

RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES EN EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (*)

Por ALFONSO RECUERO FORNIES
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Partiendo del concepto de partición de una estructura e introduciendo el de subestructura evolutiva, se presentan los métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales más usados en elementos finitos: el tridiagonal, la solución en banda y la solución frontal.

El primero, como caso general del método; los últimos, como casos particulares más eficaces; ambos por eliminar las variables una por una, y el frontal por buscar además una evolución del frente óptima.

En todo caso se ha tratado de mantener el sentido estructural de las manipulaciones matemáticas precisas.

INTRODUCCION

La parte más importante del tiempo de computador empleado en el análisis de una estructura, se invierte en la resolución del o de los sistemas de ecuaciones lineales que se plantean. Esto hace que el método usado en la resolución sea de enorme interés, sobre todo desde el punto de vista económico.

La evolución de los elementos finitos a elementos muy elaborados con nudos en las caras y en el interior, con gran número de grados de libertad, el tamaño y complicación de las estructuras analizadas, hacen que sea importante dar a cada caso el tratamiento adecuado.

Este trabajo presenta una breve descripción de los métodos directos más usados en cada circunstancia, tratando de dar en todo momento el significado estructural de los procesos aplicados.

Como se verá, se trata siempre de variaciones sobre un mismo tema, por lo que, desde un punto de vista matemático, las soluciones son de idénticas características, no obstante lo cual cada presentación tiene sus ventajas, como iremos viendo.

Partiendo del concepto de partición de una estructura en dos subestructuras, veremos el método que llamaremos de "subestructura evolutiva" y dos casos particulares muy importantes: la solución en banda y la solución frontal, siendo esta última la más característica del método de los elementos finitos por cuanto las otras se han venido usando en el análisis matricial de estructuras formadas por barras, mientras que esta modalidad ha nacido dentro del campo de los elementos finitos.

Para fijar ideas consideraremos el método de los desplazamientos. Partiendo de las matrices de rigidez de cada elemento y estableciendo las condiciones de continuidad y de equilibrio, llegamos a formar un sistema de ecuaciones lineales:

$$K \cdot X = F, \quad (1)$$

donde K , matriz de rigidez, es una matriz cuadrada, simétrica y en banda, esto es, a partir de una cierta línea paralela a la diagonal, todos los elementos son nulos.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de mayo de 1973.

Veremos inmediatamente el sentido físico de esta característica: X es el vector de las incógnitas que deseamos hallar, desplazamientos, y F son las fuerzas exteriores actuantes sobre los nudos.

PARTICION EN DOS SUBESTRUCTURAS

Supongamos la estructura de la figura 1, a, ensamble de nueve elementos, y consideremos la partida en dos subestructuras I y II, como se indica en la figura 1, b, separadas por un frente de nudos.

Llamaremos frente de nudos a un conjunto de nudos que separa la estructura en dos partes, de modo que si enclavamos dichos nudos, cualquier acción ejercida sobre una parte de la estructura no produce efecto alguno en la obra.

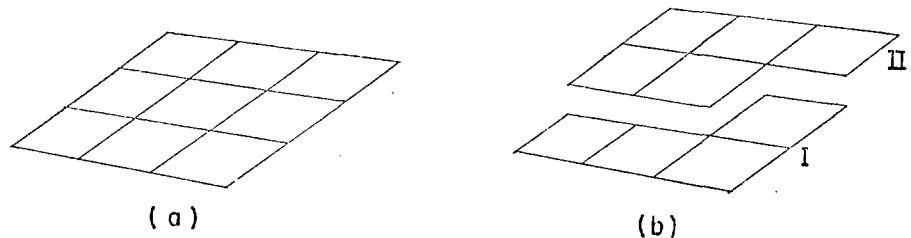


Figura 1.

Dicha partición se traduce en el sistema de ecuaciones (1) en una partición de las matrices como sigue:

$$\begin{pmatrix} K_{II} & K_{If} & \Omega \\ K_{fI} & K_{ff} & K_{fII} \\ \Omega & K_{II f} & K_{II II} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_I \\ X_f \\ X_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_I \\ F_f \\ F_{II} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

donde X_I , X_f y X_{II} y F_I , F_f y F_{II} son, respectivamente, los desplazamientos y las fuerzas interiores a la subestructura I, del frente e interiores a la subestructura II, como se representa en la figura 2.

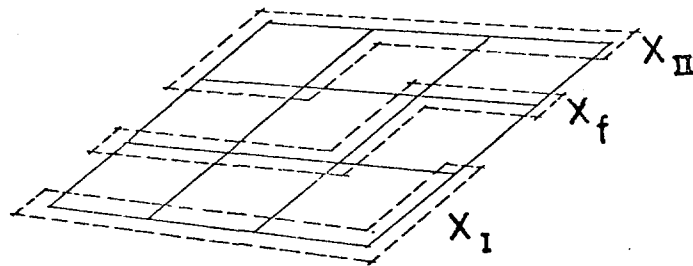


Figura 2.

En la formación de las submatrices K_{II} , K_{If} y K_{fI} intervienen solamente los elementos de la subestructura I; en la formación de las submatrices $K_{II II}$, K_{fII} y

$K_{II f}$, intervienen solamente los elementos de la subestructura II; en la formación de la submatriz K_{ff} intervienen los elementos de la subestructura I, con una colaboración K^I_{ff} , y los de la subestructura II, con una colaboración K^{II}_{ff} , de modo que:

$$K_{ff} = K^I_{ff} + K^{II}_{ff}, \quad (3)$$

y, análogamente, con F_I , F_{II} y F_f :

$$F_f = F^I_f + F^{II}_f. \quad (4)$$

La acción del frente como barrera a la interinfluencia entre las subestructuras I y II se pone de manifiesto por las matrices nulas Ω que aparecen en (2), y nos pone de manifiesto el significado físico de que K sea en banda.

El sistema de ecuaciones (2), con las consideraciones arriba mencionadas, podemos descomponerlo en dos:

$$\begin{pmatrix} K_{II} & K_{I f} \\ K_{f I} & K^I_{ff} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_I \\ X_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_I \\ F^I_f \end{Bmatrix} \quad (5)$$

y

$$\begin{pmatrix} K^{II}_{ff} & K_{f II} \\ K_{II f} & K_{II II} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_f \\ X_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{II}_f \\ F_{II} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

De (5) tenemos, eliminando X_I :

$$X_I = K^{-1}_{II} (F_I - K_{I f} X_f) \quad (7)$$

y

$$(K^I_{ff} - K_{f I} K^{-1}_{II} K_{I f}) X_f = F^I_f - K_{f I} K^{-1}_{II} F_I, \quad (8)$$

y del mismo modo de (6) tenemos, eliminando X_{II} :

$$X_{II} = K^{-1}_{II II} (F_{II} - K_{II f} X_f) \quad (9)$$

y

$$(K^{II}_{ff} - K_{f II} K^{-1}_{II II} K_{II f}) X_f = F^{II}_f - K_{f II} K^{-1}_{II II} F_{II}. \quad (10)$$

El establecimiento de la igualdad de los desplazamientos del frente en ambas subestructuras equivale a ensamblar dichas subestructuras como si fuesen dos macroelementos, dando lugar a la ecuación (11), suma de (8) y (10):

$$\begin{aligned} (K^I_{ff} + K^{II}_{ff} - K_{f I} K^{-1}_{II} K_{I f} - K_{f II} K^{-1}_{II II} K_{II f}) X_f = \\ = F^I_f + F^{II}_f - K_{f I} K^{-1}_{II} F_I - K_{f II} K^{-1}_{II II} F_{II}. \end{aligned} \quad (11)$$

Las expresiones (7) y (9) y la ecuación (11) podíamos haberlas deducido directamente de (2), pero de este modo se ha puesto más de manifiesto el sentido físico de las manipulaciones.

Por consiguiente, el proceso de cálculo en este caso sería el indicado en el organigrama de la figura 3, empezando en 1.

Pero si por cualquier circunstancia deseásemos modificar la subestructura II en el cálculo de la nueva estructura, podríamos entrar por 2 en el organigrama, con el consiguiente ahorro de tiempo.

Este método es especialmente adecuado para aquellos casos en que partimos la estructura para su análisis, como puede ocurrir en el estudio de un puente con una bifurcación, o deseamos estudiar la influencia de una ampliación de la estruc-

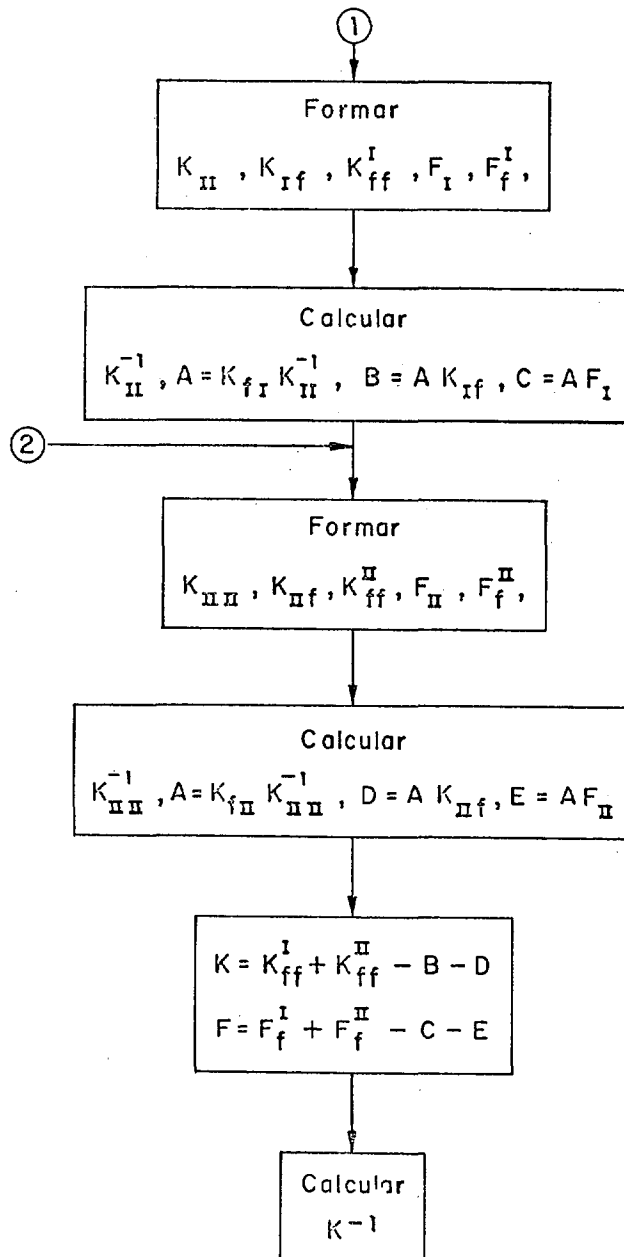


Figura 3.

tura, o en el estudio de una zona comprometida como pueda ser las proximidades de un apoyo, a la vista de los primeros resultados deseamos estudiar la zona con una malla más fina o cambiar las características mecánicas de la zona. También es especialmente indicado en el estudio de módulos o de macroelementos. Algunas de estas posibilidades se representan en la figura 3.

SUBESTRUCTURA EVOLUTIVA

Vamos a partir de la solución del apartado anterior, pero ahora vamos a considerar que la subestructura I empieza siendo una parte pequeña de la estructura y que va evolucionando sucesivamente hasta ser la estructura total. El frente que

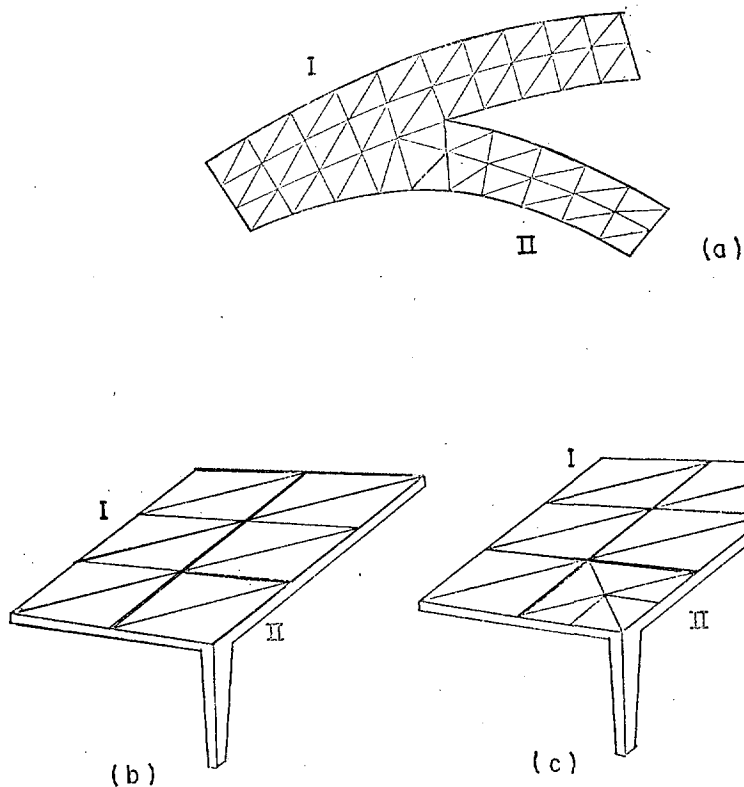


Figura 4.

separa las subestructuras I y II va, asimismo, paseándose por toda la estructura, quedando el frente antiguo total o parcialmente englobado en la nueva subestructura I.

Eliminando X_I en el sistema (2), podemos escribir:

$$X_I = K^{-1}_{II} F_I - K^{-1}_{II} K_{If} F_f \quad (12)$$

y

$$\begin{pmatrix} K^*_{ff} & K_{fII} \\ K_{II f} & K_{II II} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_f \\ X_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^*_f \\ F_{II} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

donde:

$$K^*_{ff} = K_{ff} - K_{fI} K^{-1}_{II} K_{If} \quad (14)$$

y

$$F^*_f = F_f - K_{fI} K^{-1}_{II} F_{II} \quad (15)$$

con lo que llegamos a una nueva estructura (sistema) en la que hemos eliminado los desplazamientos internos (variables) de la subestructura I, pudiendo repetir el proceso. En este proceso de subestructura evolutiva es determinante la forma de

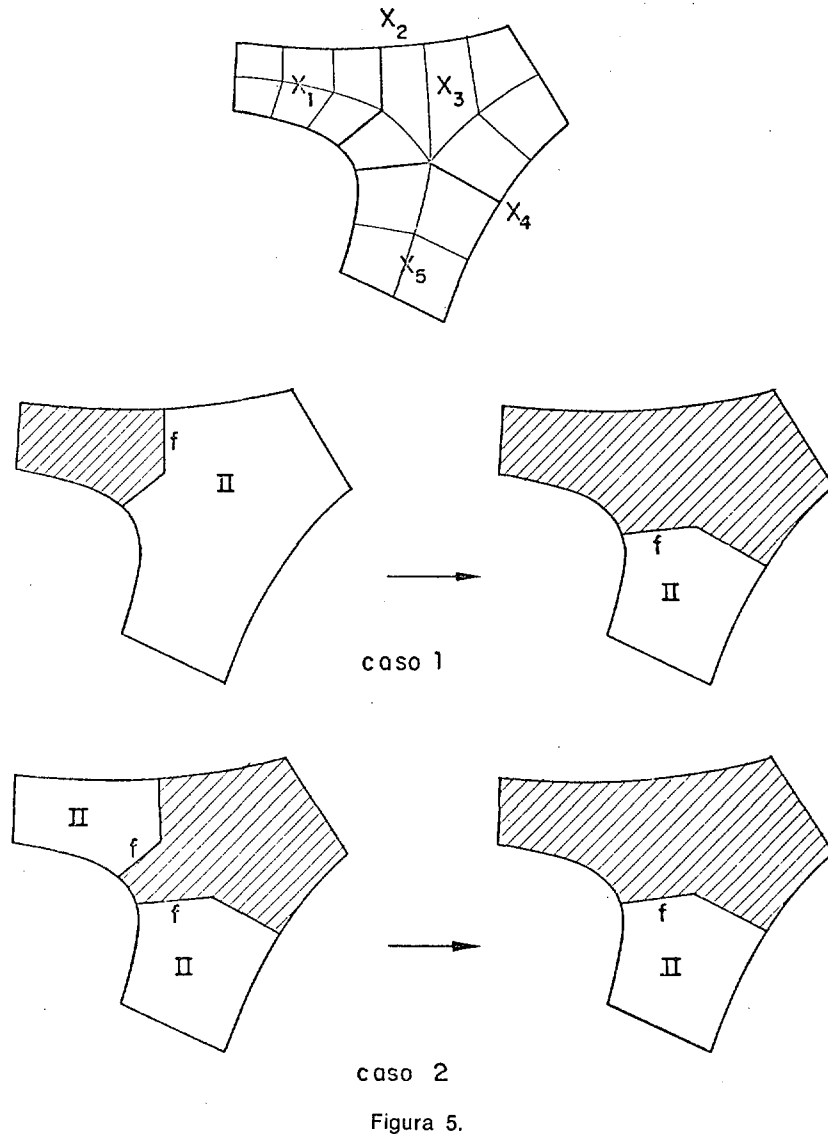


Figura 5.

evolución del frente, pues una elección correcta de dicha evolución representa una economía sustancial.

Por vía de ejemplo de aplicación del método, consideremos la estructura de la figura 5, en la que X_1, X_3 y X_5 son las variables internas de los trozos señalados y X_2 y X_4 las de las líneas de separación de dichos trozos. Llamando K_{ij} a la matriz de rigidez que relaciona a las variables X_i y X_j , tendremos:

1. En el primer paso haremos:

$$X_I = X_1; X_f = X_2; X_{II} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} \quad (91)$$

con lo que, partiendo de:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & & & \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & \\ & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \\ & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ & & & K_{54} & K_{55} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

pasamos a:

$$\begin{pmatrix} K_{22}^* & K_{23} & K_{24} & & \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} & & \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & \\ & & & K_{54} & K_{55} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^* \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

eligiendo ahora:

$$X_I = \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}; X_f = X_4; X_{II} = X_5 \quad (19)$$

pasaremos al nuevo sistema:

$$\begin{pmatrix} K_{44}^* & K_{45} \\ K_{54} & K_{55} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^* \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

que resolveremos.

2. Pero si hubiésemos elegido en un primer paso

$$X_I = X_3; X_f = \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{Bmatrix}; X_{II} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_5 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

pasaríamos del sistema:

$$\begin{pmatrix} K_{33} & K_{32} & K_{34} & & & \\ K_{23} & K_{22} & K_{24} & K_{21} & & \\ K_{43} & K_{42} & K_{44} & & K_{45} & \\ & K_{12} & & K_{11} & & \\ & & & & K_{54} & K_{55} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_1 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_1 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

al nuevo sistema:

$$\begin{pmatrix} K_{22}^* & K_{24}^* & K_{21} & & \\ K_{42}^* & K_{44}^* & & K_{45} & \\ K_{12} & & K_{11} & & \\ & K_{54} & & K_{55} & \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_4 \\ X_1 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^* \\ F_4^* \\ F_1 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

y tomando:

$$X_I = \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{Bmatrix}; X_f = X_4; X_{II} = X_5 \quad (24)$$

COLEGIO INGENIEROS DE CAMINOS
BIBLIOTECA

pasamos al nuevo sistema:

$$\begin{pmatrix} K_{44}^{**} & K_{45} \\ K_{54} & K_{55} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^{**} \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

En este segundo caso la elección hecha para la evolución de la subestructura ha supuesto una mayor cantidad de operaciones.

El método, así presentado, ha sido profusamente usado. También se le conoce como método tridiagonal. No obstante, su uso no es, en su forma general, un método económico, por lo que es preferible el uso de uno de los dos casos particulares que a continuación veremos.

La máxima eficiencia del método se da cuando eliminamos una sola variable en cada paso, y a esta condición responden tanto la solución en banda como la solución frontal.

SOLUCION EN BANDA

En este método las variables se van eliminando una por una de forma correlativa una vez se ha formado totalmente el sistema de ecuaciones. El número de variables del frente depende de la diferencia de numeración entre el nudo a que pertenece la variable en que estamos eliminando y los restantes nudos de los elementos que contienen a aquél. Es, por consiguiente, determinante de la eficacia del método el numerar los nudos de modo que estas diferencias sean lo menores posible. Si bien podemos utilizar en cada caso el tamaño estricto de las matrices a usar (banda variable), la técnica más habitual es tomar para todos los casos el máximo tamaño, dando así una banda de ancho único. Por consiguiente, es importante numerar los nudos para obtener la máxima diferencia entre dos nudos de un elemento lo más pequeña posible. Es de señalar que si llamamos n al número de nudos y d a la citada máxima diferencia, el tiempo de cálculo es proporcional a $d^2 \times n$.

En este caso la expresión (14) pasa a ser:

$$K_{ff}^* = K_{ff} - \frac{K_{fI} \cdot K_{If}}{K_{II}} \quad (26)$$

y (15):

$$F_f^* = F_f - \frac{1}{K_{II}} K_{fI} F_I \quad (27)$$

ecuaciones que constituyen la llamada triangulación de la matriz, mientras que la (12), que pasa a ser:

$$X_I = \frac{1}{K_{II}} (F_I - K_{If} F_f) \quad (28)$$

es la ecuación de la sustitución hacia atrás.

Expresando en función de los elementos de la matriz las expresiones anteriores, nos quedan, al eliminar la variable X_s :

$$K^*_{ij} = K_{ij} - \frac{K_{is} \cdot K_{js}}{K_{ss}}; \quad (29)$$

$$f^*_{i.} = f_i - \frac{K_{is}}{K_{ss}} f_s; \quad (30)$$

$$x_s = \frac{1}{K_{ss}} (f_s - K_{is} f_i); \quad (31)$$

haciendo uso de la simetría de los coeficientes, donde, si llamamos b al semiancho de banda y m al número de variables:

$$s < i \leq j < \min(s + b, m).$$

De un modo gráfico, podemos ver en la figura 6 la zona de coeficientes a que afecta la eliminación de una variable.

Este método es el más usado en el cálculo de estructuras. Presenta algunos inconvenientes que se agudizan en elementos finitos. Así, en algunas ocasiones, y con objeto de hacer mínimo el ancho de banda, se han de numerar los nudos

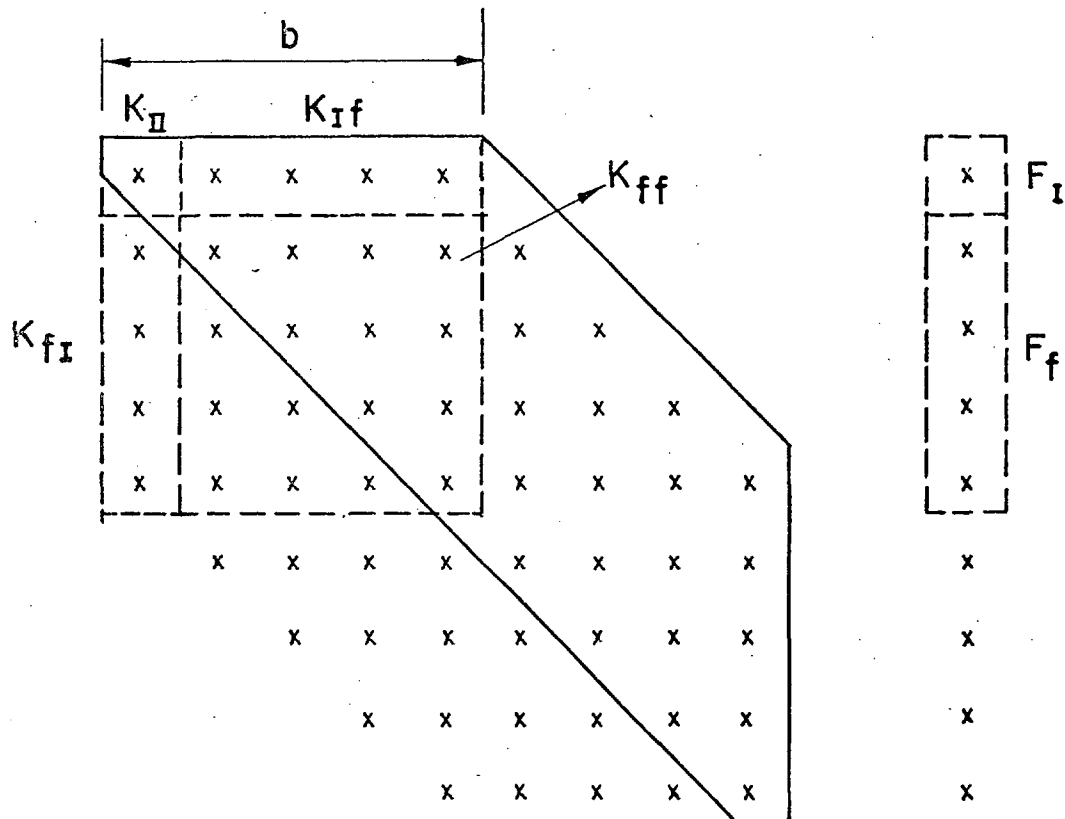


Figura 6.

de un modo poco natural y poniendo gran cuidado en ello. Así, en la figura 7 vemos que en un ejemplo muy sencillo pasamos de una mínima máxima diferencia de 6 en 7, a, a 3 en 7, b. Si deseamos modificar la malla en una zona, es posible que tengamos que reenumerar toda o casi toda la estructura con objeto de mantener un ancho de banda aceptable. Los elementos con nudos sobre los lados suelen presentar anchura de banda muy grande, sin solución posible, lo cual limita la finura de la malla a usar en el análisis debido a que el número de posiciones

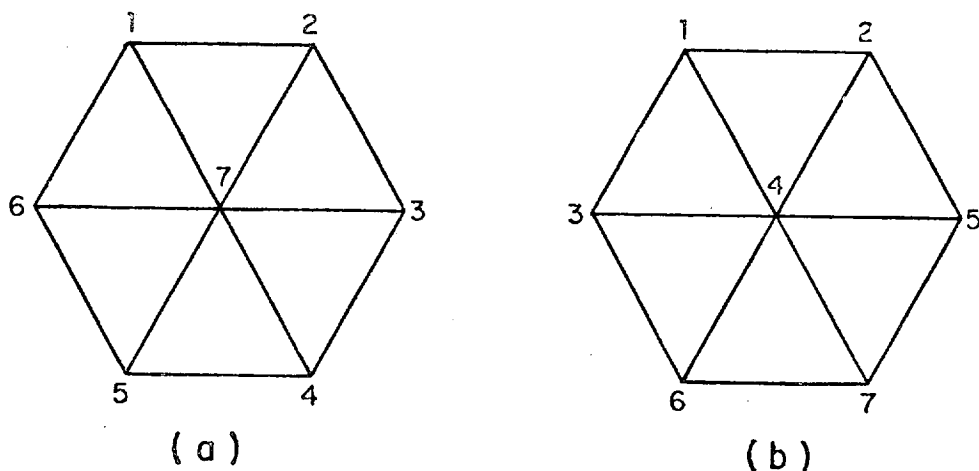


Figura 7.

de memoria central para almacenar coeficientes es $b(b + 2h + 1)/2$ ($h =$ número de hipótesis de carga), en los programas eficaces, teniendo en otro caso que hacer un número excesivo de transferencias de datos entre la unidad central y las memorias auxiliares, lo cual da lugar a programas poco eficaces.

En gran parte, estos problemas disminuyen con el método que presentamos a continuación.

SOLUCION FRONTAL

En el método expuesto anteriormente se separaba totalmente el proceso de formación de la matriz de rigidez de la resolución del sistema, no empezando ésta en tanto no hubiese acabado aquélla.

Sin embargo, en las expresiones:

$$K_{ij}^* = K_{ij} - \frac{K_{is} \cdot K_{js}}{K_{ss}} \quad (32)$$

y

$$f_i^* = f_i - \frac{K_{is}}{K_{ss}} f_s, \quad (33)$$

que nos dan los valores de los términos que se modifican en la matriz y en los términos independientes al eliminar la variable X_s , vemos que los sumandos que mo-

difican el término anterior provienen todos de la ecuación de X_s y que, una vez esté ésta totalmente formada, conocemos estos términos. En K^*_{ij} tendremos, pues, ciertos sumandos provenientes del ensamblaje de los elementos que contienen la variable a que corresponde y otros provenientes de la eliminación de ciertas otras

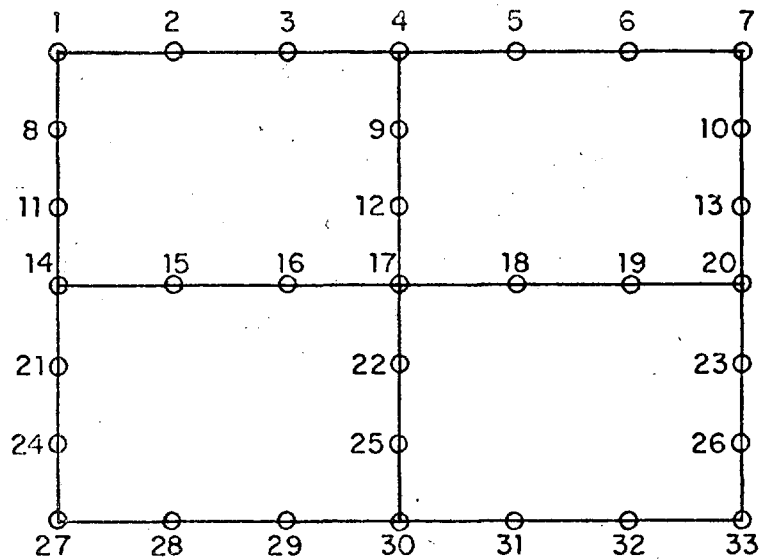


Figura 8.

variables, siendo indiferente el orden en que sumemos dichos términos, con tal de que cuando vayamos a eliminar X_i estén todos sumados.

Así, pues, en el presente método se propone ir eliminando las variables tan pronto como su ecuación está totalmente formada. Con esta técnica el orden de numeración de los nudos es irrelevante, mientras que es básico el dar los elementos ordenados de modo que el número de variables que en un momento dado hayan aparecido, y sus ecuaciones no estén totalmente formadas, sea lo menor posible.

En el método de los elementos finitos esta ordenación por elementos es más natural. Al no ser importante la numeración de los nudos, tenemos mayor flexibilidad y facilidad para modificar la malla o incluir nudos intermedios.

Con secuencias de nudos o elementos adecuadamente elegidos, los requerimientos de memoria central en elementos sin nudos intermedios son iguales en la

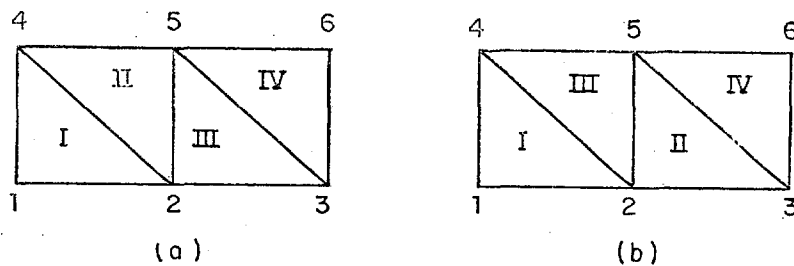


Figura 9.

solución frontal o en la solución en banda, pero si hay nudos intermedios los requerimientos de la solución frontal son menores.

Con objeto de que la solución frontal sea eficaz, es preciso hacer algunos preparativos previos a la solución que estimamos preferible describir sobre un ejemplo. Supongamos la estructura de la figura 9, a, de elementos (1, 2, 4), (2, 5, 4), (2, 3, 5) y (3, 6, 5).

Un primer problema es saber cuándo tenemos completas las ecuaciones correspondientes a un nudo dado. Para ello adoptaremos el convenio de afectar de signo menos al número del nudo en la última ocasión en que aparezca.

Así, la anterior secuencia de elementos pasaría a ser (—1, 2, 4), (2, 5, —4), (—2, 3, 5) y (—3, —6, —5), debiendo aparecer cada nudo una sola vez con signo menos.

Al ensamblar el elemento I las ecuaciones de las variables del nudo 1 están completas. Podemos, pues, eliminarlas. Al ensamblar el elemento II aparecen como nuevas las variables que corresponden al nudo 5 y se completan las del nudo 4. Como al eliminar las del nudo 1 hemos dejado un hueco nos conviene colocar en dicho hueco las primeras nuevas variables que aparezcan, las del 5 en este caso. Hecho esto podemos eliminar las del nudo 4. Podemos representar esquemáticamente el proceso como sigue:

Elemento ensamblado	Variables presentes	Variables que se eliminan	
I	1, 2, 4 —, 2, 4	1	
II	5, 2, 4 5, 2, —	4	(34)
III	5, 2, 3 5, —, 3	2	
IV	5, 6, 3	5, 6, 3	

Para el proceso de sustitución hacia atrás seguiríamos el orden inverso al de eliminación, dándonos esto opción a ir sacando los resultados por elementos en orden inverso al de ensamblaje.

Para indicar al ordenador la forma de ensamblar las matrices de rigidez y el orden de la eliminación definiremos dos vectores:

Uno de ellos nos indicará el orden en que son eliminadas las variables. Dicha secuencia es en la que van apareciendo los signos menos en la descripción de los elementos.

El segundo vector indica la posición que las variables de cada nudo ocupan en la porción de sistema que hay en la unidad central. Una manera de formarle es poniéndole inicialmente a cero, ir leyendo los elementos y asignarles número correlativo según el orden en que aparecen nuevos nudos. Cuando al ensamblar un elemento se eliminan variables, poner las posiciones de éstas en lista de espera y asignarlas al primer nudo que aparezca nuevo.

En el ejemplo propuesto el estado final de estos vectores, una vez leídos todos los elementos, sería:

$$(1, 4, 2, 5, 6, 3) \quad (35)$$

y

$$(1, 2, 3, 3, 1, 2). \quad (36)$$

Con el segundo vector sabemos que al ensamblar el elemento I ($-1, 2, 4$) debemos mandar las submatrices de la matriz de rigidez con arreglo a la correlación de subíndices (1, 2, 3) (1, 2, 3) y eliminar las variables del nudo 1, que están en la primera posición. Al ensamblar el elemento II ($2, 5, -4$) debemos ensamblar las submatrices con arreglo a la correlación de índices (1, 2, 3) (2, 1, 3) y eliminar las variables del nudo 4, que están en la tercera posición. Al ensamblar el elemento III ($-2, 3, 5$) debemos ensamblar las submatrices de acuerdo con la correlación de índices (1, 2, 3) (2, 3, 1) y eliminar las variables del nudo 2 que están en segunda posición, y así sucesivamente.

El primer vector nos indica el orden en que están almacenadas las ecuaciones en la memoria auxiliar para proceder a la sustitución hacia atrás, y el segundo vector las posiciones relativas en cada ecuación de las variables que intervienen en dicha ecuación, quedando así perfectamente definido el orden de las operaciones.

Como se ve, este proceso es más elaborado que el de la solución en banda. Como aquélla elimina las variables una por una, que da un óptimo en el método de subestructura evolutiva, pero además en este caso se busca una evolución óptima del frente.

Como ya indicamos, el método es especialmente adecuado para elementos con nudos intermedios en los lados. Así, en el ejemplo de la figura 8 los requerimientos de memoria central para almacenar coeficientes están en la relación $(19/15)^2$, siendo mayor esta relación cuanto mayor sea el número de elementos de la estructura.

La importancia de la correcta elección del orden de los elementos se pone de manifiesto en el ejemplo de la figura 9, b. En tal caso, la marcha esquemática del proceso, análoga a la indicada en (34), sería:

Elemento ensamblado	VARIABLES presentes	VARIABLES eliminadas
I	1, 2, 4 —, 2, 4	1
II	3, 2, 4, 5	2, 4
III	3, 2, 4, 5 3, —, —, 5	
IV	3, 6, —, 5	3, 6, 5

que vemos requiere mayor memoria interna y mayor número de operaciones.

CONCLUSIONES

Dado que la resolución del sistema de ecuaciones es la parte fundamental del tiempo de ordenador en el análisis matricial de estructuras, es básica la adecuada elección del método de resolución.

Se han dejado de lado de entrada los métodos iterativos por considerar más adecuados los métodos directos, en este tipo de problemas.

De los métodos presentados, el autor se inclina claramente por los dos últimos. La solución en banda para elementos sencillos es muy simple y prácticamente todo centro de cálculo tiene una buena subrutina de este tipo. La solución frontal es indispensable en elementos más elaborados y la puesta a punto de subrutinas eficaces de este tipo debe incluso desplazar a las soluciones en banda, por lo menos en el campo de los elementos finitos.

BIBLIOGRAFIA

- ARGYRIS, J. E.: "Energy theorems and structural Analysis Butterworth".
- IRONS, B. M.: "A frontal solution program for finite element analysis". Num. Meth. in Engineerings, 2-1 (1970).
- KAN, D. K.: "A simple front solution program for finite element techniques". CNME/CR/51 (1971) Swansea.
- RECUERO, A.: "Análisis de estructuras por el método de los elementos finitos: aplicación al caso de placas". Tesis doctoral en la E. T. S. de Ingenieros de Caminos, de Madrid (1972).
- WESTLAKE, J. R.: "A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations". Wiley (1968).