cualquier caso, nuestra observación parece trivial, y, por el momento, presenta una objeción que parece inmediatamente remediable y que dramatizamos mediante una conversación ficticia entre dos interlocutores, A y B:

- A: Tiene usted razón en lo que dice, pero, a pesar de ello, no tiene la menor relevancia para nuestro caso, ya que [1] realmente indica que el trabajo virtual infinitesimal de las reacciones es cero. Por ejemplo, en el caso de la figura 1 $\delta \vec{r}$ tiene la dirección de la tangente, es decir, de OA' .
- B: A riesgo de parecerle pedante y superquisquilloso con mis precisiones matemáticas, le ruego que me explique lo que entiende por un desplazamiento infinitesimal.
- A: Creo ver la línea de su argumento; que un infinitésimo no es ningún número o vector fijo, sino una variable muy especial, y entonces parecería que no tengo derecho a hablar de *un* desplazamiento virtual infinitesimal. Pero esto no me da más problemas, y ya que me obliga a precisar, le diré que [1] en realidad significa que el trabajo virtual de las reacciones sin rozamiento es un infinitésimo de segundo orden con respecto a los desplazamientos, o en otras palabras, usando el ejemplo de la figura 1, que el trabajo de la reacción en el desplazamiento OA es de segundo orden con respecto a OA' o sea:

$$\lim_{OA' \rightarrow 0} \frac{\text{Trabajo}}{OA'} = 0$$

Creo que ahí está una respuesta rigurosa a su pregunta, en tanto que a mí, que no me gusta trabar la ciencia con expresiones tan enrevesadas, seguiré diciendo para agilizar el lenguaje que el trabajo virtual infinitesimal es nulo, o de segundo orden, etc. cuando haya de dirigirme a individuos en exceso escrupulosos como usted.

B: Estoy plenamente de acuerdo con sus precisiones, pero no sé si observa que, llegados a este punto, falla la demostración de la condición suficiente del teorema, cuya clave era una contradicción reflejada en la supuesta igualdad de una expresión que era cero:

$$\sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i$$

y otra que era estrictamente mayor que cero:

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

Sin embargo, ahora, en que tanto usted como yo estamos de acuerdo en que $\sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i$ no es cero, sino solamente de segundo orden infinitesimal, puesto que:

$$\sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = - \sum \bar{F}_i' \delta \bar{r}_i$$

la contradicción antes mencionada desaparece, pues la suma $\sum 1/2 m_i v_i^2$ tiene un orden infinitesimal que también es 2, es decir, el mismo que el del trabajo virtual.

Abandonamos aquí a nuestros personajes para señalar que el error en la argumentación anterior no es, ni con mucho, un caso aislado. Por citar ejemplos típicos, tenemos las referencias (2, 8 y 9) que se pueden criticar en términos muy similares a los precedentes; otros autores se conforman con probar la condición necesaria (3 y 7) eludiendo el comprometido caso de la condición suficiente. Más consecuente parece ser (4) quien, tras probar la condición necesaria, afirma que un enunciado que contenga la condición suficiente debe ser considerado como postulado.

Como argumento "meta-mecánico", que no prueba la incorrección de la demostración que ha sido criticada en este artículo, pero sí permite suponerla plausiblemente, expondremos que la demostración expuesta se basa en el teorema de la energía y no utiliza exhaustivamente los demás teoremas fundamentales, siendo, por tanto, sospechoso que una sola ecuación escalar (la de la energía) pueda describir ciertos aspectos (los aspectos de equilibrio) de sistemas dinámicos con un número cualquiera de grados de libertad.

Con respecto al "teorema" de los trabajos virtuales, creemos que pueden tomarse dos posturas:

a) Postularlo sin demostración para sistemas cinemáticos con enlaces todos independientes del tiempo (*). Así puede desarrollarse la Estática con independencia lógica de los axiomas de la Dinámica.

b) Demostrarlo, para enlaces holónomos independientes del tiempo, usando los teoremas generales de la Dinámica condensados, por ejemplo, en las ecuaciones de Lagrange.

(*) Creemos que otra incorrección muy extendida en la casi totalidad de los libros es no mencionar que los enlaces sean independientes del tiempo. Omitiendo esto, se puede caer en dificultades como las que se dicen en la referencia (6).

Así se hace en (5), aunque este método deja algo insatisfecho en el sentido de que utiliza técnicas que sobrepasan con mucho el marco de la Estática.

Además, este método desplaza el problema al llamado Principio de D'Alembert, que es, en realidad, el punto crucial de todas las dificultades, y al que dedicaremos algunos comentarios en un próximo artículo, examinando algunas de las falacias en que tan frecuentemente se incurre al tratar de demostrar este principio (*).

Finalmente, una puntualización de carácter no académico: el autor de este artículo no ha pretendido un juicio negativo con respecto a todas las obras que han sido criticadas aquí, en especial la de la referencia (1) que ha servido como tema central. Esta obra goza de merecida fama entre nuestros estudiantes y profesionales y constituye, en muchos aspectos, un excelente libro.

Ni que decir tiene que críticas o comentarios sobre este artículo serían bien recibidas, como medio de informar sobre una cuestión en la que la confusión de ideas está bastante extendida.

(*) El autor de este artículo debe al Sr. Navarro Borrás el que, hace ya algunos años, le descubriese el auténtico contenido axiomático del principio de D'Alembert. El Sr. Navarro, catedrático de Mecánica Teórica en la Universidad Complutense, es de los pocos que claramente enuncian la independencia del principio de D'Alembert con respecto a los postulados de Newton (véase la ref. [6] a este respecto). Es sorprendente que, a pesar de los muchos años que lleva repitiendo esto en sus lecciones en la Universidad, el 99 por 100 de los autores de tratados de Mecánica no se hayan enterado.

REFERENCIAS

1. ISIDORO CANO DE LA TORRE Y RAFAEL GOMEZ DE LOS REYES: "Mecánica racional". Séptima edición, págs. 628-629.
2. M. LUCINI: "Lecciones sobre la teoría de la Mecánica". Cuarta edición, págs. 232-233.
3. D. E. RUTHERFORD: "Mecánica clásica", pág. 130. Editorial Dossat.
4. JOSE M.^a IÑIGUEZ y RAFAEL CID: "Mecánica teórica", tomo I, pág. 276.
5. EMILIO GARBAYO: "Elementos de dinámica clásica", pág. 158. Editorial Tecnos.
6. FRANCISCO NAVARRO BORRAS: "Consideraciones sobre el principio de D'Alembert". Artículo publicado en el "Libro homenaje al Prof. D. Obdulio Fernández" por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 1969.
7. H. GOLDSTEIN: "Classical Mechanics", pág. 15. Addison-Wesley Publ. Co.
8. P. APPELL, S. DAUTHERVILLE: "Précis de Mécanique", pág. 441. Gauthier-Villiar. París, 1952.
9. TIMOSHENKO and YOUNG: "Mecánica técnica", pág. 249. Hachette. Buenos Aires, 1957.