

UTILIDAD DEL ALGEBRA MODERNA EN EL CALCULO DE ESTRUCTURAS (*)

Por JOSE LUIS BLANCO VILLORIA
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

El presente artículo constituye la segunda parte del publicado bajo el mismo epígrafe en nuestro número anterior.

I. Elección de los vectores esfuerzo y deformación, y determinación de Φ y ρ .

En primer lugar fijemos los signos

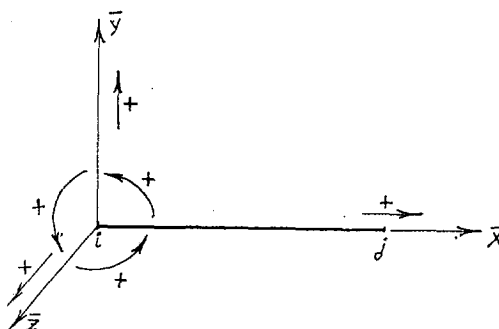


Figura 1.

En las figuras se indican los signos positivos de corrimientos y giros, que coinciden con los de fuerzas y pares (**).

Un esfuerzo (esfuerzo propiamente dicho o momento flector) es positivo cuando su fuerza frontal o par frontal es positivo. Vemos, pues, que hay que fijar en todas las barras cuáles son sus extremos dorsal y frontal.

En los sistemas planos vamos a tomar como componentes del vector esfuerzo, $N (= N_i = N_j$, pues la barra no está cargada interiormente), M_i y M_j de todas y cada una de las barras $\left(Q = Q_i = Q_j = -\frac{M_j - M_i}{l} \right)$. En los sistemas espaciales tomaremos $N (= N_i = N_j)$, τ (torsión), $M_{\bar{y}i}$, $M_{\bar{y}j}$, $M_{\bar{z}i}$, y $M_{\bar{z}j}$, es decir, seis por cada barra (como las barras no están cargadas $Q_{\bar{y}} = Q_{\bar{y}i} = Q_{\bar{y}j} = +\frac{M_{\bar{z}j} - M_{\bar{z}i}}{l}$

$$Q_{\bar{z}} = Q_{\bar{z}i} = Q_{\bar{z}j} = -\frac{M_{\bar{y}j} - M_{\bar{y}i}}{l}.$$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de diciembre de 1972.

(**) Estos signos son los más adecuados, pues coinciden con los que se adoptan en el Cálculo Vectorial. Las rayitas o barras colocadas encima de las variables significan "barra", es decir, que están referidas a los ejes particulares y principales de cada barra.

La energía de deformación de una barra de un sistema plano, viene dada por

$$U_{ij} = \frac{1}{2} [N \ M_i \ M_j] \begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ -\varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix} \quad [6.1]$$

siendo $\bar{u}_{ij} = \bar{u}_j - \bar{u}_i$:

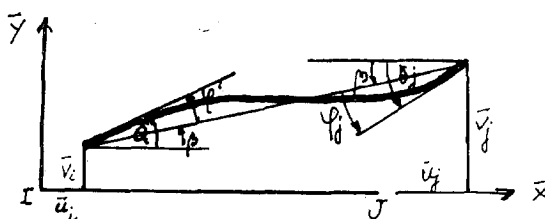


Figura 2.

y, análogamente para el espacio,

$$U_{ij} = \frac{1}{2} [N \ \tau \ M_{y_i} \ M_{y_j} \ M_{z_i} \ M_{z_j}] \begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ \varphi_{xij} \\ -\varphi_{y_i} \\ \varphi_{y_j} \\ -\varphi_{z_i} \\ \varphi_{z_j} \end{bmatrix} \quad [6.2]$$

siendo $\varphi_{xij} = \varphi_{x_j} - \varphi_{x_i}$

Luego los vectores esfuerzo y deformación elegidos son entre sí eficaces y completos.

La matriz de flexibilidad elemental (de elemento = barra ij) φ_{ij} es la de la transformación:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ -\varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ 0 & \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} \quad (\text{en los sistemas planos}) \quad [6.3]$$

en el supuesto que la barra ij es de sección constante y despreciando las deformaciones debidas a los esfuerzos cortantes.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ \bar{\varphi}_{xij} \\ -\bar{\varphi}_{yi} \\ \bar{\varphi}_{yj} \\ -\bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{G\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{3EI_y} & \frac{l}{6EI_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{6EI_y} & \frac{l}{3EI_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{3EI_z} & \frac{l}{6EI_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{6EI_z} & \frac{l}{3EI_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \tau \\ M_{yi} \\ M_{yj} \\ M_{zi} \\ M_{zj} \end{bmatrix} \quad (\text{en los sist. espaciales}) \quad [6.4]$$

(G es el módulo de elasticidad transversal y τ es la constante de torsión que depende de configuración de la sección).

La transformación inversa de esta última es:

$$\begin{bmatrix} N \\ \tau \\ M_{yi} \\ M_{yj} \\ M_{zi} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G\tau}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & \frac{-2EI_y}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2EI_y}{l} & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & \frac{-2EI_z}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2EI_z}{l} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ \bar{\varphi}_{xij} \\ -\bar{\varphi}_{yi} \\ \bar{\varphi}_{yj} \\ -\bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{bmatrix} \quad [6.5]$$

la matriz cuadrada es la ρ_{ij} , matriz de *rigidez elemental*.

Y, por último,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{12} & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_{ij} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_{12} & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_{ij} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad [6.6] \quad [6.7]$$

que son las matrices de *flexibilidades* o *rigideces ensambladas*.

El paso de los *desplazamientos de los extremos* de la barra ij a las deformaciones viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ \bar{\varphi}_{xij} \\ -\bar{\varphi}_{yi} \\ \bar{\varphi}_{yj} \\ -\bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} = \\
 = A \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad [6.8]$$

Para la elección de los vectores esfuerzo y deformación se exige, como ya se ha dicho, que sean entre sí eficaces y completos, es decir, tales que su producto escalar sea la energía de deformación, de esta forma también se pueden tomar los dos siguientes (*):

$$U_{ij} = \frac{1}{2} [N \bar{Q}_y \bar{Q}_z \tau \bar{M}_{yj} \bar{M}_{zj}] \begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ -l \bar{\varphi}_{zi} \\ +l \bar{\varphi}_{yi} \\ \bar{\varphi}_{xij} \\ \bar{\varphi}_{yij} \\ \bar{\varphi}_{zij} \end{bmatrix} \quad [7.1]$$

(*) Es fácil comprobar que tanto la [6.2] como la [7.1] dan la energía de deformación. Se hace en plana y después se generaliza, partiendo de:

$$U_{ij} = \frac{1}{2} [-N_i - Q_i - M_i \quad N_j \quad Q_j \quad M_j] \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix}$$

Ahora la matriz φ_{ij} de flexibilidad elemental es la de la transformación:

$$\begin{bmatrix} u_{ij} \\ -l\varphi_{zi} \\ +l\varphi_{yi} \\ \varphi_{xij} \\ \varphi_{yij} \\ \varphi_{zij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2EI_z} \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3EI_y} & 0 & \frac{-l^2}{2EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{G\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-l^2}{2EI_y} & 0 & \frac{l}{EI_y} & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2EI_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EI_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ \tau \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} \quad [7.2]$$

Y la transformación inversa nos da la nueva ρ_{ij} :

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ \tau \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G\tau}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-6GEI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ -l\varphi_{zi} \\ +l\varphi_{yi} \\ \varphi_{xij} \\ \varphi_{yij} \\ \varphi_{zij} \end{bmatrix} \quad [7.3]$$

Ahora el paso de los desplazamientos de los extremos de la barra ij a las deformaciones viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{ij} \\ -l\varphi_{zi} \\ +l\varphi_{yi} \\ \varphi_{xij} \\ \varphi_{yij} \\ \varphi_{zij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -l & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & l & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \\ \bar{\theta}_{zi} \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\theta}_{xj} \\ \bar{\theta}_{yj} \\ \bar{\theta}_{zj} \end{bmatrix} =$$

$$= -L \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \\ \bar{\theta}_{zi} \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\theta}_{xj} \\ \bar{\theta}_{yj} \\ \bar{\theta}_{zj} \end{bmatrix} \quad [7.4]$$

expresión que es más sencilla que la [6.8], pero como contrapartida corresponde a un vector esfuerzo menos homogéneo, por esta causa tal vez sea preferible utilizar el primer camino.

II. Determinación de la matriz de conexión C.

Ahora bien, los desplazamientos de los nudos vienen dados casi siempre referidos a los ejes generales. Llamamos a estos $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ (es decir, sin rayitas). El paso de estos a los anteriores (no al revés) viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \\ \bar{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad [8.1]$$

en donde:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix} \quad [8.2]$$

Cuando un nudo es rígido, es decir, si sus barras se unen entre sí rígidamente, los desplazamientos del nudo son los desplazamientos de los extremos de las barras. Pero otras veces, tal como en los nudos articulados, determinados desplazamientos del nudo no se transmiten al extremo de determinada barra. Cuando se presentan estos casos [8.1] ha de sustituirse por:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \\ \bar{\theta}_z \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} T & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad [8.3]$$

en donde Δ es una matriz diagonal que en determinada fila tiene 1 ó 0 según que corresponda a conexión o a libertad. O mejor, por:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \\ \bar{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_T & 0 \\ 0 & \epsilon^T_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad [8.4]$$

en donde:

$$\epsilon^T_T = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \cos(\bar{x}, x) & \epsilon_1 \cos(\bar{x}, y) & \epsilon_1 \cos(\bar{x}, z) \\ \epsilon_2 \cos(\bar{y}, x) & \epsilon_2 \cos(\bar{y}, y) & \epsilon_2 \cos(\bar{y}, z) \\ \epsilon_3 \cos(\bar{z}, x) & \epsilon_3 \cos(\bar{z}, y) & \epsilon_3 \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix} \quad [8.5]$$

siendo cada ϵ , 1 ó 0 según haya conexión o libertad.

En consecuencia, el paso de desplazamientos a deformaciones, viene dado por:

$$d_{ij} = [A \ B] \begin{bmatrix} \epsilon^T_{1j} & \epsilon'^T_{1j} & \epsilon''^T_{1j} & \epsilon'''^T_{1j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i \\ c_j \end{bmatrix} = [A \ B] \begin{bmatrix} \epsilon^T_{1j}^{(2)} c_i \\ \epsilon^T_{ij}^{(2)} c_j \end{bmatrix} = A \epsilon^T_{1j}^{(2)} c_i + B \epsilon^T_{ij}^{(2)} c_j \quad [8.6]$$

en donde 1_j , por ejemplo, quiere indicar "extremo 1 de la barra IJ ", y:

$$\epsilon^T_{1j}^{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon^T_{1j} \\ \epsilon'^T_{1j} \end{bmatrix} \quad \epsilon^T_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon''^T_{ij} \\ \epsilon'''^T_{ij} \end{bmatrix} \quad [8.7]$$

Si siguiésemos el segundo camino, las expresiones son enteramente análogas, se sustituiría A por $-L$, y B por I .

La matriz de conexión será:

$$C = \begin{bmatrix} \dots 0 \dots A \epsilon^T_{1j}^{(2)} \dots 0 \dots B \epsilon^T_{ij}^{(2)} \dots 0 \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \text{Nudo } I \quad \quad \quad \text{Nudo } J \end{bmatrix} \dots \text{ barra } IJ \quad [8.8]$$

$b \times (n + a)$

También se puede determinar la matriz transpuesta ${}^tC$ teniendo en cuenta que es la que relaciona los esfuerzos con las cargas $F = {}^tC f$. Se puede establecer si tomamos como componentes de f , por cada barra las 6 + 6 correspondientes a sus extremos $N_i Q_{i\bar{y}} Q_{i\bar{z}} M_{i\bar{z}} M_{i\bar{y}} \tau_i N_j Q_{j\bar{y}} Q_{j\bar{z}} M_{j\bar{z}} M_{j\bar{y}} \tau_j$, y después se contrae la matriz obtenida para dejar reducidas las componentes de f a las que intervienen en [6.2] o en [7.1].

GENERALIZACION DEL METODO

El hecho notable de que las magnitudes mecánicas que intervienen en una estructura están relacionadas mediante transformaciones lineales transpuestas siempre y cuando dichas magnitudes sean eficaces y completas, o sea, cuando $F \cdot c = f \cdot d$, nos permite abordar el cálculo de cualquier tipo de estructura, es decir, el procedimiento se puede aplicar también a los tipos de estructuras no reticulares, tales, por ejemplo, como las placas, láminas, membranas, macizos, arcos, bóvedas, presas-bóveda, etc.

La elasticidad nos proporciona determinadas relaciones entre las magnitudes mecánicas: cargas, tensiones, deformaciones unitarias y desplazamientos. El problema elástico que se plantea, en general, presenta un grado de hiperestatismo elevadísimo y su solución implica, muchas veces, dificultades que parecen insuperables. Considerando, por ejemplo, el caso de una presa-bóveda, se acude a procedimientos aproximados tal como el considerar la presa dividida en arcos horizontales y ménsulas verticales. El problema elástico queda totalmente desvirtuado. Pero claro está, el tratar de resolver el problema elástico integrando los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de las magnitudes mecánicas, que nos proporciona la Elasticidad, es imposible salvo en casos particularísimos y muy sencillos. Teóricamente al menos, los sistemas diferenciales pueden integrarse aproximadamente y con la aproximación deseada mediante diferencias finitas. Ahora bien, este procedimiento de resolución de ecuaciones y sistemas diferenciales, realizado al estilo clásico, en cuanto presenta cierta complejidad se hace inabordable incluso con el auxilio de las modernas computadoras por dificultad de programación. La resolución al estilo clásico de ecuaciones y sistemas diferenciales pierde de vista los conceptos mecánicos. Si las diferencias finitas las introducimos no *a posteriori* (caso anterior) sino *a priori*, los conceptos mecánicos no se pierden y puede aplicarse el procedimiento algebraico-matricial, siendo la solución "exacta" con el grado de aproximación deseado.

Explicaremos el procedimiento primeramente en plana:

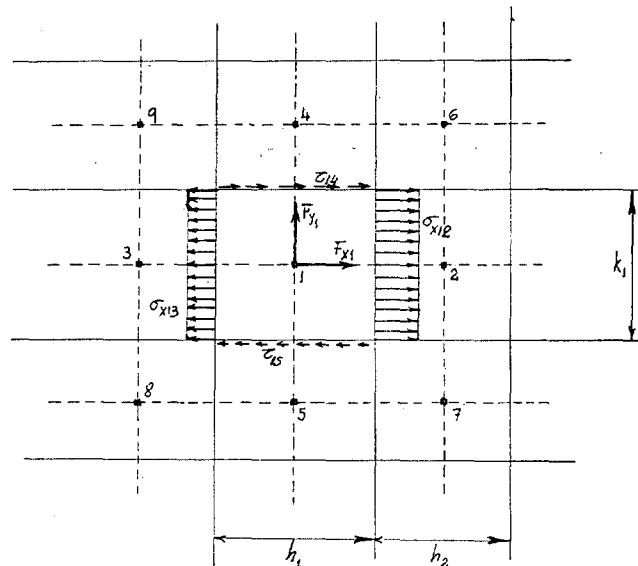


Figura 3.

El "macizo" se divide por un reticulado rectangular. Expresando el equilibrio del rectángulo 1:

$$\left. \begin{aligned} F_{x1} + (\sigma_{x12} - \sigma_{x13}) k_1 + (\tau_{14} - \tau_{15}) h_1 &= 0 \\ F_{y1} + (\tau_{12} - \tau_{13}) k_1 + (\sigma_{y14} - \sigma_{y15}) h_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [9.1]$$

en donde las σ y τ son las tensiones medias en los lados del rectángulo (*).

Considerando todos los rectángulos y reuniendo todas las cargas en un vector carga F y todas las tensiones multiplicadas por la h o k correspondiente en otro vector f , tendremos:

$$F_d = {}^t C f \quad [9.2]$$

donde ${}^t C$ es la transpuesta de la matriz de conexión del problema.

Las relaciones deformaciones unitarias - desplazamientos serán (**):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x12} &= \frac{u_2 - u_1}{\frac{h_1 + h_2}{2}} \\ \epsilon_{y14} &= \frac{v_4 - v_1}{\frac{k_1 + k_4}{2}} \\ \gamma_{16} = \gamma_{12} + \gamma_{14} &= \frac{v_2 - v_1}{\frac{h_1 + h_2}{2}} + \frac{u_4 - u_1}{\frac{k_1 + k_4}{2}} \end{aligned} \right\} \quad [9.3]$$

Y considerando igualmente todos los rectángulos tendremos:

$$d = C c \quad [9.4]$$

siendo c el vector desplazamiento y d el que incluye las deformaciones unitarias multiplicadas por la correspondiente $\frac{h_i + h_j}{2}$ o $\frac{k_i + k_j}{2}$ (téngase en cuenta que hay que considerar por separado γ_{12} y γ_{14} que se corresponden con τ_{12} y τ_{14}).

Se puede comprobar fácilmente que en efecto C y ${}^t C$ son transpuestas y como

(*) Efectivamente, este sistema es el de ecuaciones en diferencias previo (*a priori*) al sistema de equilibrio interno:

$$\frac{F_{x1}}{h_1 k_1} + \frac{\Delta \sigma_{x1}}{h_1} + \frac{\Delta \tau_1}{k_1} = 0 \quad \text{y pasando al límite} \quad X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

(**) Pasando al límite dan:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

además la [9.1] y la [9.3] convergen respectivamente hacia las clásicas ecuaciones en derivadas parciales de la Elasticidad, podemos asegurar que estamos en el camino correcto y óptimo de la solución aproximada del problema.

Las relaciones deformaciones unitarias - tensiones son:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x12} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{x12} + \nu \frac{\varepsilon_{y14} + \varepsilon_{y15} + \varepsilon_{y26} + \varepsilon_{y27}}{4} \right) \\ \sigma_{y14} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{y14} + \nu \frac{\varepsilon_{x12} + \varepsilon_{x13} + \varepsilon_{x46} + \varepsilon_{x49}}{4} \right) \\ \tau_{16} &= G \gamma_{16} \quad \text{o sea} \quad \tau_{12} = G \gamma_{12} \quad \tau_{14} = G \gamma_{14} \end{aligned} \right\} \quad [9.5]$$

que en el límite son las ecuaciones de Lamé. Con ellas tenemos:

$$f = P d \quad [9.6]$$

Para hacer intervenir las condiciones de contorno, conviene, a ser posible, aunque no es necesario, que sobre el contorno caigan puntos del retículo.

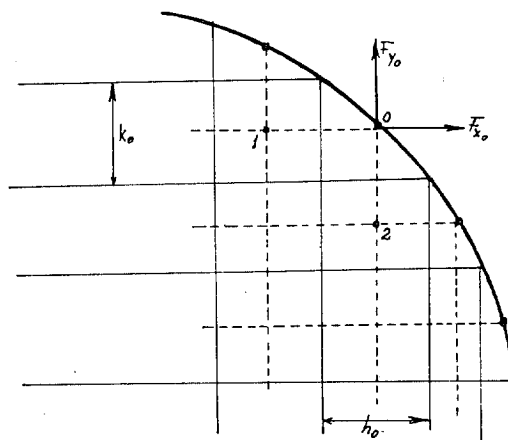


Figura 4.

Expresando el equilibrio del triángulo o

$$\left. \begin{aligned} F_{x_o} &= \sigma_{x01} k_o + \tau_{02} h_o \\ F_{y_o} &= \tau_{01} k_o + \sigma_{y02} h_o \end{aligned} \right\} \quad [9.7]$$

Estas relaciones (*) entran a formar parte de $F = {}^t C f$, y automáticamente se va estableciendo $d = C c$, por matrices transpuestas.

Si el contorno en lugar de ser libre, es coartado, F_i será la correspondiente reacción incógnita, pero su desplazamiento lo conocemos, por ejemplo, es nulo (tén-

(*) Que equivalen, evidentemente, a las clásicas ecuaciones de equilibrio en el contorno:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x l + \tau m \\ \bar{Y} &= \tau l + \sigma_y m \end{aligned} \right\}$$

gase en cuenta que no hay por qué despreciar las fuerzas de masa que deben incluirse en los primeros miembros junto a F_{x0} y F_{y0}).

Componiendo las transformaciones se tiene:

$$F = ({}^t C P C) c = R c \quad [9.8]$$

la matriz R es singular y por consiguiente no puede invertirse, entonces la particionaremos:

$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{c} \\ c_x \end{bmatrix} \quad [9.9]$$

siendo:

$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ X \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \underline{c} \\ c_x \end{bmatrix} = c$$

en donde F es el vector carga propiamente dicho y, por tanto, tiene sus componentes independientes, lo que hace que R_{11} sea regular.

Si por ejemplo $c_x = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{F} &= R_{11} \underline{c} & \underline{c} &= R_{11}^{-1} \underline{F} \\ X &= R_{21} \underline{c} \end{aligned} \quad [9.10]$$

y el problema queda resuelto.

La solución es "exacta", pues aunque sea con una determinada aproximación, si se subdividen los intervalos, la sucesión de valores es, por la forma física de estar planteado el procedimiento, convergente.

Si sobre el contorno no cayesen siempre vértices del reticulado, también puede seguirse el mismo proceso, únicamente las expresiones [9.7] serían algo más complejas.

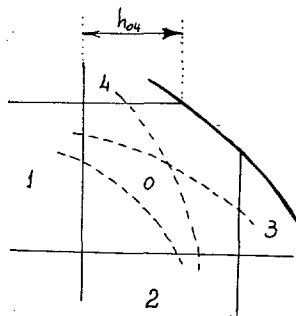


Figura 5.

$$\begin{aligned} F_{x0} + P_{x0} &= \sigma_{x01} k_{01} - \sigma_{x03} k_{03} + \tau_{02} h_{02} - \tau_{04} h_{04} \\ F_{y0} + P_{y0} &= \sigma_{y02} h_{02} - \sigma_{y04} h_{04} + \tau_{01} k_{01} - \tau_{03} h_{03} \end{aligned} \quad (\tau_{01} = \tau_{02}) \quad [9.11]$$

Ahora se han puesto patente las fuerzas de masa que en [9.7] considerábamos incluidas en F_{x_0} y F_{y_0} .

También pueden utilizarse coordenadas curvilíneas ortogonales:

Expresando el equilibrio de un elemento limitado por dos pares de curvas coordenadas:

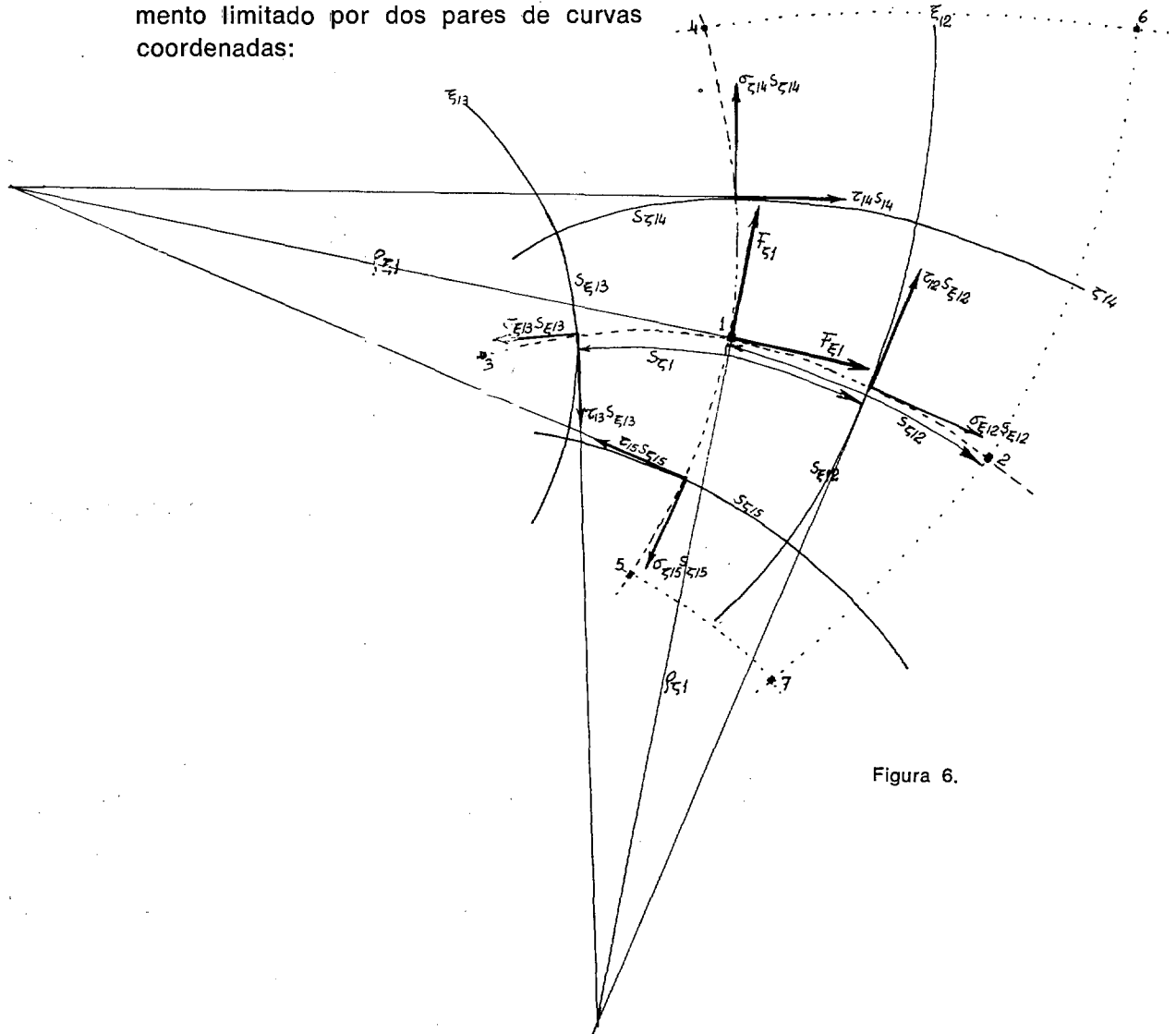


Figura 6.

$$\left. \begin{aligned} F_{\xi 1} + \sigma_{\xi 12} S_{\xi 12} - \sigma_{\xi 13} S_{\xi 13} - \sigma_{\xi 14} S_{\xi 14} \frac{S_{\xi 1}}{2 \rho_{\xi 1}} - \sigma_{\xi 15} S_{\xi 15} \frac{S_{\xi 1}}{2 \rho_{\xi 1}} + \\ + \tau_{\xi 14} S_{\xi 14} - \tau_{\xi 15} S_{\xi 15} + \tau_{\xi 12} S_{\xi 12} \frac{S_{\xi 1}}{2 \rho_{\xi 1}} + \tau_{\xi 13} S_{\xi 13} \frac{S_{\xi 1}}{2 \rho_{\xi 1}} = 0 \\ F_{\eta 1} + \sigma_{\eta 14} S_{\eta 14} - \sigma_{\eta 15} S_{\eta 15} - \sigma_{\eta 12} S_{\eta 12} \frac{S_{\eta 1}}{2 \rho_{\eta 1}} - \sigma_{\eta 13} S_{\eta 13} \frac{S_{\eta 1}}{2 \rho_{\eta 1}} + \\ + \tau_{\eta 12} S_{\eta 12} - \tau_{\eta 13} S_{\eta 13} + \tau_{\eta 14} S_{\eta 14} \frac{S_{\eta 1}}{2 \rho_{\eta 1}} + \tau_{\eta 15} S_{\eta 15} \frac{S_{\eta 1}}{2 \rho_{\eta 1}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad [9.12]$$

que son las ecuaciones de equilibrio interno (*) (en donde, por ejemplo, $S_{\xi 12} = \frac{S_{\xi 1} + S_{\xi 2}}{2}$).

Reuniendo todas las F_{ξ} y F_{ξ} en un vector, tenemos el vector carga F , y de manera análoga el vector esfuerzo cuyas componentes son las tensiones multiplicadas por su correspondiente s . De esta forma tenemos:

$$F = {}^t C f \quad [9.13]$$

en donde ${}^t C$ es la transpuesta de la matriz de conexión del problema.

Automáticamente, sin más, queda establecida:

$$d = C c \quad [9.14]$$

es decir, no precisamos establecer las ecuaciones de relación de las deformaciones — desplazamientos y tales que d sea eficaz y completo con f (F y c lo son indudablemente). Es más, estas relaciones deformaciones-desplazamientos pueden establecerse *a posteriori*, o sea, después de tener [9.14] y resultan:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\xi 12} &= \frac{u_2 - u_1}{S_{\xi 12}} + \frac{V_1 \frac{S_{\xi 1}}{2 \rho_{\xi 1}} + V_2 \frac{S_{\xi 2}}{2 \rho_{\xi 2}}}{S_{\xi 12}} \\ \epsilon_{\xi 14} &= \frac{V_3 - V_1}{S_{\xi 14}} + \frac{u_1 \frac{S_{\xi 1}}{2 \rho_{\xi 1}} + u_4 \frac{S_{\xi 4}}{2 \rho_{\xi 2}}}{S_{\xi 14}} \\ \gamma_{16} = \gamma_{12} + \gamma_{14} &= \frac{V_2 - V_1}{S_{\xi 12}} - \frac{u_1 \frac{S_{\xi 1}}{2 \rho_{\xi 1}} + u_2 \frac{S_{\xi 2}}{2 \rho_{\xi 1}}}{S_{\xi 12}} + \frac{u_4 - u_1}{S_{\xi 14}} - \frac{V_1 \frac{S_{\xi 1}}{2 \rho_{\xi 1}} + V_4 \frac{S_{\xi 4}}{2 \rho_{\xi 4}}}{S_{\xi 14}} \end{aligned} \right\} \quad [9.15]$$

en donde se consideran por separado γ_{12} y γ_{14} . Cada una de las deformaciones unitarias multiplicada por su correspondiente s , es una componente del vector d .

Si pasamos al límite obtenemos las conocidas expresiones que suministra la

(*) Pasando al límite:

$$\left. \begin{aligned} x_{\xi} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + \frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\xi}}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{d\xi} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + 2 \frac{\tau}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} &= 0 \\ y_{\xi} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\xi}}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{d\xi} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + 2 \frac{\sigma}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

En donde x_{ξ} , y_{ξ} es la carga por unidad de área, y $\lambda = \frac{dS_{\xi}}{d\xi} = \frac{d\xi}{dS_{\xi}}$ (dS_{ξ} , por ejemplo, es el elemento diferencial de arco de la curva coordenada ξ , es decir, ξ es la constante). Expresiones que son conocidas en la Elasticidad.

Elasticidad (*). Por todos estos detalles de eficacia, complitud y convergencia se comprueba que el proceso es correcto y el óptimo de integración aproximada de los sistemas en derivadas parciales.

Las relaciones deformaciones unitarias - tensiones son:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi 12} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{\xi 12} + \nu \frac{\varepsilon_{\xi 14} + \varepsilon_{\xi 15} + \varepsilon_{\xi 26} + \varepsilon_{\xi 27}}{4} \right) \\ \sigma_{\xi 14} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{\xi 14} + \nu \frac{\varepsilon_{\xi 12} + \varepsilon_{\xi 13} + \varepsilon_{\xi 46} + \varepsilon_{\xi 49}}{4} \right) \\ \tau_{16} &= G \gamma_{16} \quad \text{o sea} \quad \tau_{12} = G \gamma_{12} \quad \tau_{14} = G \gamma_{14} \end{aligned} \right\} \quad [9.16]$$

Vienen a ser las mismas [9.5].

Y con ellas tenemos:

$$f = P d \quad [9.17]$$

Las coordenadas curvilíneas tienen interés cuando los contornos pertenecen a los haces de curvas coordenadas, pues entonces las condiciones de contorno se introducen más fácilmente.

Componiendo las transformaciones llegamos a la del tipo [9.8] y el resto de la solución es el mismo que en el caso anterior.

Si las curvas coordenadas son las isostáticas las expresiones anteriores se simplifican extraordinariamente, pues entonces todas las tensiones tangenciales son nulas.

Si pasamos al espacio no es posible establecer un reticulado recto - rectangular con vértices en la superficie. El reticulado recto - rectangular dividirá la superficie en triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos curvilíneos. En cada una de estas áreas se considerará su correspondiente resultante de la carga (o reacción) de superficie (**).

Las coordenadas curvilíneas que ahora estarán definidas por un sistema triple ortogonal de superficies, tienen interés cuando los contornos estén incluidos en las familias de superficies coordenadas.

Con esto ponemos punto final a este artículo, pero esta labor de investigación no queda detenida aquí. Basta observar que siendo el proceso convergente y exacto se puede pretender efectuar el paso al límite en donde jugarán papeles capitales los espacios vectoriales de dimensión infinita y las matrices infinitas.

(*) Pasando al límite:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \frac{\partial u}{\partial S_{\xi}} + \frac{V}{\rho_{\xi}} \\ \varepsilon_{\xi} &= \frac{\partial V}{\partial S_{\xi}} + \frac{u}{\rho_{\xi}} \\ \gamma &= \frac{\partial V}{\partial S_{\xi}} - \frac{u}{\rho_{\xi}} + \frac{\partial u}{\partial S_{\xi}} - \frac{V}{\rho_{\xi}} \end{aligned} \right\}$$

(**) Podría pensarse que la convergencia aquí quedaría amenazada por la proposición de Schwarz sobre las áreas de superficies curvas. No hay nada de esto siempre que la superficie no presente en el interior de las áreas mencionadas puntos singulares.