

APLICACION DE LOS PRINCIPIOS DEL METODO DE LOS "PLANOS DE OLEAJE" AL ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS DE ARENAS (*)

Utilización de la espiral logarítmica o equiangular para el estudio de las repercusiones de las obras marítimas por introducción del ángulo de rozamiento interno de la arena.

Por CARLOS GARAU SAGRISTA
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Es bien conocida en todo el mundo la teoría de los planos de oleaje del profesor Iribarren y del efecto de los fondos marinos sobre las líneas de onda. Estas actúan a su vez sobre las líneas batimétricas, pudiéndose afirmar que todo oleaje tiende a conformar la playa en curvas concéntricas con el polo de origen.

En régimen de vaciado, erosión o regresión, todo oleaje tiende a conformar la playa en espirales equiangulares concéntricas con el polo, con ángulo característico ϕ dependiente del rozamiento de las arenas en el seno del agua. Si el polo está en el infinito, la espiral se convierte en una recta que forma un ángulo ϕ con el oleaje.

En régimen de llenado, acarreo o acesión, todo oleaje tiende a conformar la playa en circunferencias concéntricas con el polo. Si el polo está en el infinito, la playa tenderá a ponerse paralela al oleaje.

El tipo de régimen que origina el oleaje depende del ángulo que presenta la orilla respecto de la onda y de la existencia de discontinuidades o puntos de apoyo.

En esta primera parte del artículo y tras indicar los principios básicos de la teoría, se exponen algunos ejemplos prácticos de confirmación de aquélla. En la segunda parte del artículo, que se publicará en el próximo número se comentan los resultados y se dan algunos detalles de tan importante teoría.

1. INTRODUCCION

El método de los planos de oleaje se basa en dos hechos fundamentales:

1. "Las líneas de onda a medida que se acercan a la costa y alcanzan profundidades reducidas, por efecto de los fondos sufren una deformación y tienden a adoptar la misma forma en planta que tienen las curvas batimétricas". (Expansión frontal.)

2. "Cuando la ondulación avanza en sentido divergente de la obra o costa; tendiendo a separarse de ella después de haber rebasado su extremo, a partir de este polo la onda sufre una *expansión lateral* en forma de ondas concéntricas."

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de octubre de 1973.

Si al primero le aplicamos el "Principio de Acción y Reacción", tendremos lo siguiente:

Es evidente que si los fondos producen una acción sobre el oleaje deformándolo, el oleaje producirá a su vez una reacción sobre los fondos. Si éstos son indeformables nada ocurrirá, pero si están constituidos por materiales sueltos, para este tipo de fondos podremos afirmar:

"Las curvas batimétricas tienden a deformarse adaptándose a la forma que las líneas de onda adoptan como efecto de la topografía submarina, del contorno de la costa y del contorno de las obras artificiales."

Bajo esta perspectiva he examinado los movimientos de arena, y tras la experiencia vivida durante ocho años en continuo contacto con las playas de la costa Catalana he llegado a unas conclusiones que por su trascendencia voy a exponer a continuación. Lo hago a sabiendas de que no están suficientemente arropadas, pues considero que es tan grande la luz que arrojan sobre tema tan difícil, y especialmente sobre el estudio de las repercusiones de las obras portuarias sobre las playas inmediatas, o de los peligros de aterramiento de este tipo de obras que debo hacerlo con la mayor urgencia, dejando para otras ocasiones la discusión de los fundamentos, el proceso que me ha llevado a ellas y las consecuencias que se pueden sacar, que no cabrían en este artículo.

2. CURVAS DE LLENADO, ACARREO O ACCESION

Vamos a analizar el proceso que se verifica en una playa rectilínea, en donde se ha construido una obra como la de la figura 1-a bajo la acción indefinida de un temporal de componente de poniente que forma un ángulo α_1 con la orilla.

Supondremos que la playa orientada de este a oeste es lo suficientemente larga hacia poniente para que el temporal pueda llenar el recinto que ofrece la obra, sin experimentar una alteración en su línea base. Prescindiremos de la influencia de la

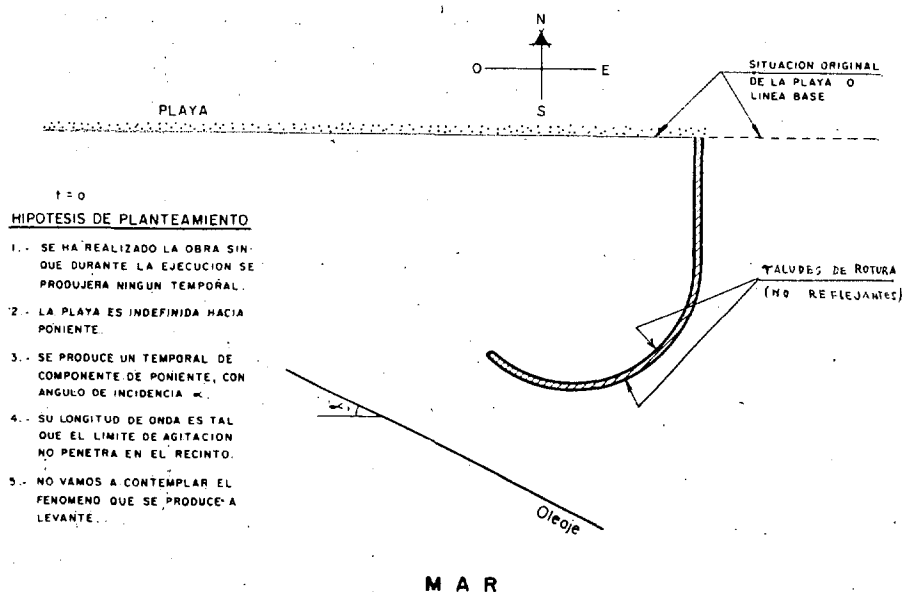


Figura 1, a.

longitud de onda del temporal y, por tanto, de la posible existencia de un límite de agitación en el interior del recinto, que podría producir lagunas, lenguas, etc., que nos complicarían inútilmente el fenómeno que queremos contemplar. Prescindimos, asimismo, de considerar el proceso que se produce a levante de la obra.

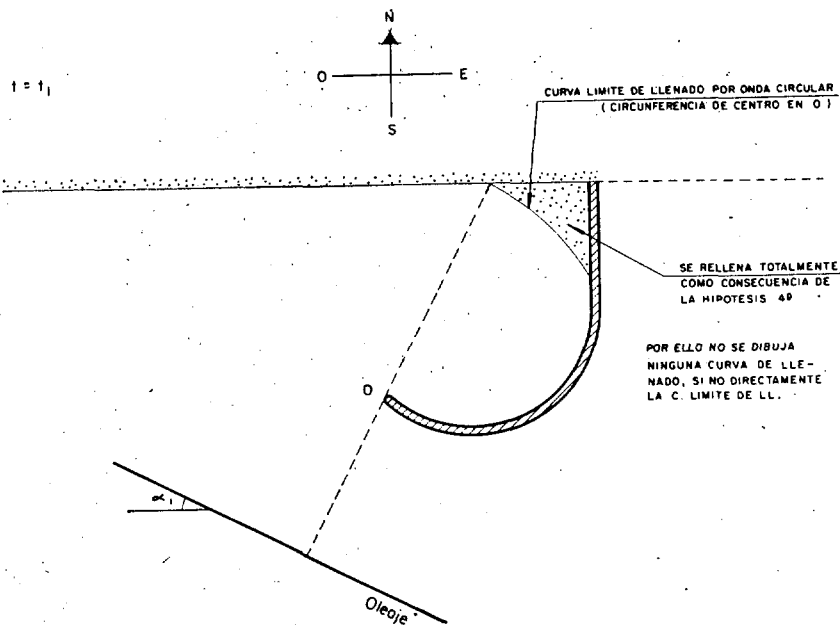


Figura 1, b.

Al cabo de un tiempo se habrá producido el llenado de una parte del recinto, según se indica en la figura 1-c. Si trazamos la normal al oleaje tangente al morro

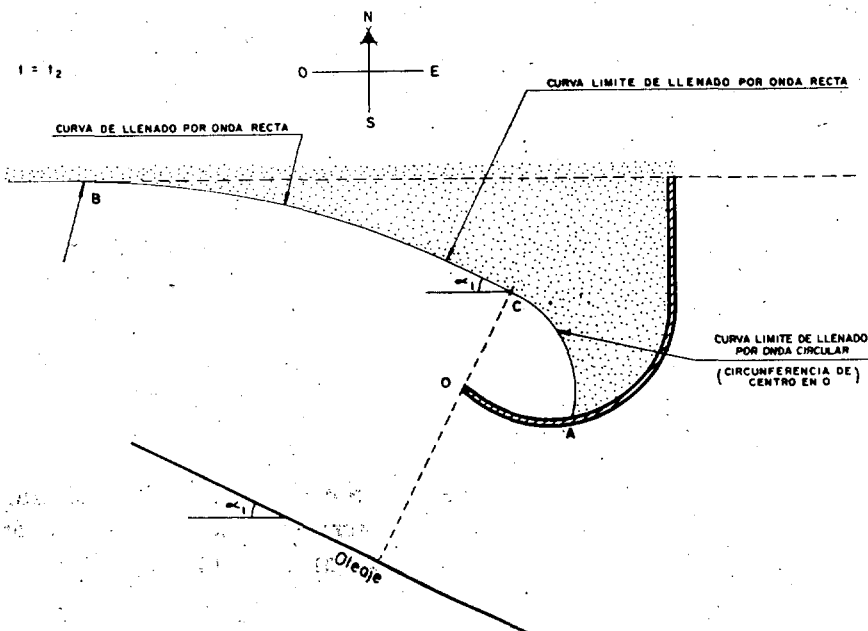
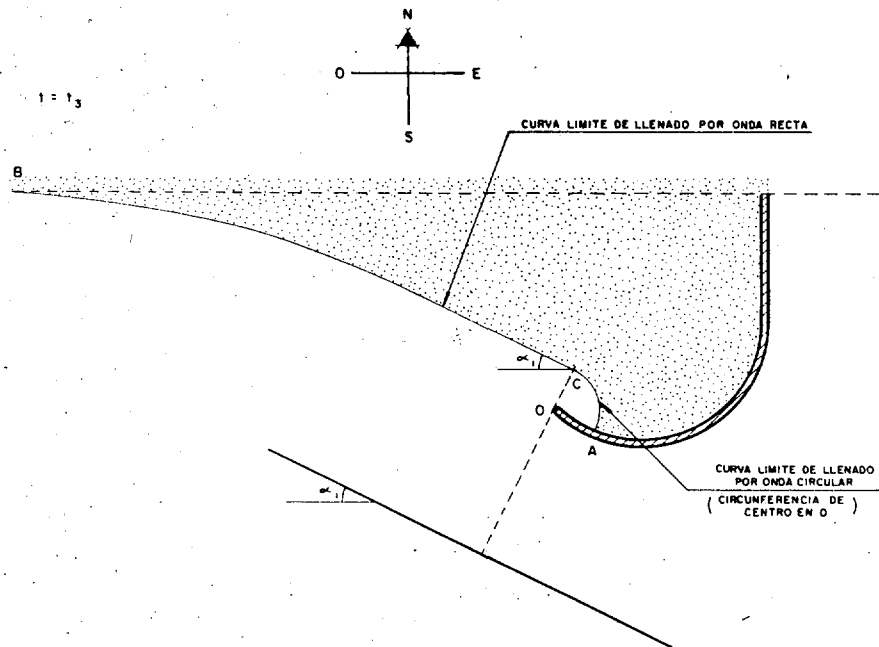


Figura 1, c.

En estos supuestos la curva de llenado o accesión en este tramo será recta en las proximidades del punto C y después se curvará para hacerse asintótica a la línea base de la playa hacia poniente.



A partir del punto C la onda es circular. En régimen de acarreo, llenando o ac-
cesión, la playa formada en el interior del recinto protegido por la obra se pondrá
perfectamente paralela a la ola. Es decir, la forma de la orilla de la playa será una
circunferencia con centro en el punto O, de tangencia de la normal al morro de la
obra.

La curva límite de llenado por oleaje circular originado por expansión lateral es una circunferencia con centro en el polo de expansión, tanto para la orilla como para las isobatas de reducida profundidad.

REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

3. CURVAS DE VACIADO, EROSION O REGRESION

Supongamos ahora que el recinto se ha llenado, y en este momento se produce la inversión de la componente del temporal que pasa a ser de levante, con el ángulo α_2 respecto a la orilla.

Prescindimos como antes de los fenómenos que se producen a levante.

Rápidamente se producirá la erosión de la playa anteriormente formada. A poniente de la normal al oleaje tangente en el morro de la obra, el ángulo de ataque del temporal disminuirá con el tiempo a medida que retroceda la playa.

A levante de dicha normal, el ataque será por onda circular procedente de expansión lateral con centro en O.

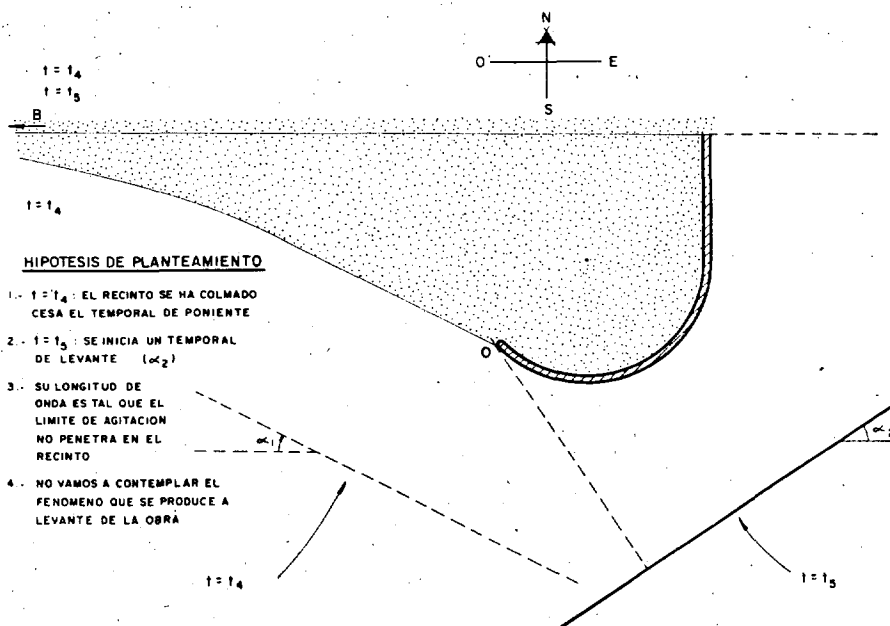


Figura 2, a.

En este proceso de erosión, al principio la onda circular incidirá sobre la orilla con un ángulo muy grande, pero rápidamente producirá una deformación, y la ola tenderá a conformar la playa a su propia forma circular.

A su vez, la arena ofrecerá una resistencia a ser erosionada, y como consecuencia, la ola circular sufrirá una deformación por expansión frontal.

Con esta mutua interacción entre oleaje de expansión lateral y batimétricas de la playa se verificará el proceso de erosión.

Estudiaremos ahora el perfil instantáneo al cabo de un tiempo t_0 (fig. 2-b).

Si examinamos la forma de la orilla tendrá una disposición tal que en cada punto la curva, o su tangente en dicho punto, forme con la respectiva dirección del

oleaje de origen un ángulo constante φ . Es decir, que la forma de la curva de la orilla y de las isobatas es tal que forma un ángulo constante $(90 + \varphi)$ con el radio vector de polo en O.

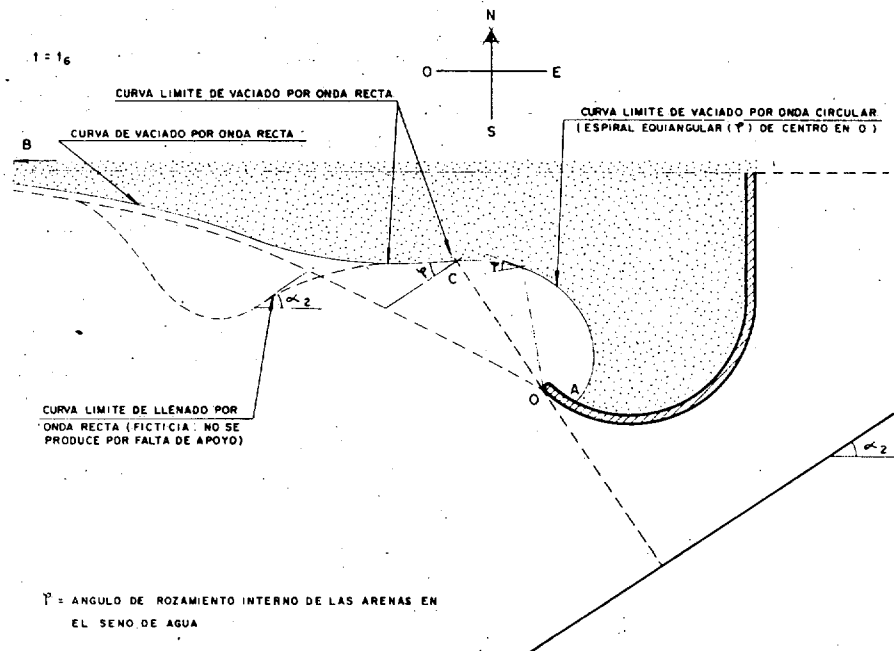


Figura 2, b.

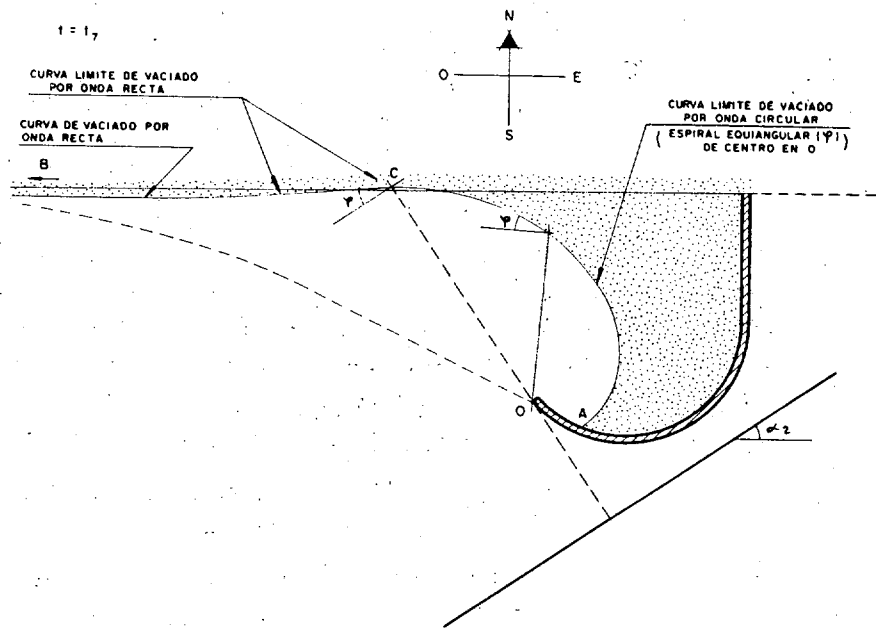


Figura 2, c.

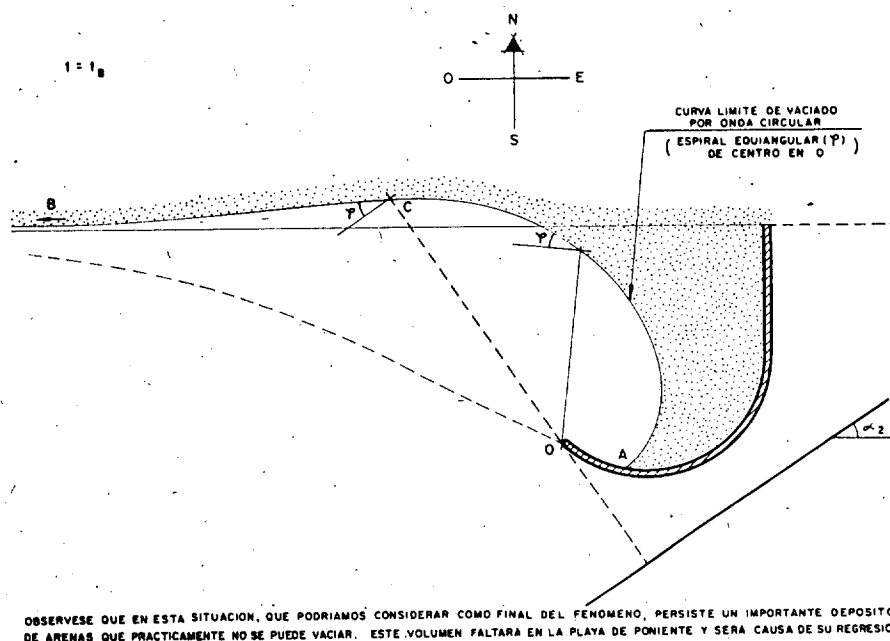


Figura 2, d.

SEGUNDO POSTULADO:

La curva límite de vaciado por oleaje circular originado por expansión lateral es una espiral equiangular o logarítmica con centro en el polo de expansión, tanto para la orilla como para las isobatas de reducida profundidad.

Para mayor claridad se indican en la figura 2, a, b, c y d una serie de posiciones sucesivas de la orilla que forman una película del proceso. En ellas se ha prescindido de la deformación de la normal OC al avanzar oblicuamente a las isobatas.

Admitido el segundo postulado, lo que queda por determinar es el ángulo característico de la familia de espirales.

Si examinamos la definición de rozamiento encontramos:

“Resistencia que se opone a la rotación o al resbalamiento de un cuerpo sobre otro o al movimiento de un sólido en el seno de un fluido.

El rozamiento constituye una fuerza retardatriz permanente que altera el carácter de todo movimiento que se verifica entre cuerpos o en el seno de los medios ponderales.”

Podemos, pues, inferir el

TERCER POSTULADO:

El ángulo característico de la familia de espirales depende fundamentalmente del rozamiento de las arenas en el seno del agua.

4. GENERALIZACION DE LOS POSTULADOS

En ambos casos de curva de llenado, acarreo o accesión y de curva de vaciado, erosión o regresión, la forma de la orilla a poniente de la normal al temporal en las proximidades del punto C se ha indicado como recta. Paralela al temporal en el primer caso. En el segundo, la recta forma un ángulo φ con el temporal de origen.

Si hacemos una abstracción de la existencia de una línea base de la playa (aunque representa algo que en la realidad habrá siempre: playa muy larga, obstáculo etcétera) y prescindimos, asimismo, de las deformaciones del oleaje de origen por la expansión frontal al alcanzar profundidades reducidas de fondos indeformables y consideramos el temporal de onda recta como un oleaje de polo en el infinito, podríamos decir:

"Todo oleaje tiende a conformar la playa en curvas concéntricas con el polo de origen:

En régimen de vaciado, erosión o regresión todo oleaje tiende a conformar la playa en espirales equiangulares concéntricas con el polo, con ángulo característico φ dependiente del rozamiento de las arenas en el seno del agua. Si el polo está en el infinito, la espiral se convierte en una recta que forma un ángulo φ con el oleaje.

En régimen de llenado, acarreo o accesión todo oleaje tiende a conformar la playa en circunferencias concéntricas con el polo. Si el polo está en el infinito, la playa tenderá a ponerse paralela al oleaje."

En el régimen de vaciado, erosión o regresión, el sentido del movimiento de la arena sobre la espiral es el de alejamiento del polo.

El tipo de régimen que origina el oleaje depende del ángulo que presenta la orilla respecto de la onda y de la existencia de discontinuidades o puntos de apoyo.

Los procesos de vaciado, erosión o regresión ejercen su acción hasta una determinada profundidad que dependerá de la altura de ola de los temporales que pueden incidir y de la naturaleza de las arenas. (Para una misma altura de ola arenas más gruesas darán una profundidad de erosión menor que las más finas.)

5. ALGUNAS OBSERVACIONES

5.1. Las consecuencias teóricas y prácticas que se extraen de estos postulados son insospechadas. Espero que la experiencia sancione su veracidad y su utilidad, y a continuación expondré algunas de las observaciones efectuadas y sus resultados que ayudarán a aclarar los conceptos expresados.

5.2. En primer lugar he intentado determinar, a la vista de situaciones reales, el ángulo característico φ de la familia de espirales que seguramente será fácil de determinar en ensayos en modelo reducido. Mis tanteos indican que se aproxima mucho a los 30° para las playas de arena granítica del sector de Cataluña.

La comprobación de la teoría da resultados sorprendentes al examinar las fotos aéreas de las playas de la Costa Brava en aquellos casos en que, por lo cerrado del contorno rocoso, es presumible que la orilla esté determinada por oleajes

procedentes de expansión lateral. También he obtenido resultados satisfactorios comprobando sobre algunos dibujos de publicaciones referentes a las costas de otros países.

En la mayoría, o por lo menos en muchas de las playas de fondo de cala, debido al contorno exterior y, a veces, muy alejado de dicha playa, los temporales llegan con predominio de movimiento por expansión lateral. Como también pueden producirse temporales de llenado, la forma de equilibrio de la playa se aproxima mucho a la curva límite de vaciado de ángulo intrínseco φ producida por la expansión lateral alrededor de uno o varios polos.

5.3. A la vista de ello, he confeccionado lo que se puede llamar el "compás de curvas de vaciado, erosión o regresión de playas", pues aunque su aspecto es el de una simple plantilla de curvas, tiene su centro de giro, por lo que la aparente plantilla debe llevar en el polo de la espiral, bien sea una punta que asome en ambos lados o bien una perforación para poderla utilizar tanto en el sentido de las agujas del reloj como en el contrario. Este "compás" es el que ha servido para confeccionar los dibujos del presente trabajo.

5.4. Cuando existen varios polos que ejercen su influencia sobre la forma de la playa, el compás se utiliza por sectores que vienen definidos por las líneas que unen dos polos sucesivos.

5.5. La espiral equiangular puede aplicarse lo mismo a una fotografía aérea que a un plano sin preocuparnos de la correspondiente escala, puesto que lo que define la curva es el ángulo que forma la tangente en cada punto, con el radio vector, y este ángulo no varía con un cambio de escala. Expresado de otro modo: si hacemos una homotecia con centro en el polo de la espiral, lo que obtendremos será la misma curva girada con cierto ángulo alrededor del polo. Y el giro alrededor del polo es precisamente lo que es necesario hacer para adaptar la curva al plano, mapa o foto que queremos examinar.

5.6. Muy relacionado con el tema de los efectos de una obra y con la curva de equilibrio por erosión de onda circular procedente de expansión lateral, es el de los tómbolos. J. Larras, en el capítulo XI de su libro "Playas y Costas de Arena", establece dos condiciones, dice:—

"Sólo se produce tómbolo cuando la distancia entre el obstáculo y la tierra no es excesiva:

1. En relación a las dimensiones del obstáculo (el alejamiento máximo parece deber ser del orden de la longitud del obstáculo paralelamente a la Costa).
2. En relación a las dimensiones de la ola (el alejamiento máximo parece deber ser del orden de algunas longitudes de onda como máximo)".

A la vista de la primera afirmación, si estudiamos las curvas de erosión para el ataque de un temporal paralelo a la Costa, podemos inferir lo siguiente:

Según el segundo postulado, para que el tómbolo subsista de una manera estable no deben cortarse entre sí las curvas de erosión de ambos lados, que vienen definidas por las espirales equiangulares, tangentes a la línea de costa rectilínea indeformable, paralela al obstáculo y con polo en ambos extremos del obstáculo,

pues de lo contrario un temporal frontal vaciaría ambos lados del tómbolo hasta cortarlo.

El caso límite en que desaparecería el tómbolo sería cuando ambas curvas fueran tangentes entre sí. Pero en este caso, la longitud del obstáculo paralela a la costa sería "b", siendo $b/2$ la distancia del polo a la tangente perpendicular a la costa (ver fig. 3).

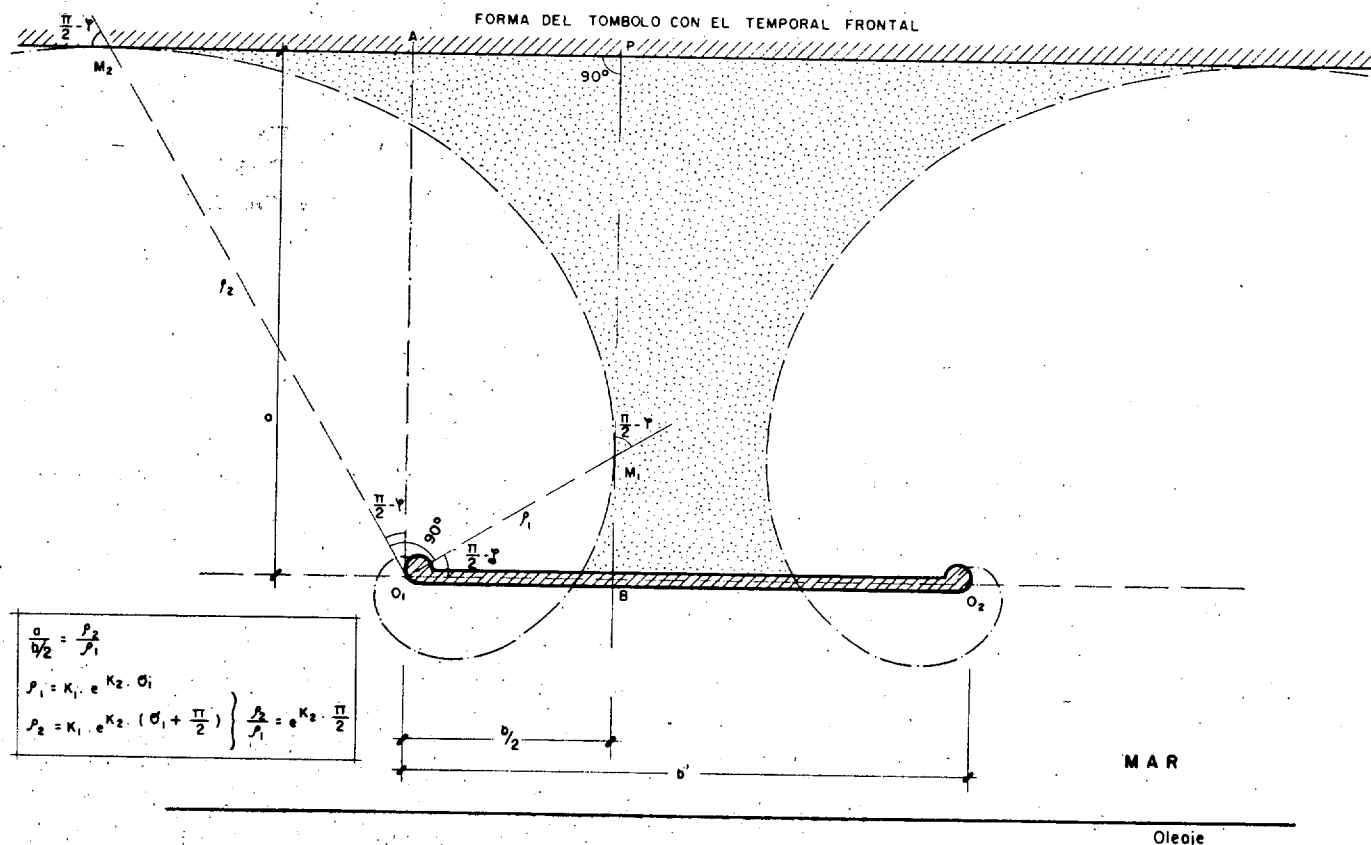


Figura 3.

Para que se verifique la condición 1.^a mencionada por Larras, tiene que existir una relación constante entre el alejamiento "a" y la longitud "b" y ser del orden de la unidad. Es decir, que las distancias del polo a las dos tangentes, a la espiral trazadas desde un punto deben guardar una relación constante, pues ni siquiera podemos aceptar una relación "poco variable en un tramo de curva" puesto que ya hemos dicho que la curva se aplica siempre por simple giro y que éste equivale a un cambio de escala.

Observando la figura 3 comprobamos que si la relación entre "a" y "b" debe ser constante.

$$\frac{a}{b/2} = \frac{r_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \rho\right)}{r_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{r_2}{r_1}$$

es decir, que la relación entre dos radios vectores perpendiculares entre sí debe ser constante.

Veamos la ecuación de la espiral equiangular o logarítmica en coordenadas polares que viene dada por

$$\rho = K_1 \cdot K_2^\theta \left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \rightarrow \rho = K_1 \text{ (} K_1 \text{ depende sólo de la situación de la espiral, no de su ángulo característico que denominamos)} \\ K_2 = \text{constante dependiente del ángulo (} K_2 = e^{\text{tg } \varphi} \text{)} \end{array} \right.$$

por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 = K_1 \cdot K_2^0 \cdot 1 \\ \rho_2 = K_1 \cdot K_2^0 \cdot 2 = K_1 \cdot K_2^0 \cdot 1^{+\frac{\pi}{2}} = K_1 \cdot K_2^0 \cdot 1 \cdot K_2^{\frac{\pi}{2}} \end{array} \right\}$$

por tanto:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = (K_2)^{\frac{\pi}{2}} \text{ (constante dependiente del ángulo } \varphi \text{ característico de la espiral). } (e^{\text{tg } \varphi})^{\frac{\pi}{2}}$$

Para el caso de la espiral de $\varphi = 30^\circ$ resulta

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 2,48 \text{ y por tanto } \frac{a_2}{b/2} = 2,48$$

y, finalmente, $a = 1,24 \cdot b$.

El resultado es, por tanto, totalmente conforme con la 1.^a condición.

He aquí pues, una propiedad de la espiral equiangular o logarítmica puesta en evidencia en razón del segundo postulado y de la proporción necesaria para la estabilidad del tómbolo, observada experimentalmente.

Con respecto a la relación entre longitud del obstáculo paralelamente a la costa y su alejamiento es preciso indicar que el valor numérico hallado representa una condición para que el tómbolo se mantenga, pero no para que se forme. Realmente no pretendo corregir la estimación dada por J. Larras puesto que partimos de una simplificación del fenómeno y, además, la longitud del obstáculo debe ser algo mayor para presumir la formación.

A título orientativo se expone los valores de la relación entre "a" y "b" para ángulos φ de 35° , 31° , 30° , 25° , 20° y 15° .

φ	35°	31°	30°	25°	20°	15°
$\frac{a}{b}$	1,50	1,28	1,24	1,04	0,93	0,78

5.7. También podemos señalar que según los apuntes de estudios de Muros y

Taludes de D. José Entrecanales (pág. 181) los ángulos de rozamiento interno para distintos materiales sumergidos, son los siguientes:

MATERIAL SATURADO	Angulo de rozamiento interno ϕ
Grava suelta	30°
Arena suelta	31°
Fangos arenosos	25°
Fangos sin arenas	20° a 15°
Turbas y tierras pantanosas	20°

Ello indica que el ángulo que tiende a formar la orilla respecto del oleaje de origen, en caso de erosión, no sólo depende del rozamiento si no que es precisamente el ángulo de rozamiento interno. Esto es realmente lógico puesto que el origen de las acciones horizontales que actúan sobre las arenas es el polo, el mar es el elemento transmisor de energía y el oleaje es el transporte de las energías.

La similitud con el fenómeno del talud natural que la arena adopta ante la acción de la gravedad por efecto del rozamiento es grande, teniendo en cuenta varias diferencias fundamentales:

1.º La acción de la gravedad es centrípeta, en cambio, la acción del oleaje es centrífuga. Esto implica que, con respecto a la espiral que tendría su polo en el centro de la tierra en el caso de talud natural, la arena quede del lado contrario del que queda la de las playas en su proyección horizontal. El recorrido de la arena sobre al espiral es centrípeta en el primer caso y centrífuga en el segundo para el "vaciado".

2.º La acción del oleaje puede presentarse con polo situado a una distancia finita, en cambio la gravedad, a la escala del fenómeno del ángulo de talud natural que experimentamos normalmente, tiene siempre el polo prácticamente en el infinito. (Esto implica que en este caso no se da prácticamente la espiral logarítmica sino sólo la recta.)

3.º La acción de la gravedad es estática; no varía con el tiempo. En cambio, la acción de los oleajes varía a lo largo del tiempo. Pero ello no implica que en el primer caso actúe el rozamiento y en el segundo no, si no que su forma de actuar es muy diferente a pesar de la semejanza de los efectos.

4.º La acción de los oleajes, cuya proyección horizontal asimiló teóricamente a la de la gravedad en una sección por un plano vertical y normal al talud del ángulo natural, no es una acción aislada. En la realidad se superpone a la de la gravedad.

El rozamiento por gravedad constituye una causa estabilizante de las arenas, cuyos efectos debe vencer el oleaje en los casos de erosión.

La semejanza podría expresarse de la siguiente forma:

El talud natural es una superficie engendrada por una espiral logarítmica con polo en el centro de la tierra que se mantiene en planos verticales. La superficie de la playa sumergida correspondiente al límite de vaciado, erosión o regresión ante

un determinado oleaje está engendrada por una espiral logarítmica situada en planos horizontales. El ángulo de rozamiento característico de la arena es el mismo para ambos casos.

5.8. Análisis de las fotos aéreas de la playa de San Feliú de Guixols (Gerona).

Un verdadero caso de modelo natural lo constituyen los fenómenos producidos en la playa de San Feliú de Guixols a raíz de la construcción del puerto.

En el caso de esta playa, de la cual no tengo datos de su estado primitivo antes de la realización del puerto, pero que dado el contorno rocoso de la cala, sería del tipo de la que se ha dibujado de trazo ---- para la espiral de polo en O_2 a la que corresponde el tramo MN y de trazo -.-.-.- para la espiral de polo en O_1 a la que corresponde el tramo NP . Con mi "compás de playas" (es una rápida aproximación procurando que las dos áreas diferenciales $MBCC'QM$ y $QNPAC''Q$ sean equivalentes y las logarítmicas tangentes, después habría que hacer una comparación volumétrica) y que nos vale para enjuiciar el proceso que ha llevado la playa primitiva (sea exactamente la que yo he supuesto o no) a su estado actual, como consecuencia de la construcción del puerto (ver fig. 4-a).

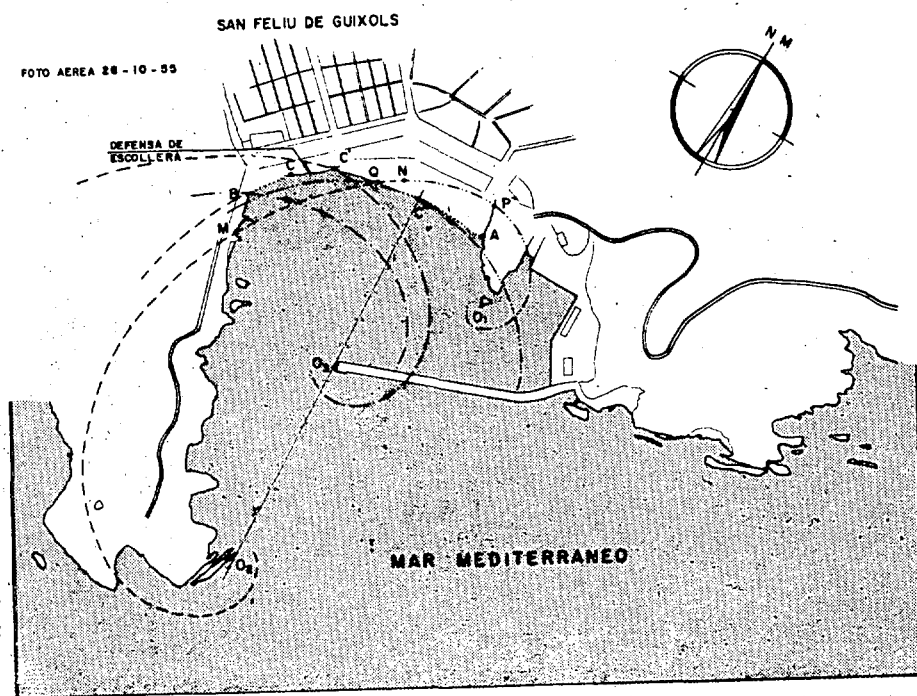


Figura 4, a.

Estudiamos ahora las acciones de los distintos temporales que han llevado a la playa a su nueva situación de equilibrio:

A los temporales de Levante les corresponden espirales del tipo -.-.-.-. con polo en O_3 extremo del morro del dique, para las curvas límite de vaciado por onda circular. Al ver la posición de estas curvas con respecto a ambos tramos de la orilla ya podemos afirmar que la situación de la playa de San Feliú de Guixols se aleja

mucho de la forma de equilibrio por "vaciado" del oleaje de expansión lateral al rebasar el morro del dique. A estos mismos temporales de Levante les corresponden círculos de centro en O_3 para las curvas límite de llenado (-----). Vemos pues, que la forma de la playa se aproxima mucho a estas curvas circulares.

A los temporales de poniente les siguen correspondiendo espirales ---- con polo O_2 para las curvas límite de vaciado y círculos del mismo centro para las curvas límite de llenado, para el tramo BC'' , siendo los efectos en el tramo $C''A$ los mismos que los producidos por los temporales de Levante con centro en O_3 .

Únicamente para temporales del Sur, ligeramente desviados a Levante tendremos acción por onda recta, únicamente alterada, en su forma, por la expansión frontal, en el tramo BC'' .

Esto nos dice que la playa en el tramo BC en el momento de la foto está sensiblemente en régimen de vaciado ya que se adapta más a la espiral O_2 que al círculo O_3 . Puede retroceder en su conjunto, pero su forma será sensiblemente la misma a menos que se introduzca una variación por aportes de arena o por la introducción de una obra artificial que altere el equilibrio. Esto concuerda, además, con el tipo real de desplazamiento de las arenas, que ha sido de transporte de Poniente a Levante.

En el tramo $C'A$ domina la "curva de llenado por la onda circular procedente de expansión lateral alrededor del polo O_2 y el polo O_3 ", con una ligera influencia de la "curva límite de llenado por onda recta" en el tramo $C'C''$ y totalmente pura en el tramo $C''A$ ya que en él no puede haber temporales de onda recta. Obsérvese el hecho singular de que en la foto se aprecia que la playa no ha llegado a adaptarse al círculo de centro en O_3 (-----) (al decir singular me refiero a la casualidad de haberse tomado la foto en estas circunstancias).

Para comprobar esta afirmación examinamos la foto aérea tomada en el año 1962 aproximadamente y vemos que la forma del tramo $C''A$ se adapta exactamente a la circunferencia (ver fig. 4-b).

Es decir, que la playa de San Feliú de Guixols, el 26 de octubre de 1955 se aproximaba ya a su forma de equilibrio, determinada por el nuevo polo de expansión constituido por el morro del dique. Y en el año 1962 había alcanzado exactamente la "curva límite de llenado por onda circular" en el tramo $C''A$.

Un análisis completo de todo el fenómeno excedería del marco de este estudio en el cual se ha tomado esta playa para aclarar los conceptos implícitos en la exposición de los postulados y que en otras palabras se repiten a continuación.

Cuando el oleaje circular produce el arrastre de la arena llenando, lo que hace es ir depositando arena y para esto el rozamiento de la arena no influye. Por otro lado, la onda se encuentra con fondos sensiblemente uniformes que no la deforman o producen una deformación despreciable. Por todo ello, para conformar la curva de llenado, la ola no debe vencer ninguna resistencia y dicha curva de llenado adopta la forma circular.

Por el contrario, para conformar la curva de vaciado o de erosión debe vencer el propio rozamiento de la arena. La resistencia del fondo a la deformación produce una deformación recíproca de la ola, que hace que la forma de las curvas de vacia-

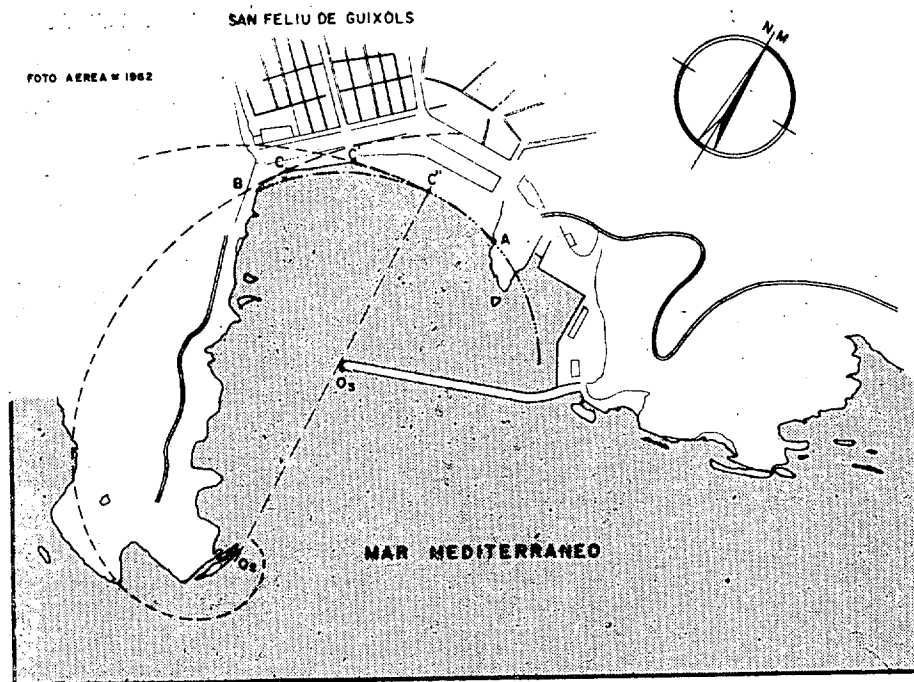


Figura 4, b.

do o de erosión tengan que presentar un determinado ángulo con la onda de origen, mínimo necesario para poder desplazar la arena venciendo su rozamiento en el seno del agua, dando lugar a la espiral equiangular o logarítmica en el caso de oleaje circular.

Podemos observar que la circunferencia es el caso límite de la espiral equiangular cuando el ángulo tiende a cero. En el límite (circunferencia) la espiral conserva el polo, pierde el carácter de invariabilidad con la escala, pero se hace independiente del radio. Es decir, el cambio de radio de la circunferencia equivale a un cambio de escala de la espiral o su giro alrededor del polo que, como se ha dicho, es lo mismo.

5.9. Otro caso ilustrativo lo constituye la foto aérea del Puerto de Barcelona tomada el 15 de agosto de 1953, con el que aclararemos conceptos y veremos la forma de interpretar el momento del proceso natural que nos revela una situación instantánea de una playa a la luz de la clasificación hecha para las distintas curvas límite de cada régimen (ver fig. 5).

Nos encontramos ante un caso de los polos O_1 y O_2 relativamente próximos que nos definen las distintas familias de curvas. Una defensa GB , una obra que a estos efectos actúa de contradique FED , y una determinada situación de la orilla BCA .

Para iniciar el estudio trazamos la línea $O_1 O_2 C$, definida por los dos polos de la obra. Con polo en O_1 trazamos la espiral que pasa por el punto donde se produce el contacto de la playa con la obra. Esta espiral cortará en C' a la línea $O_1 O_2$. Ahora con centro en O_2 dibujamos la espiral que pasa por C' y que, naturalmente, será tangente a la anterior en el punto C' .

Lo que nos dice esta espiral es que si por las razones que fuesen, todo el recinto se llenase de arena y con posterioridad se produjesen continuos temporales de distintas direcciones, con predominio de Levante, la playa que quedaría al final sería la definida por esta curva, siempre teniendo en cuenta que la espiral será la orilla siempre que los fondos permitiesen la estabilidad del talud con la espiral pasando por B.

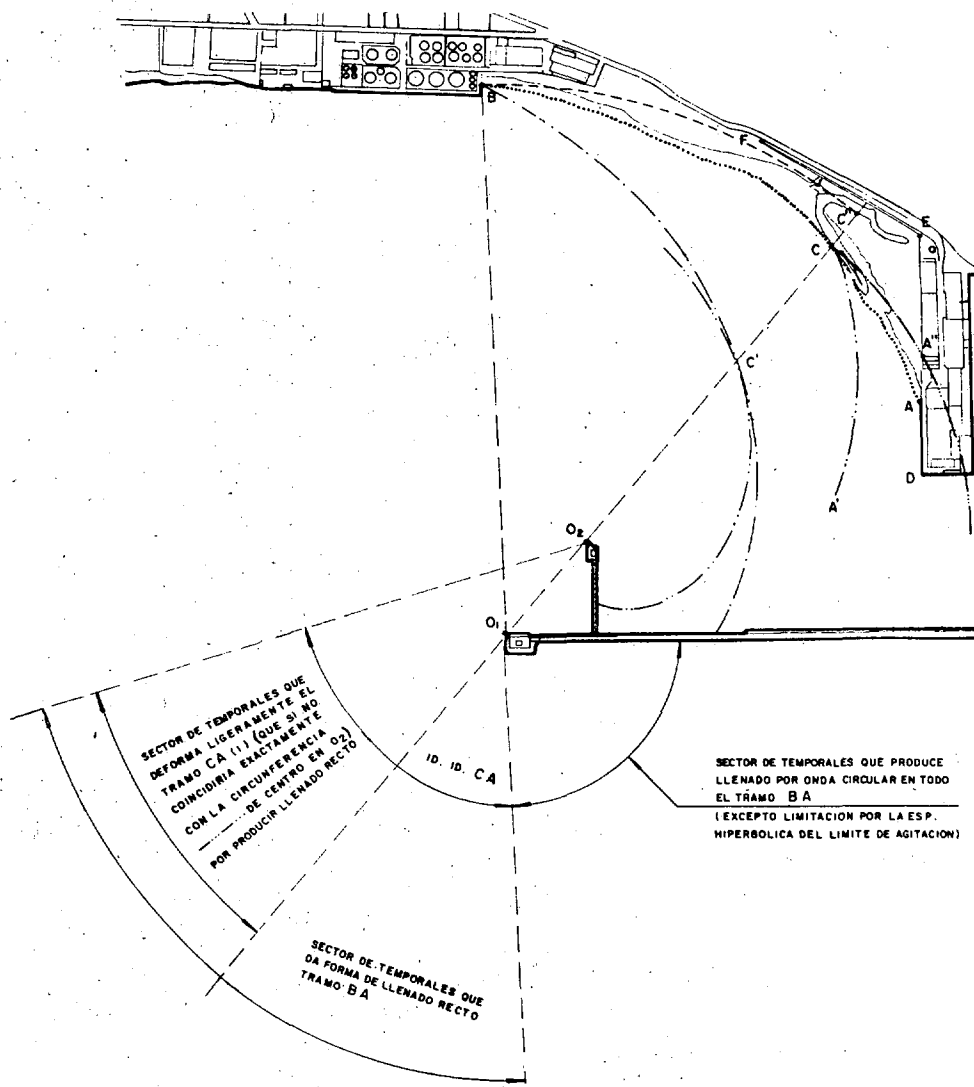


FOTO 15 - B - 53

(1) ESTA DE FORMACION SERA SIEMPRE LA FORMA INTERMEDIA ENTRE LA C. DE LL. Y LA C. DE V. (CIRCUNFERENCIA) (ESPIRAL)

GRAFICO DE LAS ACCIONES DE LOS TEMPORALES EN 15 - B - 53, (EL HECHO DE INDICAR "LLEVADO POR ONDA CIRCULAR" EN VEZ DE VACIADO SE DEBE A LA FORMA DE LA PLAYA EN AQUEL MOMENTO)

Figura 5.

Pero, en todo caso, la línea BC' , en proceso de vaciado o de erosión sería una isobata y la verdadera posición de la orilla sería una de las espirales de dos centros, en O_1 y O_2 .

Si partimos del supuesto de que el punto B es prácticamente fijo (no es una hipótesis descabellada, pues está más atrás que la defensa, con un retroceso de unos 20 metros que sumados al talud de la escollera darán probablemente un talud estable), podremos decir que si los temporales de componente de Poniente producen llenado, haciendo que la orilla avance por delante de la línea BC' , los temporales de signo contrario vaciarán lo llenado hasta la línea BC' , pero no más.

Es decir, que a la vista de la foto y simplemente con la superposición de la espiral podremos afirmar que ningún temporal puede sacar la arena existente en el momento de la toma de la foto. Estamos en proceso de llenado.

Si ahora dibujamos el arco de circunferencia BC'' con centro en el polo O_1 , que representaría la curva de llenado, observamos que la orilla BC está por delante y, por tanto, se ha rebasado ya la fase de llenado por onda circular procedente de expansión en el polo O_1 . La orilla tiene, como es lógico, una "forma" intermedia entre el círculo BC'' y la espiral BC' .

Si dibujamos el arco de la circunferencia CA'' con centro en el polo O_2 , que representaría la curva de llenado circular, observamos que la orilla CA está por delante y, por tanto, se ha rebasado también la fase de llenado por onda circular procedente de expansión alrededor del polo O_2 . La orilla tiene, como es lógico, una "forma" intermedia entre el círculo CA'' y la espiral CA' .

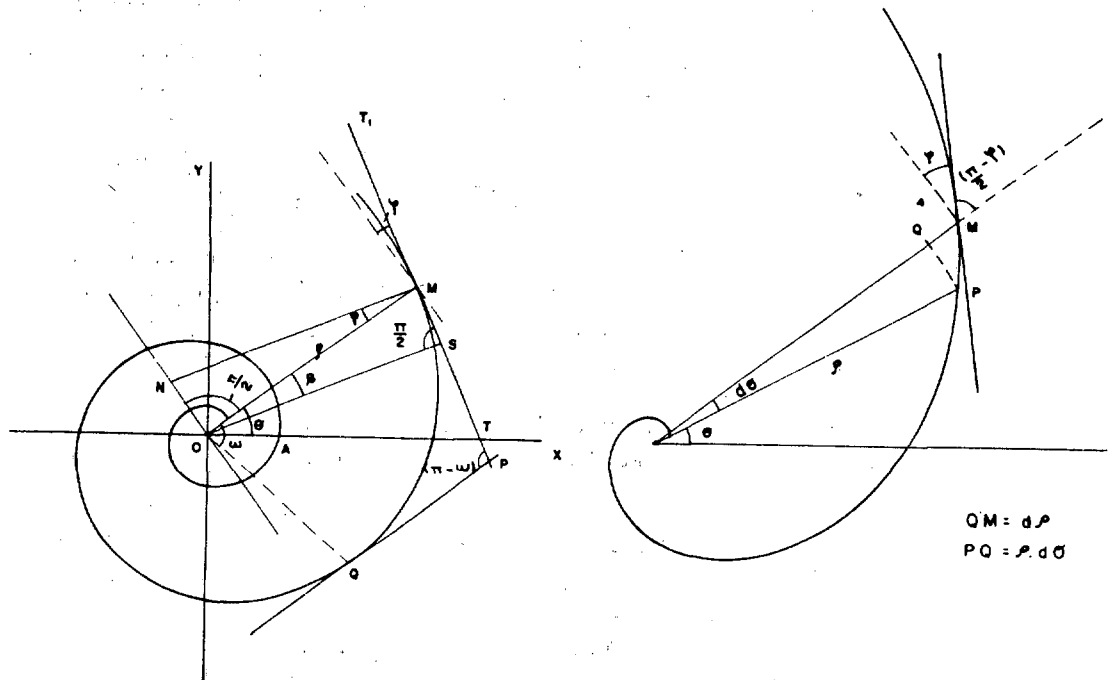
El paso siguiente para completar el estudio de movimiento de arenas sería hacer un análisis volumétrico, teniendo en cuenta las existencias de arena en los sectores de poniente y sus pendientes transversales. Pero aquí no tiene ya ningún interés puesto que la situación actual es totalmente distinta por las obras efectuadas en el Puerto de Barcelona desde el año 1953 y no se pretende con esta exposición ni siquiera analizar la influencia que en el pasado haya tenido el Puerto de Barcelona, sobre los fenómenos de regresión producidos en el delta del Llobregat, sino simplemente aclarar ideas y sugerir las enormes aplicaciones prácticas del "compás de curvas límite de vaciado, erosión o regresión" y de los postulados que encabezan este trabajo.

5.10. Vista la importancia de la espiral logarítmica o equiangular para el estudio de los movimientos de arena, es interesante analizar sus propiedades geométricas.

Según el profesor F. Gómez Teixeira en su "Tratado de las Curvas Especiales Notables", las primeras indicaciones referentes a la espiral logarítmica se encuentran en dos cartas escritas por Descartes a P. Mersénne en 1638, en las cuales el gran filósofo habla de la curva secante a todas las rectas situadas en su mismo plano y que parten de un cierto punto u origen formando con ellas un ángulo constante.

Jacobo Bernonilli es, probablemente, el matemático que más profusamente ha estudiado la espiral logarítmica o equiangular, cuyas propiedades tan sorprendentes despertaron su admiración hasta el punto de adoptarla como el prototipo de la constancia y el símbolo de la resurrección.

Esta espiral puede definirse como la curva engendrada por el extremo de un radio vector que crece geoméricamente, mientras el ángulo en el polo varía aritméticamente. Puede definirse así mismo como la curva que corta al radio vector según un ángulo constante y esta cualidad es la que la liga directamente con el proceso natural de los movimientos de arena, con las formas de equilibrio de las playas y con otros fenómenos físicos similares.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}=\frac{P Q}{Q M}=\frac{\rho d \theta}{d \rho}$$
$$\rho = K_1 \cdot e^{\theta} \operatorname{tg} \varphi$$


a) Un cambio de escala equivale a un giro.

- b) La relación entre los radios vectores que formen un ángulo constante ω , es también constante.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{e^{(\theta_1 + \omega) \cdot \operatorname{tg} \varphi}}{e^{\theta_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi}} = e^{\omega \cdot \operatorname{tg} \varphi} \quad \text{y si} \quad \omega = \frac{\pi}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi}$$

- c) La subnormal es:

$$s_n = \overline{ON} = \rho \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

- d) La subtangente es:

$$S_t = \frac{\rho}{\operatorname{tg} \varphi}$$

- e) La longitud de la normal es:

$$N = \overline{NM} = \rho \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\rho}{\cos \varphi} = N$$

- f) El radio de curvatura es:

$$R = \rho \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\rho}{\cos \varphi} = N$$

(El centro de curvatura está en el extremo de la subnormal).

- g) La evoluta (lugar geométrico del punto N) es otra espiral logarítmica igual (equivalente a un giro).
- h) La podaria (lugar geométrico del punto S) es otra espiral logarítmica igual (equivalente a un giro).
- i) las cáusticas por reflexión y por refracción (óptica) son otra espiral logarítmica igual.
- j) La inversa respecto al polo es otra espiral logarítmica igual.
- k) El área descrita por el radio vector cuando σ varía de σ_0 a σ_1 es:

$$A = \frac{1}{4 \cdot \operatorname{tg} \varphi} (\rho_1^2 - \rho_0^2)$$

- l) La longitud de un arco "s" de la curva comprendido entre los puntos (O_0, ρ_0) y (σ_1, ρ_1) es:

$$s = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + 1} \cdot d\rho = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \varphi} (\rho_1 - \rho_0) = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} (\rho_1 - \rho_0)$$

- m) La proyección estereográfica de la loxodromia esférica sobre el plano del ecuador es una espiral logarítmica (Halley).
- n) La curva descrita por el polo de una espiral logarítmica que rueda sin deslizarse sobre una espiral logarítmica igual es una espiral logarítmica igual a base y ruleta.

- ñ) La espiral logarítmica es polar recíproca de sí misma respecto de toda hipérbola equilátera que tenga su centro en el polo de la espiral y sea tangente a ésta (Klein-Lie).
- o) La curva descrita por el vértice de un ángulo constante cuyos lados sean tangentes a la espiral logarítmica, es otra espiral logarítmica igual a la primera.

Se deduce la propiedad que se ha estudiado en el punto 5.6, ya que si observamos la figura, veremos que el cuadrilátero $OM PQ$ tiene todos sus ángulos constantes:

$$\angle OMP = \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad \angle OQP = \frac{\pi}{2} + \varphi; \quad \angle MPQ = \pi - \omega; \quad \angle MOQ = \omega;$$

$$\frac{OM}{OQ} = e^{\omega \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \text{constante}$$

por lo que la curva descrita por el punto P es una homotética.

- p) La curva descrita por el polo de una espiral logarítmica que rueda sin deslizarse sobre una recta, es una recta que forma con la base un ángulo igual al ángulo intrínseco de la ruleta.

$ds' =$ variación del arco del lugar geométrico,

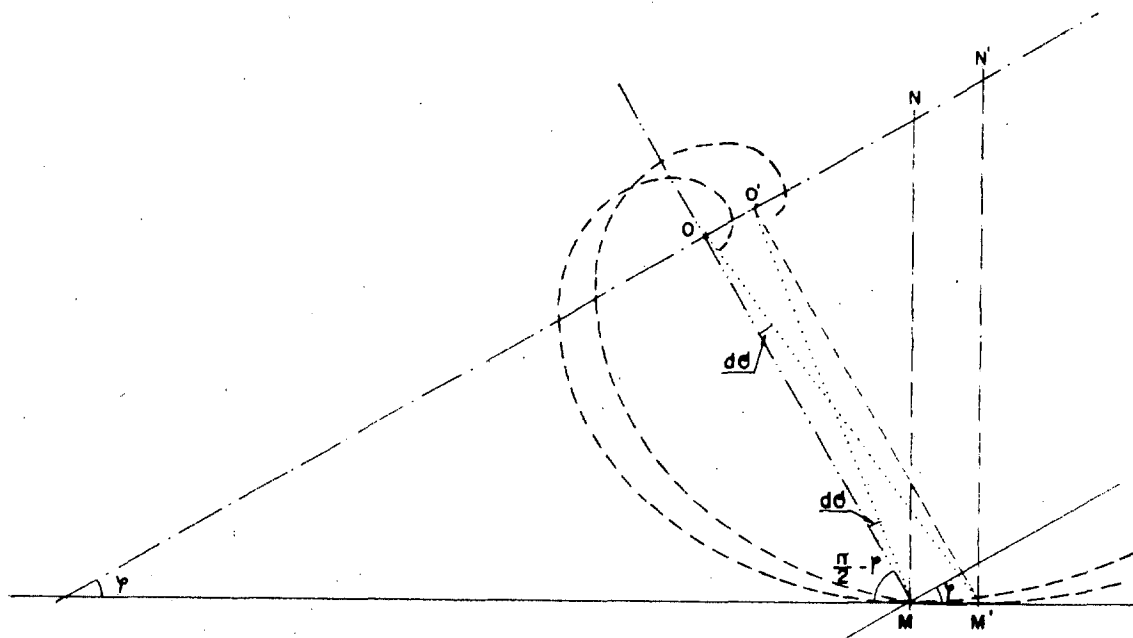
$ds =$ variación del arco de la base.

Observando las figuras tenemos para dos puntos próximos M y M' .

$oo' = MM' \cos \alpha$, pero

$oo' = ds'$,

luego: $ds' = ds \cos \alpha$.



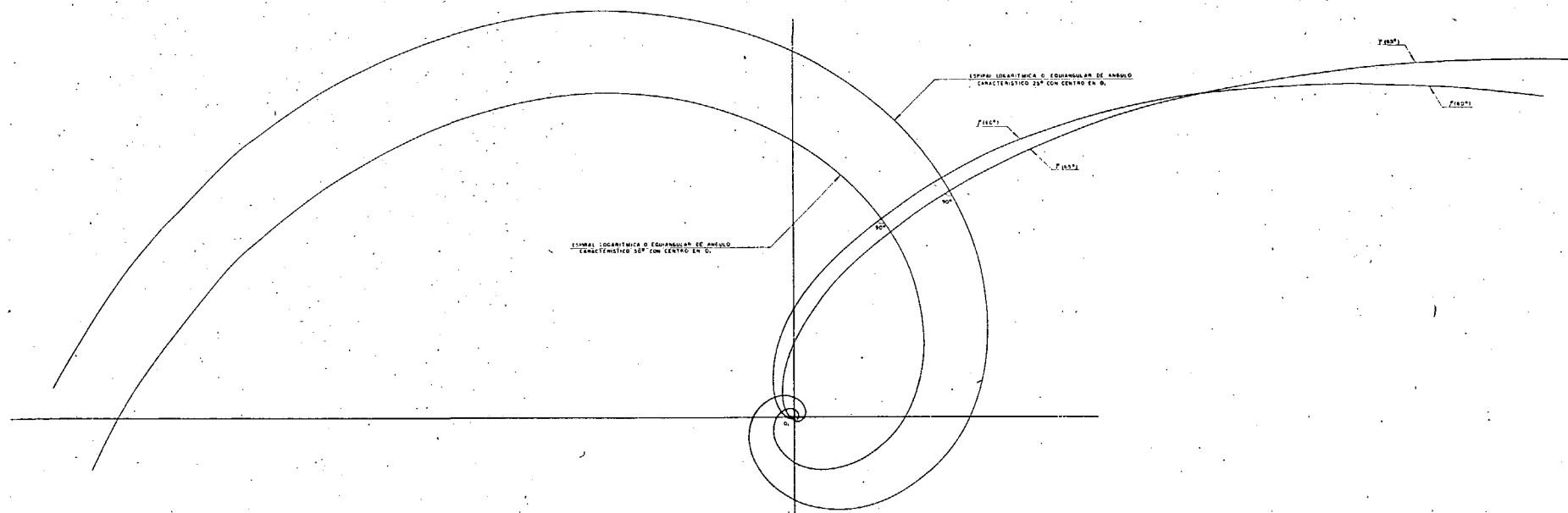


Figura 6.

- q) El lugar geométrico descrito por el polo de una espiral logarítmica tangente a una recta en un punto, es una recta que forma un ángulo $(90 - \varphi)$ con la base, (Este lugar geométrico que por su evidencia no hace falta explicar, nos interesa para el estudio de los movimientos de arena ya que, en primera aproximación, equivale a las distintas situaciones de los morros de una obra que producen efecto similar sobre un determinado punto M de una playa rectilínea que no deba su equilibrio a una alimentación continua de arena).

En la figura 6 se reproducen las espirales de ángulo característico $\varphi = 25^\circ$ y 30° , y sus complementarios que son los más interesantes para este trabajo debido a la reducida variación del ángulo interno de las arenas.

(Continuará)