

UTILIDAD DEL ALGEBRA MODERNA EN EL CALCULO DE ESTRUCTURAS(*)

Por JOSE LUIS BLANCO VILLORIA

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Se presenta un estudio en el que mediante los conceptos y propiedades de los espacios vectoriales, transformaciones lineales, espacios vectoriales duales y transformaciones transpuestas se profundiza, se concreta y se sistematiza el Análisis de Estructuras de todo tipo. Las expresiones matriciales a las que da lugar este estudio dejan el problema preparado para su resolución por las modernas calculadoras.

GENERALIDADES Y FUNDAMENTOS

Hoy día en el Cálculo de Estructuras se impone el proceso mecanizado mediante las modernas computadoras. La forma más adecuada para realizar este cálculo mecanizado es la de expresar la solución del problema por medio del cálculo matricial. Por esta razón, actualmente adquiere gran importancia el Cálculo Matricial de Estructuras. Antes, por el contrario, este Cálculo carecía de interés, pues conducía, salvo en casos triviales, a procesos inabordables. Solamente, pues, podía tener un mero interés teórico. Se ponía el máximo empeño en buscar procedimientos abreviados o, más bien, abordables, como son los iterativos, los cuales implicaban simplificaciones, muchas veces no admisibles. Actualmente es posible plantear totalmente, dentro de las hipótesis admitidas, los problemas elásticos sin preocuparnos de la cantidad y complejidad de operaciones de cálculo a que puedan dar lugar.

Ahora bien, las matrices no son solamente unos magníficos operadores, sino que son también unos importantes entes matemáticos, cuyas estructuras y relaciones estudia el Algebra Moderna.

Entre las hipótesis o principios fundamentales del Cálculo Elástico de Estructuras tenemos el de linealidad o ley de Hooke y el de superposición. Estos dos principios, juntamente con el de la conservación de la energía, permiten introducir en el Cálculo de Estructuras los conceptos de espacio vectorial, de aplicaciones lineales, de espacios vectoriales duales y de aplicaciones transpuestas, y con ello se consigue profundizar y concretar a la vez el Análisis de Estructuras.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de noviembre de 1972.

Empezaremos analizando el problema de las estructuras reticulares.

En primer lugar, concretemos definiciones y notaciones.

Toda estructura reticular está constituida por b barras, que se unen entre sí en n nudos, que pueden ser rígidos o "articulados" (en general, un nudo impone a cada extremo de barra que en él concurre determinadas coacciones y le permite determinadas libertades o no-coacciones).

La estructura puede estar apoyada o sustentada en a apoyos que imponen γ coacciones (que consideraremos rígidas, ya que las elásticas pueden equipararse a determinadas barras ficticias), que motivan γ reacciones y que permiten λ libertades ($\gamma + \lambda = 6a$ en los sistemas espaciales; $= 3a$ en los planos).

Aparte de estos elementos geométricos, hay que considerar las siguientes magnitudes mecánicas variables:

Las cargas, que son las fuerzas y pares (momentos) que, en principio, supondremos que actúan únicamente en los nudos y en las libertades o no-conexiones de los apoyos. Las reacciones de las coacciones de los apoyos son magnitudes de la misma naturaleza, luego hay que incluirlas con las anteriores. Para hacer una completa distinción, acordaremos llamar cargas a las propiamente dichas y solicitaciones a las cargas más las reacciones en apoyos. Todas las cargas las dispondremos en una matriz columna que es el vector carga que designaremos por F (de "fuerza"), cuya dimensión es $6n + \lambda$ (en los sistemas planos, $3n + \lambda$). Análogamente tenemos el vector sollicitación S , cuya dimensión es $6n + \lambda + \gamma = 6(n + a)$.

Los esfuerzos para cualquier sección de cada barra son: el esfuerzo axil, los dos esfuerzos cortantes según las direcciones principales de la sección, los dos momentos flectores según las mismas direcciones principales y el momento de torsión. Se considerarán los esfuerzos de los extremos de cada barra que podemos disponer en una matriz columna. Este es el vector esfuerzo que designaremos por f . Su dimensión es $12b$, pero teniendo en cuenta que entre los esfuerzos de los extremos de cada barra (no cargada interiormente, como hemos supuesto) existen seis ecuaciones homogéneas de equilibrio estático, la dimensión de f puede reducirse a $6b$.

Los desplazamientos, que son los corrimientos y los giros de los nudos y de las no-coacciones de los apoyos. La matriz o vector desplazamiento tiene la dimensión $6n + \lambda$, igual que el vector carga. Le llamaremos c (de "corrimiento").

Por último, tenemos las deformaciones que es preciso diferenciar bien de los desplazamientos. Las deformaciones corresponden a las barras. Podemos, de manera análoga a los esfuerzos, considerar las deformaciones de los extremos de cada barra (que vendrían a ser, si los nudos son rígidos, los corrimientos y los giros de los nudos y de las no-coacciones de los apoyos). En tal caso, la dimensión del vector deformación sería $12b$, pero al igual que en los esfuerzos bastan 6 por cada barra (que no están cargadas interiormente), y entonces la dimensión será $6b$. En todo caso, las componentes del vector deformación han de ser tales que sean eficaces y completas con relación a los esfuerzos, es decir, tales que el producto escalar del vector esfuerzo por el vector deformación sea la energía de deformación de la estructura. Llamaremos al vector deformación d .

Las cargas y los desplazamientos se pueden tomar, pero no siempre convie-

ne, según tres direcciones ortogonales fijas para toda la estructura. Por el contrario, los esfuerzos y las deformaciones vienen según los ejes principales y particulares de cada barra. De todas formas, no hay que conceder excesiva importancia a esto, puesto que los vectores vienen referidos, claro está, a sus bases (en nuestro caso, a bases canónicas, que no tiene por qué depender de determinados ejes.

Cada uno de estos cuatro grandes conjuntos de magnitudes constituyen un espacio vectorial en virtud de los principios de linealidad y superposición, y se puede comprobar que, en efecto, satisfacen las condiciones o axiomática correspondiente, es decir, son grupos abelianos para la ley de composición interna, que es la suma o superposición, y con respecto a la ley de composición externa, que es la multiplicación por los números reales, satisfacen la doble distributividad, la asociatividad de escalares y la neutralidad de elemento unidad. Estos espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo de los números reales los designaremos por:

$$\{F\}, \{f\}, \{c\} \text{ y } \{d\}.$$

$\{F\}$ y $\{c\}$ son espacios vectoriales duales, pues cumplen las condiciones necesarias, a saber:

- 1.^a Existe el producto escalar $F \cdot c$, que es precisamente el duplo del trabajo de las "fuerzas" exteriores, o mejor dicho, del trabajo de las cargas.
- 2.^a Este producto es lineal con relación a F y a c .
- 3.^a El único vector ortogonal a cualquier c es el $F = \bar{0}$, y el único ortogonal a todo F es el $c = \bar{0}$.

Asimismo, $\{f\}$ y $\{d\}$ son duales, siendo ahora $f \cdot c$ el duplo del trabajo de las "fuerzas interiores", o mejor dicho, la energía de deformación.

Entre las propiedades de los espacios duales está la de tener la misma dimensión, lo que ya hemos podido comprobar.

Por otra parte, las aplicaciones o transformaciones lineales (homomorfismos) $\{F\} \rightarrow \{f\}$ y $\{d\} \rightarrow \{c\}$ son transpuestas, es decir, las matrices que efectúan ambas transformaciones lineales, son transpuestas, pues la condición característica es la de la igualdad de los productos escalares $F \cdot c = f \cdot d$, lo cual es cierto en virtud del principio de la conservación de la energía.

También, por la misma condición, so aplicaciones transpuestas:

$$\{c\} \rightarrow \{d\} \text{ y } \{f\} \rightarrow \{F\}$$

Incluso también:

$$\{F\} \rightarrow \{d\} \text{ y } \{f\} \rightarrow \{c\}$$

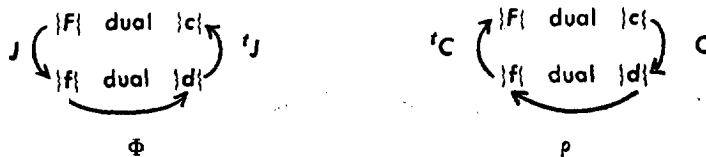
y también:

$$\{c\} \rightarrow \{f\} \text{ y } \{d\} \rightarrow \{F\}$$

Sin el auxilio del Algebra Lineal estas conclusiones pueden obtenerse aplicando los principios de las fuerzas virtuales y de los desplazamientos virtuales.

A veces tendremos que sustituir $\{F\}$ por $\{S\}$, en tal caso el vector desplazamiento ha de tener también γ componentes más, iguales a 0, dado que las coacciones de los apoyos son rígidas, si llamamos c_s a este vector desplazamiento ampliado se sigue verificando $S \cdot c_s = F \cdot c = f \cdot d$, y, por consiguiente, $\{S\}$ es dual de $\{c_s\}$, y también se obtienen aplicaciones transpuestas si en las anteriores sustituimos $\{F\}$ por $\{S\}$ y $\{c\}$ por $\{c_s\}$.

Los problemas que pueden presentarse se resolverán de manera sistemática utilizando cualquiera de los dos esquemas siguientes:



Nunca podemos pretender pasar directamente de $\{F\}$ a $\{c\}$ o viceversa, sino que es preciso dar los "rodeos" que indican los esquemas:

$$c = ({}^t J \Phi J) F \quad F = ({}^t C \rho C) c$$

Vemos ahora la posibilidad que existe de establecer las matrices (= transformaciones lineales) que intervienen en los esquemas:

Las matrices Φ y ρ , que llamaremos, respectivamente, de flexibilidades elementales ensambladas y de rigideces elementales ensambladas, se establecen directamente, pues son las resultantes de ensamblar o colocar en banda diagonal principal las flexibilidades o rigideces, respectivamente, de cada barra (elementos de la estructura) considerada aislada del resto de la estructura. Φ y ρ son dos matrices simétricas, y tales que $\Phi \cdot \rho = I$.

Hay que establecer la J o la C , pero $J: \{F\} \rightarrow \{f\}$ no puede establecerse directamente si el sistema es hiperestático, sino que es preciso utilizar un sistema isostático asociado. Por el contrario, $C: \{c\} \rightarrow \{d\}$, siempre es posible establecerla directamente.

Cuando el problema se resuelve utilizando la matriz C , que llamaremos de conexión, el procedimiento recibe el nombre del método de las deformaciones; si se resuelve estableciendo la matriz J , que llamaremos de influencia, tenemos el llamado método de las fuerzas. Todo problema puede resolverse utilizando cualquiera de los dos métodos, aunque según los casos sea preferible elegir uno u otro.

Los problemas que pueden presentarse son los siguientes:

1. El dato es el vector carga F .
2. Asiento de apoyos o más general: movimientos de las coacciones de los apoyos.
3. El dato lo constituyen determinadas componentes de c .
4. Efectos térmicos y análogos.
5. Barras cargadas interiormente.

Vamos a hacer un repaso a estos problemas, aunque no sea con todo detalle, para no alargar excesivamente este artículo.

Primer problema. — Dato: F .

En la mayoría de los casos suele ser preferible el método de las deformaciones, solamente es ventajoso el de las fuerzas en los sistemas que no presentan hiperestatismo interno.

Método de las deformaciones:

$$F = ({}^t C \rho C) c = R c \quad [1.1]$$

en donde R es la matriz de rigidez estructural, que es simétrica y regular, pues las componentes de F son arbitrarias, es decir, independientes, por tanto:

$$c = R^{-1} F \quad [1.2]$$

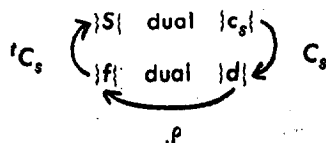
y además, tenemos:

$$d = C c = C R^{-1} F \quad [1.3]$$

$$f = \rho C c = \rho C R^{-1} F \quad [1.4]$$

con lo que queda resuelta totalmente la estructura.

Ahora bien, a pesar de presentar el procedimiento seguido un aspecto sumamente sencillo, a veces es preferible complicarlo aparentemente, tomando en lugar de F , S , pues de esta forma todas las barras, incluidas las que van a los apoyos, van a tener un tratamiento idéntico, es decir, homogenizamos el procedimiento y el cálculo de la matriz de conexión se facilita; por otra parte, el procedimiento que vamos a exponer a continuación se precisa en la resolución del problema de "asiento de apoyos". Tenemos el siguiente esquema:



De donde:

$$S = ({}^t C_s \rho C_s) c_s = R_s c_s \quad [1.5]$$

pero aquí, R_s , que podemos llamar matriz de rigidez estructural ampliada, es singular, puesto que las componentes de S no son independientes, en consecuencia, R_s no se puede invertir, sin embargo, escrita la anterior igualdad en la forma "más matricial":

$$\begin{bmatrix} F \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c_z \end{bmatrix} \quad [1.6]$$

R_s queda particionada de manera conforme, y como $c_z = \bar{0}$:

$$F = R_{11} c \quad [1.7]$$

y ahora, R_{11} (es la misma R anterior) sí es regular, y, por tanto:

$$c = R_{11}^{-1} F \quad [1.8]$$

Las reacciones de las coacciones de los apoyos vienen dados por:

$$Z = R_{21} c \quad [1.9]$$

Y los esfuerzos por:

$$f = \rho C_s c_s \quad [1.10]$$

Método de las fuerzas:

Hemos dicho que no es posible establecer directamente la matriz de influencia J , salvo si estamos considerando un sistema isostático. Si el sistema es hiperestático, hemos de tomar un sistema asociado isostático, es decir, tenemos que introducir en la estructura dada desconexiones hasta hacerla isostática. En cada desconexión introducida pondremos fuerzas o momentos eficaces incógnitos; el conjunto de todos ellos constituye el vector de incógnitas hiperestáticas que designaremos por X .

En la estructura asociada isostática y en virtud del principio de superposición, se puede desglosar f en dos términos: uno, debido a las cargas F , y el otro, a las incógnitas X :

$$f = \hat{J}_0 F + \hat{J}_1 X \quad [1.11]$$

en donde las matrices de influencia $\hat{J}_0$, $\hat{J}_1$ se calculan directamente en la estructura isostática asociada. Con el símbolo $\wedge$ se quiere indicar: "en la estructura isostática asociada".

La anterior igualdad podemos expresarla en la siguiente notación "más matricial":

$$\begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ f_{6b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{J}_0 & \hat{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{J}_0 & \hat{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ X \end{bmatrix} = \hat{J} \hat{F} \quad [1.12]$$

h es el grado de hiperestatismo que suponemos que es externo todo él, pues si no, debemos emplear el método de las deformaciones; si no obstante se quisiese emplear el método de las fuerzas, en el caso de existir hiperestatismo interno, en el proceso habría que introducir variaciones que no vamos a exponer en este artículo, tan sólo diremos que $\hat{F}$ tendría $6n + \lambda + h_e + 2h_i$ componentes.

Por aplicación transpuesta:

$$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \vdots \\ \hat{c}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} = {}^t[\hat{J}] \begin{bmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\hat{J}_1 \\ \vdots \\ {}^t\hat{J}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{bmatrix}_{6b} \quad [1.13]$$

Por otra parte, se tiene:

$$\begin{bmatrix} d \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} = [\Phi] \begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} \quad [1.14]$$

Sustituyendo [1.12] en [1.14] y ésta en [1.13]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} = {}^t[\hat{J}] [\Phi] [\hat{J}] \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\hat{J}_0 \\ \vdots \\ {}^t\hat{J}_1 \end{bmatrix} [\Phi] \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\hat{J}_0 \\ \vdots \\ {}^t\hat{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\hat{J}_0 \\ \vdots \\ {}^t\hat{J}_1 \end{bmatrix} [\Phi \hat{J}_0 \quad \Phi \hat{J}_1] \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^t\hat{J}_0 \Phi \hat{J}_0 & {}^t\hat{J}_0 \Phi \hat{J}_1 \\ {}^t\hat{J}_1 \Phi \hat{J}_0 & {}^t\hat{J}_1 \Phi \hat{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ c_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{00} & \hat{\Phi}_{01} \\ \hat{\Phi}_{10} & \hat{\Phi}_{11} \end{bmatrix} = \hat{\Psi} \hat{F} \end{aligned} \quad [1.15]$$

$\hat{\Psi}$ es la matriz de flexibilidad estructural asociada, y es simétrica y regular.

De donde:

$$c = \hat{\Phi}_{00} F + \hat{\Phi}_{01} X \quad [1.16]$$

$$c_x = \hat{\Phi}_{10} F + \hat{\Phi}_{11} X \quad [1.17]$$

En nuestro caso, $c_x = \bar{0}$, luego:

$$X = -\hat{\Phi}_{11}^{-1} \hat{\Phi}_{10} F = \pi F \quad [1.18]$$

que son las incógnitas hiperestáticas (llamando $\pi = -\hat{\Phi}_{11}^{-1} \hat{\Phi}_{10}$).

Sustituyendo [1.18] en [1.11]:

$$f = (\hat{J}_0 + \hat{J}_1 \pi) F = J F \quad [1.19]$$

siendo $J = \hat{J}_0 + \hat{J}_1 \pi$ la matriz de influencia del sistema, dado que habíamos dicho que no era posible establecerla directamente, salvo si el sistema era isostático.

Por último, tenemos:

$$d = \Phi J F \quad [1.20]$$

$$c = ({}^t\hat{J}_0 \Phi J) F = \Psi F \quad [1.21]$$

Ψ es la matriz de flexibilidad estructural.

Segundo problema. — Asiento de apoyos.

El problema más general de este tipo es el de movimientos de las coacciones de los apoyos, es decir, el dato es c_z , que ahora no es igual a $\bar{0}$. Como $F = \bar{0}$, de [1.6]:

$$R_{11} c + R_{12} c_z = 0 \quad [2.1]$$

es decir:

$$c = -R_{11}^{-1} R_{12} c_z \quad [2.2]$$

Las reacciones de las coacciones vienen dadas por:

$$Z = R_{21} c + R_{22} c_z = (-{}^t R_{12} R_{11}^{-1} R_{12} + R_{22}) c_z \quad [2.3]$$

y los esfuerzos, por:

$$f = \rho C_s c_s \quad [2.4]$$

siendo $c_s = \begin{bmatrix} c \\ c_z \end{bmatrix}$.

Tercer problema. — Dato: determinadas componentes de c .

Es decir, se conocen determinados desplazamientos de los nudos y de las coacciones de los apoyos, y hay que resolver o calcular la estructura incluyendo el cálculo de la F que origina los desplazamientos dados.

La resolución de este problema realizado por el método de las deformaciones sigue un proceso paso a paso dual del método de las fuerzas aplicado al primer problema:

Podemos establecer como dual de la [1.11]:

$$d = \check{C}_0 \underline{c} + \check{C}_1 y = d_0 + d_1 \quad [3.1]$$

en donde $\underline{c}$ son los desplazamientos conocidos e y los incógnitos. Dualmente utilizamos el signo $\check{\vee}$, que quiere significar "en el sistema asociado cinemáticamente determinado —"isocinemático"—", o lo que es lo mismo, "el resto de los desplazamientos están bloqueados". Ahora bien, el signo $\check{\vee}$ no tiene una significación esencial como la tiene su dual $\wedge$, como consecuencia de que no consideramos sistemas hipostáticos, y por consiguiente, puede suprimirse. La frase "el resto de los desplazamientos están bloqueados" significa que para determinar las matrices de conexión C_0 y C_1 (lo mismo que las C anteriores) se determinan paso a paso, tomando cada desplazamiento y bloqueando todos los demás.

Las fórmulas que se obtienen son las duales de las [1.11, 1.12, ..., 1.21], efectuando las sustituciones:

$$\begin{array}{ll} F & \dots\dots\dots c \\ f & \dots\dots\dots d \\ X & \dots\dots\dots y \\ c_x & \dots\dots\dots F_y \\ J & \dots\dots\dots C \\ \Phi & \dots\dots\dots \rho \\ \wedge & \dots\dots\dots \check{\vee} \end{array}$$

Como siempre, el problema puede resolverse también por el método de las fuerzas, pero no es el procedimiento adecuado, salvo si el sistema es isostático, de todas formas, el procedimiento consiste en particionar convenientemente las matrices de [1.15].

Cuarto problema. — Efectos térmicos y análogos.

Método de las deformaciones:

Si suponemos todos los extremos de barras bloqueadas, es decir, empotrados, el efecto térmico (o análogo) se traducirá en la aparición de esfuerzos en las barras y concretamente en la aparición de reacciones en esos empotramientos ficticios. Estas reacciones son las que hay que aplicar a los extremos de las barras para que no experimenten movimientos cuando la estructura está sometida al efecto térmico. Como nos referimos a extremos de barras, las reacciones hay que equipararlas a esfuerzos y esos movimientos impedidos, a deformaciones. Sea d_0 el vector de estas deformaciones y f_0 el vector de los esfuerzos que las anula, se tiene:

$$f_0 = - \rho d_0 \quad [4.1]$$

(a f_0 se le da el nombre de esfuerzos impuestos).

Los esfuerzos finales son el resultado de sumar a f_0 los originados por los desplazamientos incógnitos y (en realidad todos son incógnitos, es decir, c no existe):

$$f = f_0 + \rho C y \quad (C_1 = C) \quad [4.2]$$

$F_y = F$ es nulo, por lo que:

$$F_y = {}^t C f = {}^t C f_0 + {}^t C \rho C y = 0 \quad [4.3]$$

de donde se obtienen los desplazamientos de los nudos y no-coacciones de los apoyos:

$$y = - ({}^t C \rho C)^{-1} {}^t C f_0 \quad [4.4]$$

Los esfuerzos finales vienen dados por:

$$\{ \{ f \} = [I - \rho C ({}^t C \rho C)^{-1} {}^t C] f_0 \quad [4.5]$$

Y las deformaciones por:

$$d = C y = - C ({}^t C \rho C)^{-1} {}^t C f_0 \quad [4.6]$$

Método de las fuerzas:

Aquí hay que seguir un razonamiento dual al anterior, que desde luego es menos instructivo. Antes bloqueábamos la estructura para que las barras no tuviesen deformaciones, ahora dejaremos que por el efecto térmico (o análogo), las barras se deformen libremente y que no aparezcan esfuerzos, esto sólo es posible dejando que se desconecten todas las barras, lo que implicaría la destrucción de la estructura; para que esto no ocurra hay que sumar al vector dilatación por efecto térmico otro vector dilatación que restablezca la continuidad geométrica, es decir, que evite la desconexión de las barras. Llamando, respectivamente, a estos dos vectores d_0 y d_1 , el vector dilatación real o total es:

$$d = d_0 + d_1 \quad [4.7]$$

d_0 viene a ser el dato del problema (igual que antes) y se determina directamente considerando las barras aisladas unas de otras.

d_1 se calcula teniendo en cuenta que $F = \bar{0}$, en tal caso [1.11] queda $f = \hat{J}_1 X$ y las deformaciones producidas por las incógnitas hiperestáticas X , son:

$$d_1 = \Phi \hat{J}_1 X \quad [4.8]$$

Luego:

$$d = d_0 + \Phi \hat{J}_1 X \quad [4.9]$$

De [1.13] se tiene $c_x = {}^t\hat{J}_1 d$ y como $c_x = 0$, tendremos:

$$\hat{J}_1 d_0 + {}^t\hat{J}_1 \Phi \hat{J}_1 X = 0 \quad [4.10]$$

que constituye la ecuación de compatibilidad de la estructura hiperestática sometida a las deformaciones impuestas d_0 . Despejando X :

$$X = -\Phi_{11}^{-1} {}^t\hat{J}_1 d_0 \quad [4.11]$$

Las dilataciones serán:

$$d = (I - \Phi \hat{J}_1 \Phi_{11}^{-1} {}^t\hat{J}_1) d_0 \quad [4.12]$$

y los esfuerzos:

$$f = \hat{J}_1 X = -\hat{J}_1 \Phi_{11}^{-1} {}^t\hat{J}_1 d_0 \quad [4.13]$$

o también, puesto que $\rho \Phi = I$:

$$f = \rho (\Phi \hat{J}_1 X) = \rho d_1 \quad [4.14]$$

lo que expresa que las deformaciones impuestas no producen esfuerzos, solamente d_1 (el dual expresa que las tensiones impuestas no producen deformaciones).

Quinto problema. — Barras cargadas.

Hasta ahora hemos considerado las barras no cargadas, es decir, que las cargas sólo estaban aplicadas a los nudos, y decíamos que a este caso se podían reducir todos.

Si en una barra cargada bloqueamos los nudos de sus extremos, la barra ejerce sobre estos nudos bloqueados determinadas fuerzas y momentos. Estas fuerzas y momentos han de incluirse en el vector carga como sumandos de las correspondientes componentes, pues son ciertamente fuerzas y momentos a que viene sometido el nudo correspondiente. Con este nuevo vector carga se calcula la estructura (primer problema). Al final, en las secciones internas de las barras cargadas hay que superponer a los esfuerzos hallados a partir del mencionado vector carga

(llamados hiperestáticos), los esfuerzos (isostáticos) que origina directamente en cada barra (sustentada en sus extremos isostáticamente) su carga interna.

También se puede abordar este problema de la misma manera que se ha hecho para los efectos térmicos; así, por ejemplo, si seguimos el método de las deformaciones, basta determinar previamente en cada barra cargada, los esfuerzos de sus extremos supuestos éstos bloqueados, empotrados. Estos serán los esfuerzos impuestos.

Con esta manera de proceder tenemos la ventaja que los esfuerzos se toman paralelos a los ejes principales y particulares de cada barra y no hay que hacer cambios de sistemas de referencia.

OBSERVACIONES:

Las matrices Φ y ρ son siempre regulares e inversas una de la otra.

Entre $\{F\}$ y $\{c\}$ existe un isomorfismo, es decir, $\Psi (c = \Psi F)$ es regular (*).

Las aplicaciones lineales u homomorfismos $f = JF$, $d = Cc$, $F = {}^tCf$ y $c = {}^tJd$ son de matrices rectangulares (salvo en las estructuras isostáticas, en donde $6b = 6n + \lambda$). Es paradójico que no siendo inversibles J y C , puedan existir simultáneamente todas las aplicaciones anteriores. La solución de esta curiosa paradoja es la siguiente: En $d = Cc$, C tiene las dimensiones $(6b) \times (6n + \lambda)$, y es cuadrada si el grado de hiperestatismo $h = 6(b - n) - \lambda$ es 0, es decir, en los sistemas isostáticos; en los hiperestáticos $6(b - n) - \lambda > 0$, lo que indica que C es rectangular de más filas que columnas. La aplicación lineal $d = Cc$ es evidentemente inyectiva, y como:

$$\dim. (\text{Espacio inicial}) = \dim. (\text{Subespacio imagen}) + \dim. (\text{Núcleo})$$

el subespacio imagen $\{d\}$ tiene realmente la dimensión $6n + \lambda$, aunque está sumergido en un espacio de dimensión $6b$. Así, pues, $d = Cc$ es inyectiva, pero no sobreyectiva y $F = {}^tCf$ será, en consecuencia, sobreyectiva pero no inyectiva, desde el punto de vista meramente algebraico, es decir, dando a las componentes de f todos los valores reales arbitrariamente, sin restricción alguna, pero esto físicamente no es admisible, pues igual que le ocurría a $\{d\}$, $\{f\}$ es un subespacio de dimensión $6n + \lambda$ sumergido en el espacio de dimensión $6b$. Al no ser $F = {}^tCf$ inyectiva, la correspondencia algebraica inversa no es una aplicación sino una función multiforme, pero imponiendo determinada restricción al conjunto de las f , sí puede convertirse en aplicación; la restricción consiste en tomar, no el espacio de dimensión $6b$, sino el subespacio de dimensión $6n + \lambda$. El problema de conseguir esta restricción no es otra cosa que la resolución del problema hiperestático. De esta forma se establece la aplicación $f = JF$ que es inyectiva pero no sobreyectiva, es decir, la correspondencia $\{F\} \rightarrow \{f\}$ que en los sistemas hiperestáticos, parece, en principio (con el solo auxilio de la Estática), que es multiforme, se logra hacer uniforme no tomán-

(*) Estamos en el supuesto de que todas las componentes de c y todas las de F son independientes, ya que a veces la compatibilidad de los desplazamientos en determinadas hipótesis de deformación implican relaciones entre los componentes de c , y entonces Ψ será singular. Asimismo, en estructuras hipostáticas, el equilibrio de la estructura exige determinadas dependencias lineales entre las componentes de F , resultando entonces $R(F = Rc)$ singular.

dola exhaustiva. Y desde el punto de vista algebraico $c = {}^tJd$ es una aplicación sobreyectiva pero no inyectiva.

En los sistemas isostáticos todas estas aplicaciones son biyectivas.

Si hubiésemos empezado el razonamiento a partir de $f = JF$, diremos (dualmente) que es inyectiva pero no sobreyectiva y, en consecuencia, $c = {}^tJd$ será sobreyectiva pero no inyectiva, desde el punto de vista meramente algebraico, es decir, suponiendo, lo que no es posible, que las componentes de d toman todos los valores, en esta hipótesis, la correspondencia algebraica inversa sería multiforme, pero estructuralmente, en la realidad, tenemos $d = Cc$, que es una aplicación no sobreyectiva pero sí inyectiva, pues no consideramos sistemas hipostáticos.

(Continuará.)