

DETERMINACION DE LOS EFECTOS DINAMICOS EN UNA ESTRUCTURA DE CUBIERTA(*)

Por AVELINO SAMARTIN QUIROGA

JESUS MARTINEZ GONZALEZ

Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas.

Se expone en este artículo un ejemplo de aplicación del cálculo dinámico a una estructura de cubierta de un estadio. Se comparan entre sí los resultados obtenidos bajo la acción del viento, actuando en ráfagas de período variable. Se concluye expresando la conveniencia de emprender estudios más refinados sobre el modo de variación de las acciones dinámicas con el tiempo, aspecto del cálculo no desarrollado en forma precisa en la mayoría de las normas actuales.

1. INTRODUCCION

La incesante construcción de estructuras cada vez más esbeltas hacían necesaria la consideración de su comportamiento ante acciones dinámicas (cargas móviles, sismos, vientos, etc.). Este proceso ha traído consigo la necesidad de incluir entre los conocimientos comunes de un ingeniero de estructuras los relacionados con el cálculo dinámico, que hace apenas unas décadas eran de dominio exclusivo de especialistas. Conciencia de este hecho representan la aparición en nuestro país de tratados relativos al tema (1) y la reglamentación sísmica de consideración obligatoria en todos los proyectos (2).

2. ESTUDIO DINAMICO

2.1. Descripción de la estructura e hipótesis de carga.

La estructura representada en la figura 1 corresponde a la cubierta de la tribuna sur del estadio de fútbol del Club Celtic de Glasgow (Escocia).

Para su cálculo, se idealizó esta estructura, según el esquema de la figura 2, correspondiente a la sección central.

Se ha considerado la actuación de las cargas dinámicas (viento) que se indican en la figura 3, y corresponden a diferentes hipótesis de duración de la ráfaga ($T=5$, 10 y 15 segundos) con intensidad unitaria, actuando sobre cada semisección de la cubierta (casos a y b).

Según la norma British Standard Code of Practice CP3-Chap. V. Part. 2 (1970), la intensidad p del viento a considerar en el proyecto depende del intervalo de duración de la ráfaga. Para estructuras con alguna dimensión mayor de 50 m, ráfagas menores de quince segundos, actuando sobre toda la estructura, son poco probables.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de noviembre de 1972.

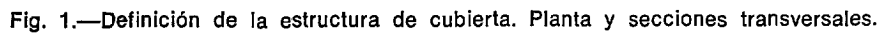


Fig. 1.—Definición de la estructura de cubierta. Planta y secciones transversales.

A pesar de los estudios (3 y 4), entre otros, realizados en los últimos años sobre las leyes de actuación de las cargas dinámicas, todavía, la dificultad principal en este tipo de cálculos permanece en el escaso conocimiento de estas acciones, siendo necesario, en general, un cálculo no-determinista de las estructuras.

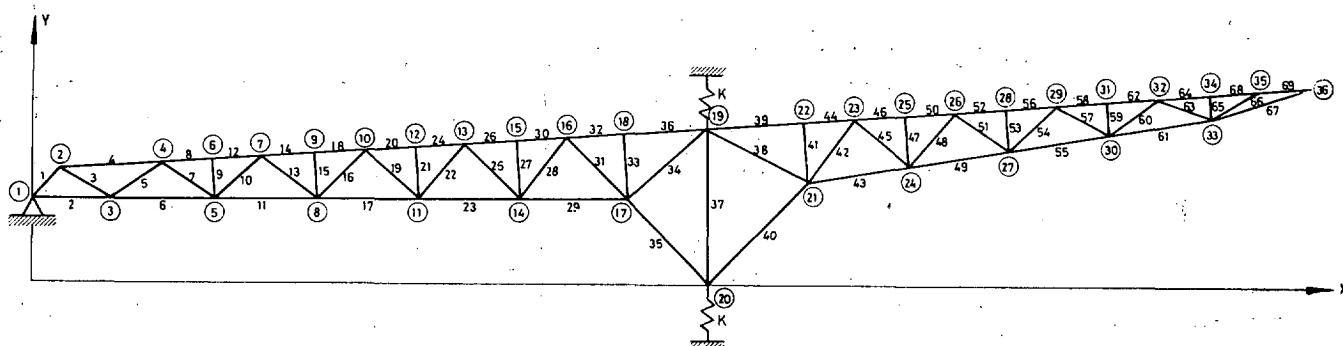


Fig. 2.—Esquema estructural adoptado.

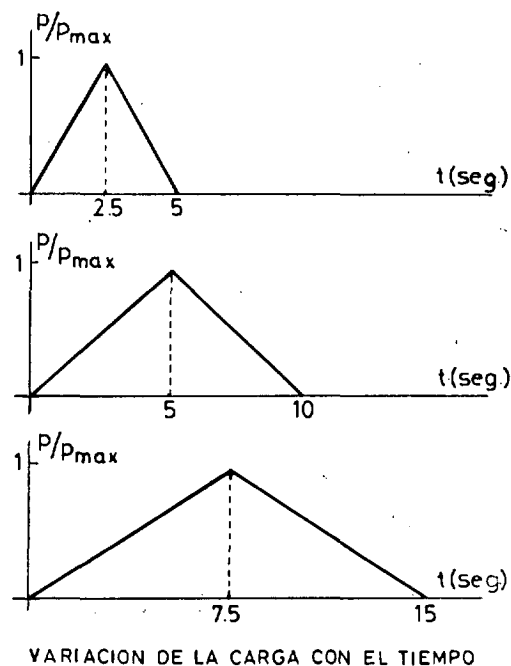
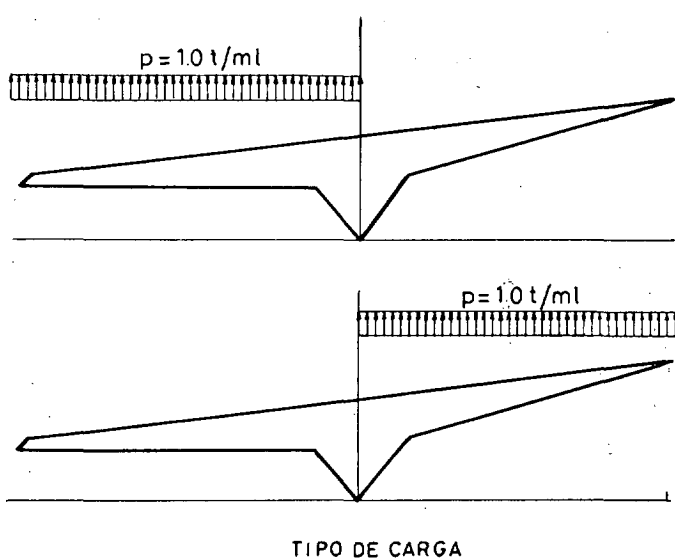


Fig. 3.—Casos de cargas estudiados.

2.2. Resultado.

El análisis dinámico de una estructura, como la indicada en la figura 2, exige por su volumen de operaciones la utilización de un ordenador electrónico, por lo que se ha redactado un programa en Fortran IV para la resolución de este tipo de problemas. El tiempo de proceso en un ordenador IBM-1130 de 32 K para las hipótesis de carga descritas en 2.1 fue de tres horas y media.

La teoría utilizada se resume en el siguiente apartado de este artículo, y corresponde a análisis lineal dinámico de estructuras compuestas de piezas rectas. Los resultados obtenidos se indican a continuación:

a) *Vibraciones libres.*

Se han calculado todas frecuencias propias y modos de vibración correspondientes. Se considera a la estructura como un sistema de un número finito de grados de libertad ($n=2 \times 36=72$), y se representan solamente los casos de máxima y mínima frecuencias (figs. 4 y 5).

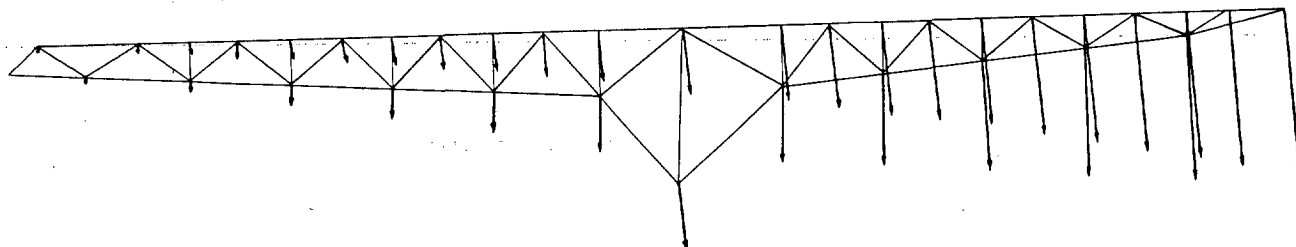


Fig. 4.—Frecuencia mínima ($w = 11,8 \text{ seg}^{-1}$), modo correspondiente.

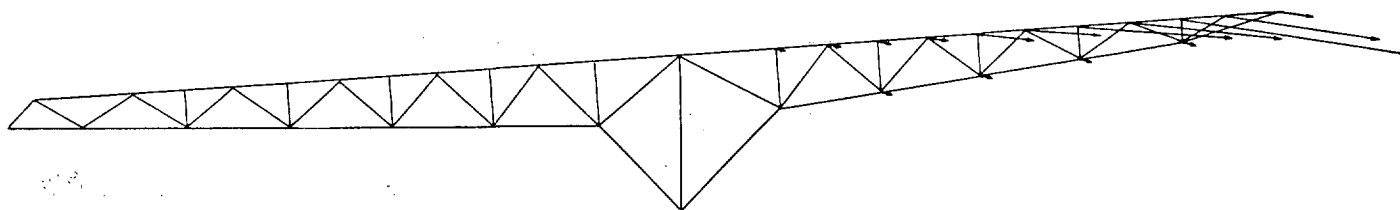


Fig. 5.—Frecuencia máxima ($w = 53,30 \text{ seg}^{-1}$), modo correspondiente.

b) *Vibraciones forzadas.*

Para cada hipótesis de actuación de la carga se determinaron las leyes de variación con el tiempo de los desplazamientos en todos los nudos y los esfuerzos en todas las barras de la estructura.

Como ejemplo ilustrativo del estudio realizado se presentan los resultados para las diferentes hipótesis de carga en los dos siguientes casos (figs. 6 a 11):

1. Esfuerzos en la barra 32, que une los nudos 18 y 19.
2. Desplazamiento vertical del nudo 36.

Los coeficientes de mayoración dinámica o relación del valor dinámico máximo

y el valor estático se determinan para la hipótesis más desfavorable en los dos casos:

$$\text{Flecha en el nudo 36 (hipótesis 1 a)} \quad w = \frac{0,275}{0,230} = 1,196$$

$$\text{Flecha en el nudo 36 (hipótesis 1 b)} \quad w = \frac{1,550}{1,505} = 1,030$$

$$\text{Esfuerzo en la barra 32 (hipótesis 1 a)} \quad k_n = \frac{12,03}{9,84} = 1,223$$

$$\text{Esfuerzo en la barra 32 (hipótesis 1 b)} \quad k_n = \frac{79,15}{77,10} = 1,027$$

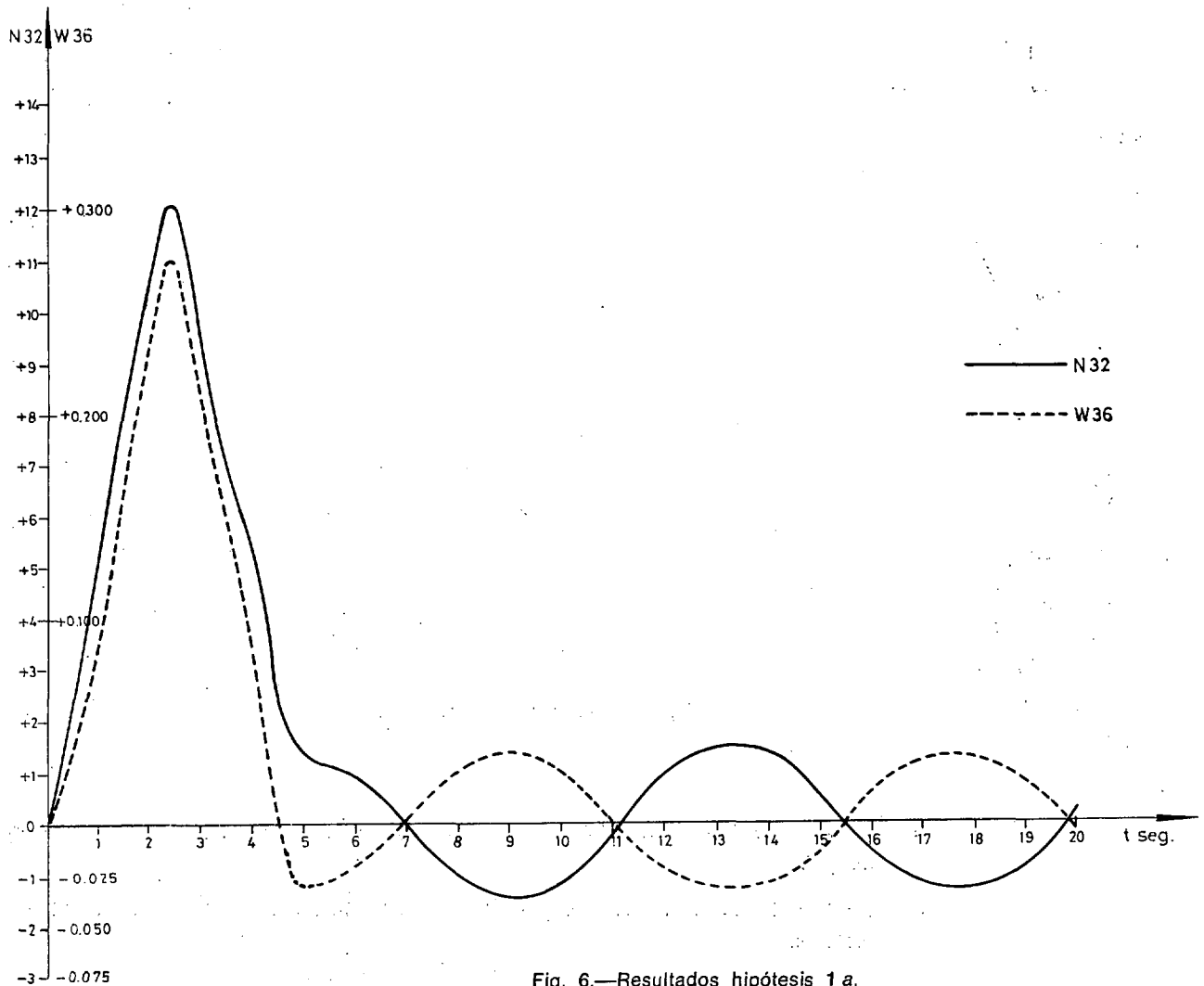


Fig. 6.—Resultados hipótesis 1 a.

3. DESARROLLO TEORICO

3.1. Planteamiento general.

El cálculo dinámico elemental de una estructura se compone de tres partes:

1. Determinación de las vibraciones libres (frecuencias y modos de vibración).

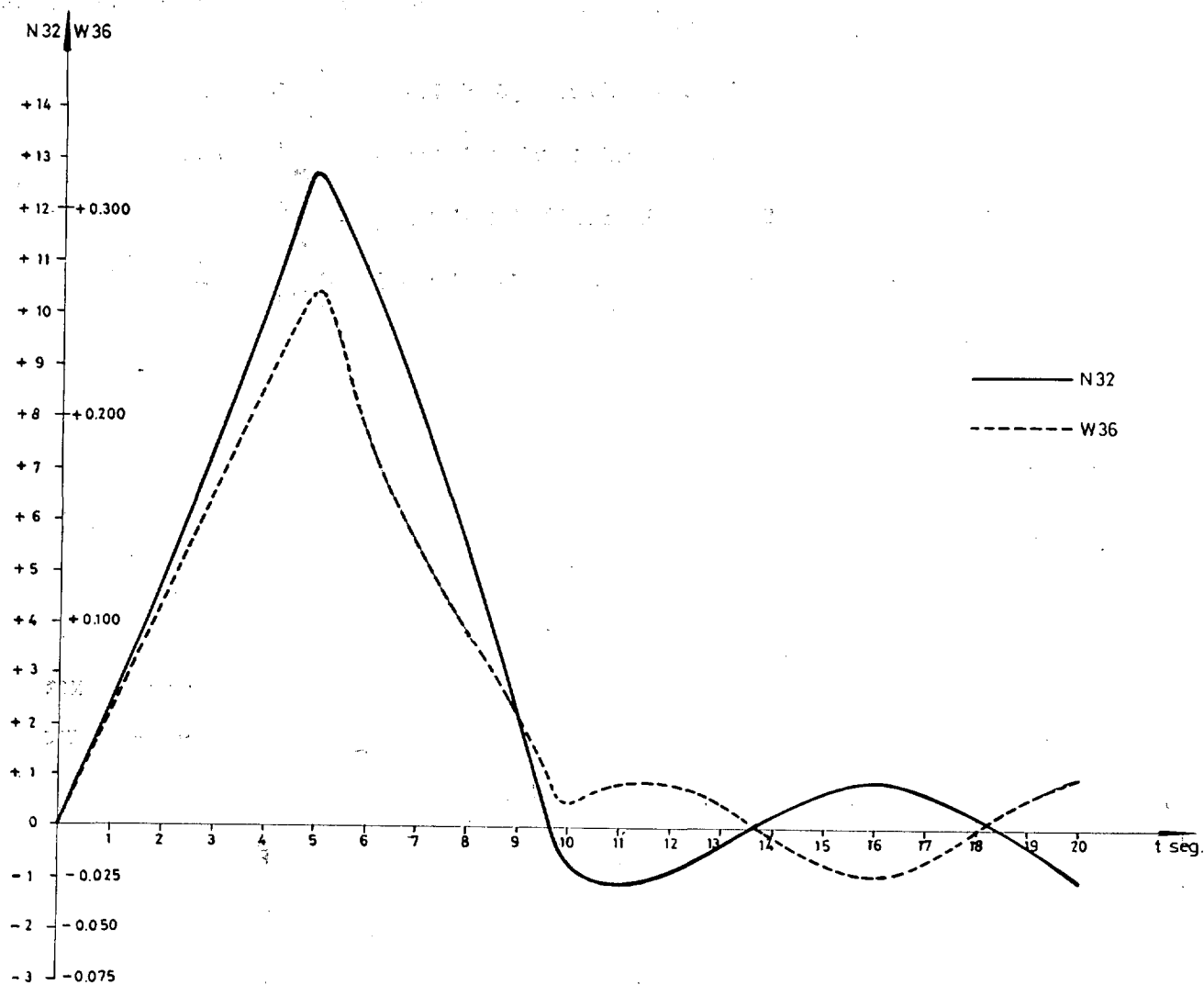


Fig. 7.—Resultados hipótesis 2 a.

2. Conocimiento de las leyes de variación de las acciones con respecto al tiempo.
3. Respuesta función del tiempo de la estructura sometida a las acciones anteriores.

A continuación se expone el estudio dinámico correspondiente a una estructura genérica cualquiera, compuesta de nudos y barras. En cada nivel del cálculo se hace referencia al tipo particular del ejemplo (celosía plana), si bien la aplicación a otros tipos es inmediata, realizando el oportuno cambio de las matrices empleadas.

La exposición que sigue es clásica y los detalles de la misma pueden verse en (1, 5 y 6), por lo que sólo se indican aquí resultados. Se utiliza notación matricial, a fin de facilitar la programación posterior en un ordenador electrónico.

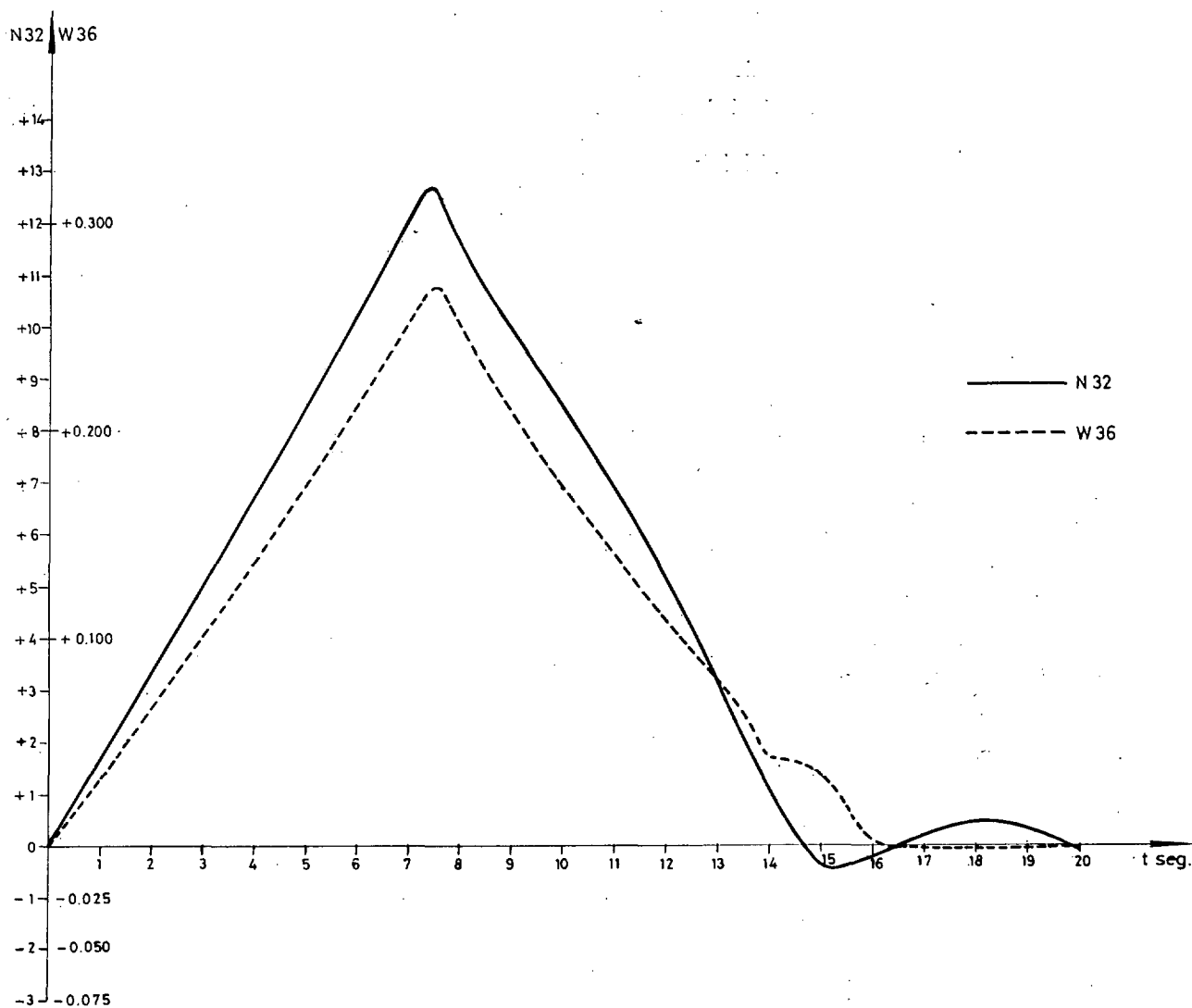


Fig. 8.—Resultados hipótesis 3 a.

Las hipótesis consideradas han sido:

- a) Estructura lineal (ley de Hooke y desplazamientos pequeños).
- b) Las masas vibrantes se suponen en los nudos.
- c) No existe amortiguamiento.

3.2. Matriz de rigidez de una barra.

La matriz de rigidez relaciona las acciones en los extremos de la barra con los desplazamientos eficaces.

En el caso de celosía (fig. 8) se tiene:

$$-p_1 = p_2 = \frac{EA}{L} (d_2 - d_1)$$

siendo E módulo de elasticidad del material:

A área de la sección constante de la barra.

L longitud de la barra.

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \dots \quad [1]$$

con:

$$k_{11} = k_{22} = -k_{12} = -k_{21} = \frac{EA}{L}$$

La expresión [1] es válida para cualquier barra, como elemento de un tipo es-

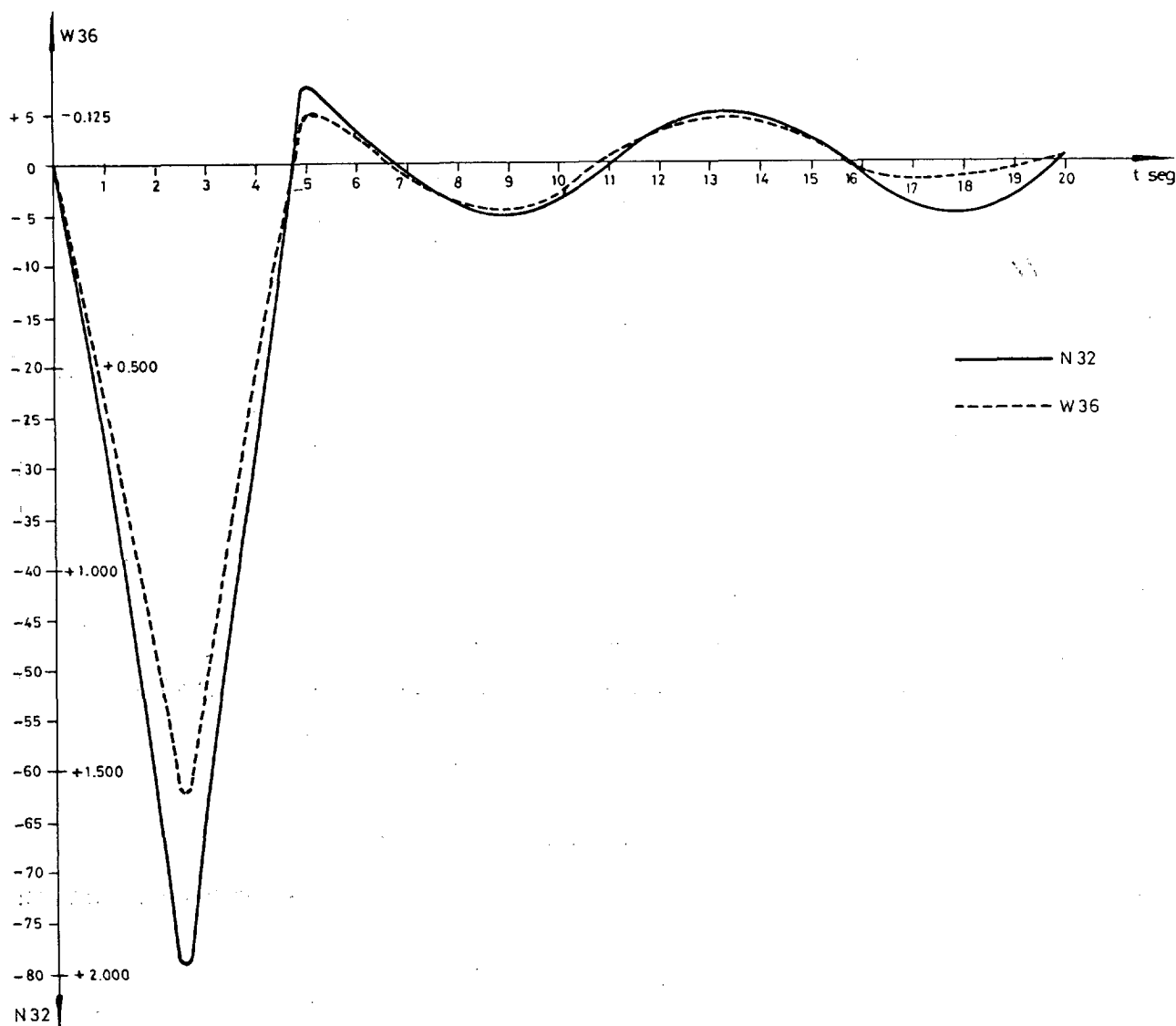


Fig. 9.—Resultados hipótesis 1 b.

tructural genérico (emparrillado, entramado, etc.), variando únicamente las dimensiones de las matrices:

$$p_i, p_j, k_{ij} \quad (i, j = 1, 2)$$

3.3. Transformación de ejes.

Si p'_{1x} , p'_{1y} son las proyecciones de p_i respecto a los ejes generales (x' , y') se obtiene, con $i=1,2$:

$$p'_{ix} = p_i \cos \alpha$$

$$p'_{iy} = p_i \sin \alpha$$

o bien:

$$p'_i = \begin{pmatrix} p'_{ix} \\ p'_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} p_i$$

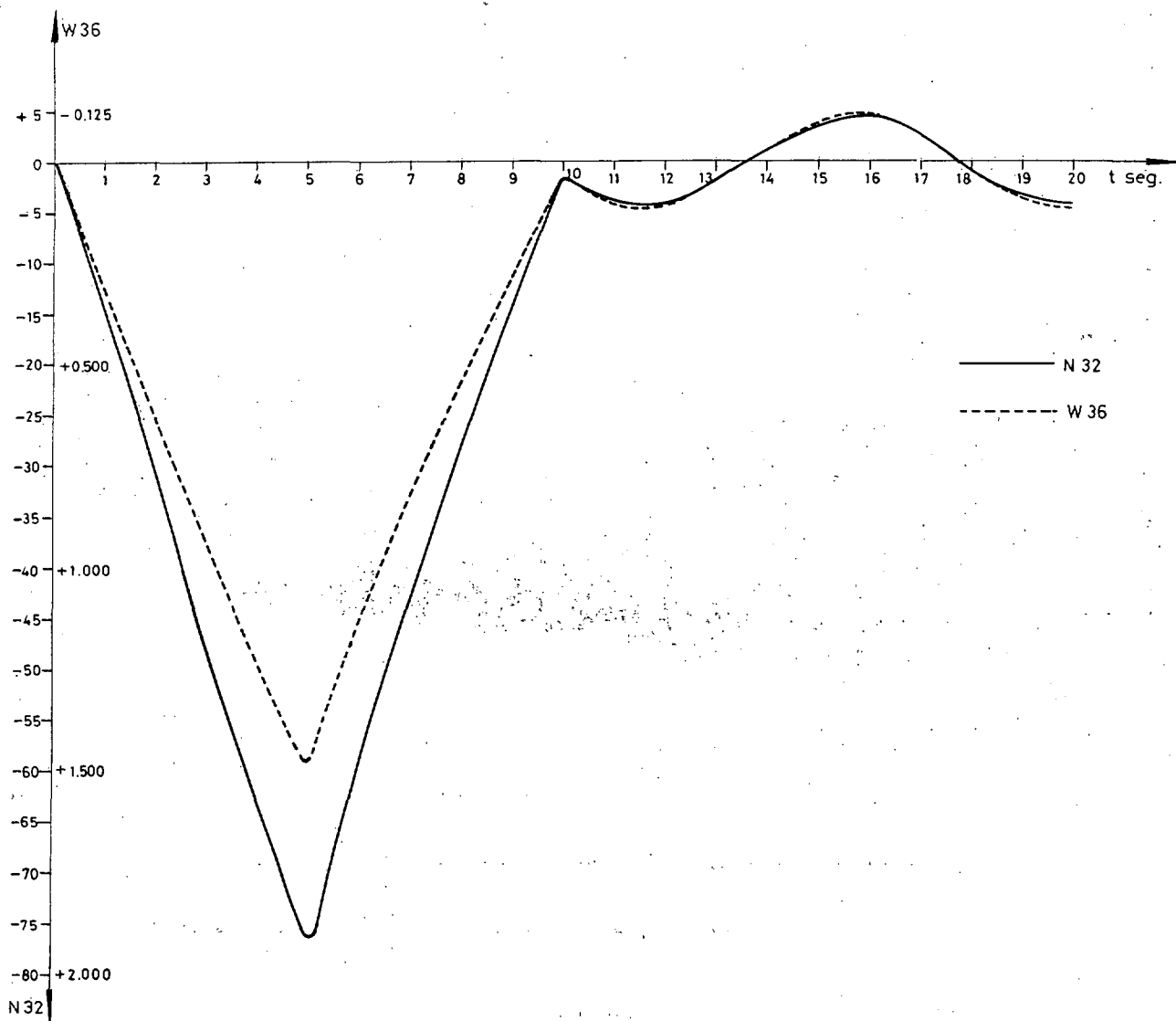


Fig. 10.—Resultados hipótesis 2 b.

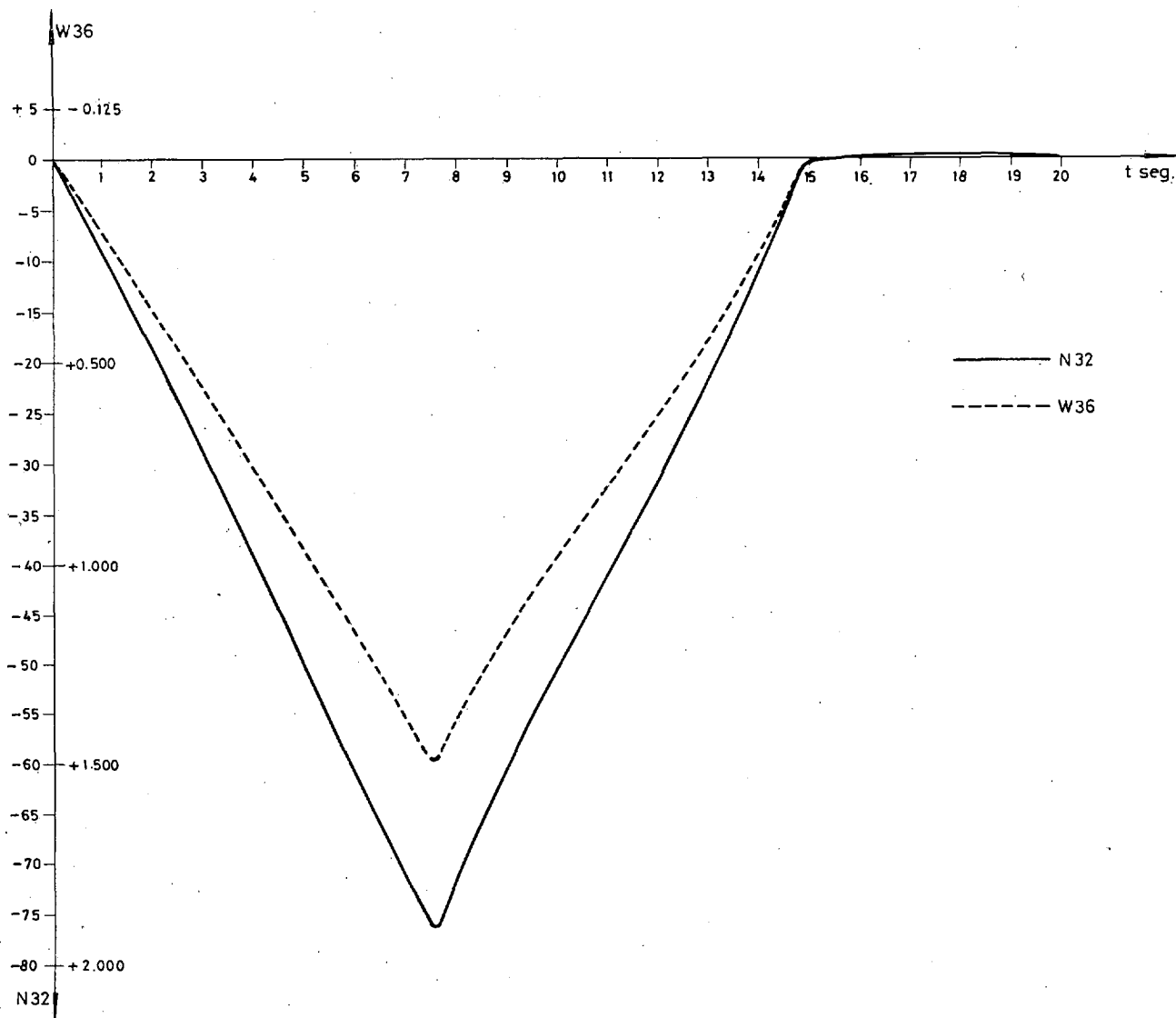


Fig. 11.—Resultados hipótesis 3 b.

En general:

$$\mathbf{p}'_i = \mathbf{T} \mathbf{p}_i \dots \quad [2]$$

Procediendo análogamente con los desplazamientos:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}'_{ix} \cos \alpha + \mathbf{d}'_{iy} \sin \alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{d}'_{ix} \\ \mathbf{d}'_{iy} \end{pmatrix} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \mathbf{d}'_i$$

es decir, para una estructura genérica:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{T}^t \mathbf{d}'_i \quad [3]$$

3.4. Matriz de rigidez en ejes generales.

Introduciendo [2] y [3] en la ecuación [1] se obtiene:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{pmatrix} \quad [4]$$

siendo p'_i y d'_i matrices ya definidas y $k_{ij} = T k'_{ij} T^t$.

En el caso de celosía plana:

$$k'_{11} = k'_{22} = -k'_{12} = -k'_{21} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \text{sen } \alpha \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha \end{pmatrix}$$

3.5. Matriz de rigidez de la estructura.

Conociendo la topología de la estructura (o modo de conexión de barras y nudos), la formación de la matriz de rigidez K de la misma se realiza mediante sencillas reglas a partir de la expresión [4] para cada barra (ver, por ejemplo, 7).

Se obtiene:

$$P = K D \quad [5]$$

Siendo:

D la matriz columna de todos los desplazamientos incógnitas.

P la matriz columna de todas las acciones exteriores.

3.6. Vibraciones libres.

En este caso, las únicas fuerzas actuantes sobre la estructura son las de inercia.

Si las masas están concentradas en los nudos, resulta:

$$P = P_{\text{inercia}} = -M \ddot{D}$$

siendo M una matriz diagonal formada por las masas y se indica por $\ddot{D}$ la derivada segunda de la matriz D con respecto al tiempo t .

Si existen masas distribuidas en las barras, se pueden concentrar en los nudos utilizando para cada barra el artificio siguiente, que se expone, como ejemplo, para el caso de celosía:

Sea $u(x)$ el desplazamiento longitudinal de la rebanada de la abscisa x .

Se supone:

$$u(x) = d_1 \frac{x}{L} + d_2 \frac{L-x}{L}$$

Las fuerzas de inercia por unidad de longitud son:

$$p(x) = \rho \cdot \ddot{u}(x) = \rho \left(\ddot{d}_1 \frac{x}{L} + \ddot{d}_2 \frac{L-x}{L} \right)$$

Las fuerzas de inercia equivalentes actuando en los extremos de barra se determinan mediante las ecuaciones:

$$p_1 = \int_0^L \rho \cdot p(x) \frac{L-x}{L} dx, \quad p_2 = \int_0^L p(x) \frac{x}{L} dx$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}_{\text{inercia}} = \rho L \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix}$$

con ρ la densidad lineal de cada barra.

La expresión anterior en ejes generales se convierte:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix}_{\text{inercia}} = \begin{pmatrix} m'_{11} & m'_{12} \\ m'_{21} & m'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{d}'_1 \\ \ddot{d}'_2 \end{pmatrix} \quad [6]$$

siendo:

$$m'_{ij} = T m_{ij} T^t$$

Haciendo uso de las mismas reglas de formación de la matriz K , se obtiene a partir de [6] una matriz M (en general, no diagonal) tal que $P_{\text{inercia}} = -M \ddot{D}$.

En ambos casos, la ecuación [5] se transforma:

$$K D = -M \ddot{D} \quad [7]$$

Si se supone:

$$D = D_0 e^{i w t}$$

t variable tiempo e:

$$i = \sqrt{-1}$$

La ecuación [7] se convierte en:

$$(K - w^2 M) D_0 = 0$$

Sistema homogéneo que tiene solución distinta de la nula (trivial) para determinados valores de w (frecuencias).

Las soluciones D_0 correspondientes son los denominados modos de vibración.

Las teorías de solución de este problema (determinación de autovalores y autovectores de una matriz no simétrica) pueden verse en cualquier tratado de álgebra lineal, por ejemplo (8), por lo que no se detallan aquí. Si w_i es una frecuencia y el correspondiente modo ya normalizado se denomina $D_0^{(i)}$, se tiene:

$$\begin{aligned} D_0^{(i)'} \cdot M D_0^{(j)} &= 0 & i \neq j \\ D_0^{(i)'} \cdot M D_0^{(i)} &= 1 \end{aligned}$$

(' denota la matriz transpuesta).

En forma más compacta, las ecuaciones anteriores pueden ponerse:

$$\mathbf{Z}' \mathbf{M} \mathbf{Z} = \mathbf{I} \quad [8]$$

siendo:

$\mathbf{I}$ matriz unidad ($n \times n$).

n número de grados de libertad de la estructura.

Se puede comprobar que:

$$\mathbf{Z}' \mathbf{K} \mathbf{Z} = \mathbf{W} \quad [9]$$

siendo $\mathbf{W}$ una matriz diagonal, definida como sigue:

$$\mathbf{W} = \text{diag.} (w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2)$$

3.7. Vibraciones forzadas.

Llamando $\mathbf{R}(t)$ al vector de acciones exteriores actuando sobre los nudos de la estructura, que es función del tiempo (cargas dinámicas), la ecuación [7] se convierte en este caso:

$$\mathbf{K} \mathbf{D} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{R}(t)$$

Utilizando la siguiente transformación de variables:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Z} \mathbf{q} \quad [10]$$

se obtiene:

$$\mathbf{K} \mathbf{Z} \mathbf{q} + \mathbf{M} \mathbf{Z} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}(t)$$

Premultiplicando los dos miembros de la ecuación anterior por $\mathbf{Z}'$, ésta se transforma:

$$\mathbf{Z}' \mathbf{K} \mathbf{Z} \mathbf{q} + \mathbf{Z}' \mathbf{M} \mathbf{Z} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Z}' \mathbf{R}(t)$$

es decir, teniendo en cuenta [8] y [9]:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{Z}' \mathbf{R}(t) \quad [11]$$

El sistema [11] está constituido por un conjunto de ecuaciones diferenciales independientes, y la expresión general para la ecuación i es:

$$\ddot{q}_i + w_i^2 q_i = \mathbf{D}_0^{(i)'} \cdot \mathbf{R}(t)$$

cuya solución, supuestas las condiciones iniciales, (para $t=0$) $q_i = \dot{q}_i = 0$, es la integral de Duhamel:

$$q_i = \frac{1}{w_i} \int_0^t \mathbf{D}_0^{(i)'} \cdot \mathbf{R}(\tau) \sin w_i (t - \tau) d\tau$$

Conocido q_i función de t , se determina $\mathbf{D}$ mediante [10], y haciendo uso de [1] y [3] se calculan para cada instante t los esfuerzos en la estructura, que constituyen la respuesta de la misma a la carga dinámica.

4. CONCLUSION

En general, la determinación de la respuesta de una estructura sin amortiguamiento y cargas concentradas en nudos es un problema que exige la utilización de un ordenador electrónico, aunque su planteamiento teórico es sencillo. Sin embargo, la principal complicación del estudio parece radicar en la dificultad de un conocimiento preciso de la carga dinámica actuante.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a V. Rossi y Asociados, Ingenieros Consultores su amabilidad al permitir la publicación de los resultados que se presentan en este artículo.

REFERENCIAS

1. HACAR, M. A. y ALARCON, E.: "Elementos de dinámica aplicadas a las estructuras". Edix, S. A.
2. "Norma sismorresistente P.G.S. 1" (1968).
3. DAVENPORT, A. G.: "The application of Statistical concepts to the wind loading of Structures". Proc. Inst. Civ. Engrs., 19 (1961).
4. VELLOZZI, J. and COHEN, E.: "Gust response factores". Journal of Structural Division A.S.C.E.; junio 1968.
5. WARBURTON, G. B.: "The dynamical behaviour of Structures". Ed. Pergamon Press.
6. NOWACKI, W.: "Dynamic of Elastic Systems". Chapman and Hall, Ltd.
7. LIVESLEY, R. K.: "Matrix Methods of Structural Analysis". Ed. Pergamon Press.
8. FADDEW, D. N. and FADDEEVA, V. N.: "Computational methods of linear algebra". Ed. W. H. Freeman.