

# ESTUDIO SOBRE PANDEO LATERAL DE ARCOS (\*)

Por JOSE M.<sup>a</sup> OCTAVIO DE TOLEDO EUGUI  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

*El presente artículo se refiere a un problema hasta la fecha no satisfactoriamente resuelto. Se trata de la determinación de condiciones críticas de pandeo lateral de arcos exentos.*

*El método que a continuación se expone ofrece una solución a este problema.*

## 1. Consideraciones sobre la distribución de esfuerzos cortantes y la torsión en los arcos.

1.1. Consideramos la dovela elemental representada en la figura. En ésta se ha dibujado  $R$ , que es la resultante de las tensiones cortantes que se producen al desplazarse la cara derecha de la rebanada en su mismo plano, según la dirección del eje  $X$ .

Las tensiones cortantes siguen una ley de la forma:  $\tau = k/r$ , o sea, una ley hiperbólica.

El punto  $C$  vendrá dado por:

$$\omega_C = \frac{\int_{R-h}^{R+h} \frac{r \cdot k}{r} dr}{\int_{R-h}^{R+h} \frac{k}{r} dr} = \frac{2h}{L \frac{R+h}{R-h}}$$

siendo:

$$\frac{R+h}{R-h} = 1 + \frac{2h}{R-h}$$

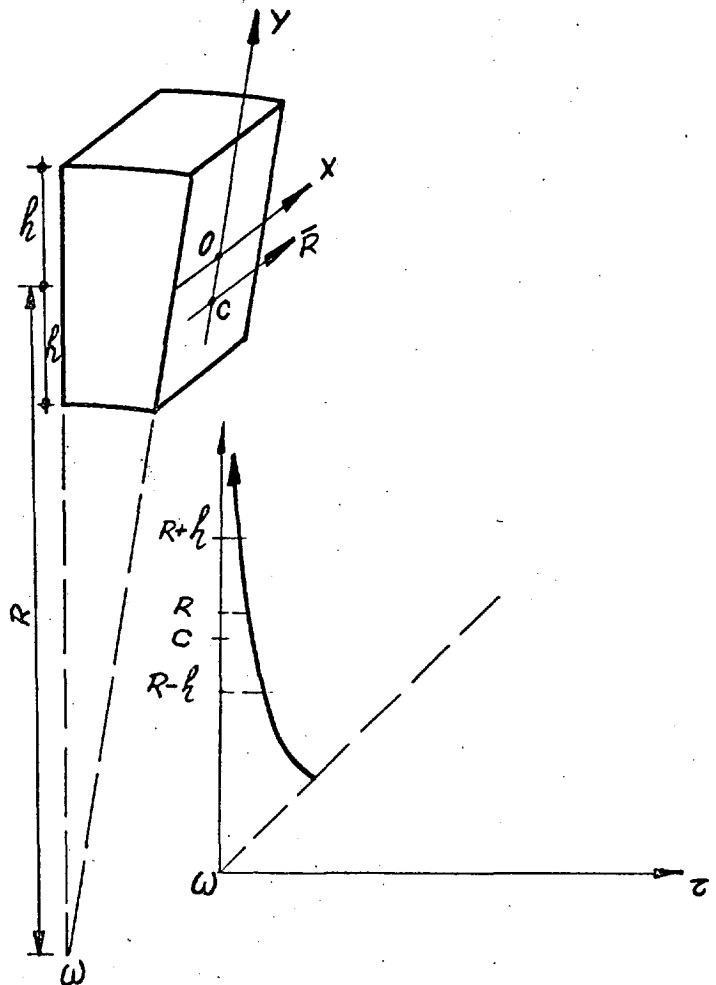
Si  $h$  es muy pequeño respecto a  $R$ , se tendrá:

$$L \frac{R+h}{R-h} \approx \frac{2h}{R-h} \approx \frac{2h}{R}$$

siendo el error:

$$\epsilon < \frac{1}{2} \left( \frac{2h}{R-h} \right)^2$$

1.2.  $C$  es también un punto tal, que si una fuerza perpendicular a la sección considerada incide sobre la misma en un punto situado sobre  $R$ , produciría tan sólo una flexión lateral en la dovela (o sea, flexión según el eje  $OY$ ). Esto



(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la redacción de esta Revista hasta el 28 de febrero de 1972.

es evidente, ya que la distribución de tensiones normales a la sección seguiría una ley análoga a la de las cortantes.

1.3. Según esto, una fuerza paralela al eje  $OX$  y que pase por  $C$  producirá solamente un desplazamiento lateral de la sección, *sin giro*. Si la fuerza no pasa por  $C$  será equivalente a la anterior (o sea, pasando por  $C$ ) y a un momento torsor.

En este último caso, el movimiento de la sección se compondrá de:

1. Un desplazamiento lateral debido a la fuerza aplicada en  $C$ .
2. Un giro debido al momento torsor.

Veremos ahora que el giro se produce precisamente alrededor del punto  $C$ .

En efecto, supongamos que se produce alrededor de un punto  $D$ , distinto del  $C$ , y tal que  $CD = a$ .

Por la simetría de la sección,  $D$  ha de estar sobre el eje  $OY$ . Si es  $h$  el desplazamiento de la sección por efecto de la fuerza aplicada en  $C$ , el trabajo de esa fuerza será igual a la energía elástica debida al desplazamiento lateral:

$$F \cdot \lambda = E_1$$

El momento torsor dará un trabajo  $M \cdot \theta$ , igual a la energía elástica debida al giro:

$$M \cdot \theta = E_2$$

Por efecto del giro, la fuerza sufrirá un nuevo desplazamiento  $\mu$ , produciéndose un trabajo  $F \mu$ .

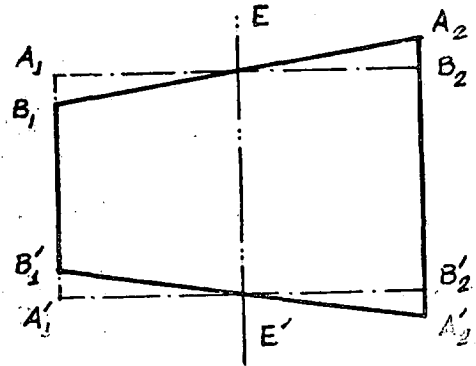
Por el teorema de Maxwell, este trabajo ha de ser igual al desarrollado por  $M$  como consecuencia del desplazamiento  $h$ . Siendo así que este último trabajo es nulo, habrá de ser:  $F \mu = 0$ , o sea,  $\mu = 0$ , para lo cual habrán de coincidir  $D$  y  $C$ .

1.4. Según vimos, cuando el canto del arco es pequeño con respecto al radio del mismo,  $C$  coincide, aproximadamente, con  $O$ . Es decir, el eje de giro coincide, aproximadamente, con la tangente a la directriz del arco.

Cuanto menor sea el canto con respecto al radio, menor será la influencia de las cuñas  $E A_1 B_1$ ,  $E A_2 B_2$ , etc., y la torsión de la dovela po-

drá asimilarse a la de una rebanada de una pieza recta, de canto  $EE'$ .

En lo sucesivo supondremos que tratamos siempre de arcos de canto pequeño respecto de su radio, y admitiremos las simplificaciones



derivadas de esta hipótesis, que podemos resumirlas como sigue:

1. El giro de torsión se produce alrededor de la tangente a la directriz.
2. La torsión en cada dovela elemental se produce como si se tratara de una pieza recta.

## 2. El pandeo de la pieza recta. Aplicación del método de los incrementos finitos.

Antes de abordar el estudio del pandeo lateral de los arcos expondremos el caso más simple de la pieza recta. Lo haremos de forma que se pueda derivar de inmediato un método de cálculo basado en los incrementos finitos. En el apartado 3, sirviéndonos de punto de partida los resultados que en este 2 vamos a obtener, pasaremos al caso de los arcos, objeto primordial de este estudio.

2.1. Si tomamos una pieza recta, solicitada como se ve en la figura, y la suponemos deformada, la ordenada  $y$ , correspondiente a una abscisa  $x$ , puede obtenerse en la forma siguiente:

Primeramente, por efecto del giro inicial  $\varphi_0$  (que lo tomaremos muy pequeño), será:

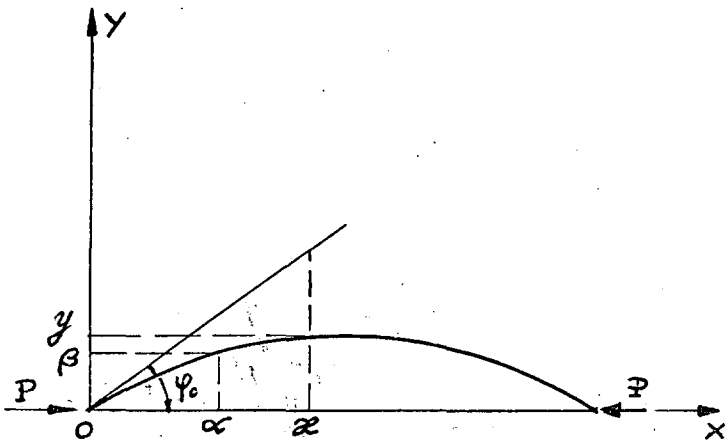
$$y = x \varphi_0. \quad [1]$$

Después, al ir girando las rebanadas sucesivas por efecto de las flexiones correspondien-

tes a cada una de ellas, se irá modificando el valor [1] obtenido antes.

Para mayor claridad, dividiremos la pieza en un número finito de rebanadas, definidas por los valores:

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2 \Delta x \dots \text{etc.}$$



Por el giro de la rebanada comprendida entre  $x_0$  y  $x_1$  se obtendrá:  $\Delta y = (x - x_1) \Delta \varphi_1$ , y así sucesivamente.

Pasando al límite tendremos:

$$y = x \varphi_0 + \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} (x - \alpha) d\varphi$$

en donde:

$$d\varphi = \frac{M}{EI} d\alpha$$

$$M = -p \cdot \beta$$

resultando:

$$y = x \varphi_0 - \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} (x - \alpha) \frac{p \beta}{EI} d\alpha$$

Ahora bien:

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=x} (x - \alpha) \beta \cdot d\alpha = x \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} \beta \cdot d\alpha - \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} \beta \cdot \alpha \cdot d\alpha = U$$

siendo:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} \beta d\alpha + x \frac{d}{dx} \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} \beta d\alpha - \\ & - \frac{d}{dx} \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} \beta \cdot \alpha \cdot d\alpha = \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} \beta d\alpha + xy - xy = \\ & = \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} \beta d\alpha \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$\boxed{\frac{d^2 U}{dx^2} = y}$$

Según esto tendremos:

$$x \varphi_0 - \frac{p}{EI} U = y, \text{ de donde } -\frac{p}{EI} U'' = y'', \text{ o sea:}$$

$$\boxed{-\frac{p}{EI} y = y''}$$

Ecuación perfectamente conocida, de cuya integración resulta:

$$y = k_1 \cos a x + k_2 \operatorname{sen} a x$$

siendo:

$$a = \sqrt{\frac{p}{EI}}$$

al ser  $y = 0$  para  $x = 0$ , resulta:  $k_1 = 0$ .

Y al hacer  $y = 0$  para  $x = L$  resulta:  $a L = \pi$ , o sea,  $p = EI \cdot \frac{\pi^2}{L^2}$ , que es la expresión conocida de la carga crítica de pandeo.

Resulta que para  $p < EI \frac{\pi^2}{L^2}$  la única manera de conseguir que sea  $y = 0$  para  $x = L$  es que sea  $k_2 = 0$ , en cuyo caso en cualquier punto de la pieza es  $y = 0$ .

En cambio, si es  $p = EI \frac{\pi^2}{L^2}$ , sucede eso para cualquier valor de  $k_2$ , quedando indeterminada la forma de la elástica, o sea, habiendo llegado al caso de inestabilidad elástica de la pieza.

Para  $p > EI \frac{\pi^2}{L^2}$ , la inestabilidad se producirá en una longitud menor que la de  $L$ , sobrepasándose así las condiciones críticas de pandeo.

2.2. La forma, como en el apartado anterior hemos estudiado el pandeo de la pieza recta, hallando una solución funcional de la elástica, nos servirá de base para resolver el problema numéricamente, estudiando de esta nueva manera el fenómeno del pandeo.

2.2.1. En efecto: La expresión de que antes partimos:

$$y = x \varphi_0 + \int_{\alpha=0}^{\alpha=x} (x-\alpha) d\alpha$$

da lugar a la siguiente, si se sustituyen las diferenciales por incrementos finitos:

$$y_n = x \varphi_0 + \sum_{i=1}^{i=n-1} (x_n - x_i) \Delta \varphi_i$$

Tendremos:

$$y_n = x_n \varphi_0 + \sum_{i=1}^{i=n-1} (x_n - x_i) \Delta \varphi_i$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} \varphi_0 + \sum_{i=1}^{i=n} (x_{n+1} - x_i) \Delta \varphi_i$$

De donde:

$$y_{n+1} - y_n = \varphi_0 (x_{n+1} - x_n) + \left[ \sum_{i=1}^{i=n} (x_{n+1} - x_i) \Delta \varphi_i - \sum_{i=1}^{i=n} (x_n - x_i) \Delta \varphi_i \right] \quad [2]$$

Ahora bien:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_{n+1} - x_i) \Delta \varphi_i = \sum_{i=1}^{i=n} [(x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_i)] \Delta \varphi_i = \Delta x \cdot \varphi_n + \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_n - x_i) \Delta \varphi_i \quad [3]$$

De las relaciones [2] y [3] obtenemos:

$$y_{n+1} - y_n = \varphi_n \cdot \Delta x$$

o sea:

$$y_{n+1} = y_n + \varphi_n \Delta x \quad [4]$$

Por otra parte, se tiene:

$$\Delta \varphi = \frac{M}{EI} \Delta x, \quad M = -p \cdot y$$

o sea:

$$\Delta \varphi_i = -\frac{p}{EI} y_i \cdot \Delta x$$

2.2.2. De esta última fórmula, y de [4], deduciremos el proceso de cálculo numérico, que puede servir de modelo matemático para su introducción en el cálculo electrónico:

1. Se fija un valor de  $\varphi_0$ , inicial, arbitrariamente.
2. Se toma  $y_0 = 0$ .
3. Se va calculando sucesivamente:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_0 + \varphi_0 \Delta x \\ \varphi_1 &= \varphi_0 - \frac{p}{EI} y_1 \cdot \Delta x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \varphi_{n-1} \Delta x \\ \varphi_n &= \varphi_{n-1} - \frac{p}{EI} y_{n-1} \cdot \Delta x \end{aligned} \right\}$$

2.2.3. Sentado esto veremos ahora la forma de determinar la carga crítica de pandeo correspondiente a una cierta longitud de barra, o la longitud crítica correspondiente a una cierta carga, que, como veremos, es el mismo problema.

Si se fijara  $\varphi_0 = 0$ , todos los sucesivos valores de  $y$ , deducidos de las ecuaciones [5], resultarían nulos, y estaríamos en el caso teórico de carga perfectamente centrada y directriz rectilínea.

Por el contrario, si tomados  $\varphi_0 \neq 0$ , podremos ver si nos encontramos o no en las condiciones críticas de pandeo.

En efecto. Como resultado del proceso de cálculo, llegaremos a un valor final de  $y$ ,  $y_n$ . Partiendo, por ejemplo, de un valor  $\varphi_0 > 0$ , de la relación:

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} - \frac{p}{EI} y_{i-1} \cdot \Delta x$$

deducimos que la sucesión de  $\varphi_i$  tiene valores decrecientes, siempre que se mantengan positivos los valores de  $y_i$ , cosa que deberá ocurrir al principio para un cierto número de valores de  $i$ . Si estos valores de  $\varphi_i$  decrecen en forma suficientemente rápida, llegarán a hacerse negativos.

En tanto los valores de  $\varphi_i$  se mantengan positivos, los correspondientes valores de  $y_i$  serán crecientes, como se deduce de inmediato de la relación:

$$y_i = y_{i-1} + \varphi_{i-1} \cdot \Delta x$$

Por el contrario, al pasar a valores negativos de  $\varphi_i$  comenzarán a decrecer los correspondientes de  $y_i$ .

Hemos de advertir, por otra parte, que de las relaciones [5] se deduce que los valores  $y_i$  son proporcionales a  $\varphi_0$ , es decir, que los resultados que perseguimos no se van a ver influenciados por el valor inicial  $\varphi_0$  que adoptemos. Con este motivo recordaremos que antes dijimos que se suponían valores muy pequeños de  $\varphi_0$ , y en base a esto se establecieron las relaciones que anteceden. Aprovechando la proporcionalidad aludida, para el cálculo numérico podremos adoptar valores de  $\varphi_0$  de cierta magnitud, obviando así las dificultades que se presentarían de adoptar valores muy pequeños.

Si, como resultado final, obtenemos un valor  $y_n > 0$  (habiendo adoptado  $\varphi_0 > 0$ ), de lo que antecede se deduce que para conseguir que se anule  $y_n$ , es necesario hacer  $\varphi_0 = 0$ , en cuyo caso resultarían nulos los valores de  $y_i$ . Esto indica que no se ha llegado aún a las condiciones críticas de pandeo.

Si hubiéramos proseguido hallando valores de  $y_i$ , más allá de  $y_n$ , según se ha visto anteriormente, necesariamente se hubiera llegado a un valor nulo. Este valor se obtendría para cualquier valor inicial de  $\varphi_0$ . Habríamos llegado,

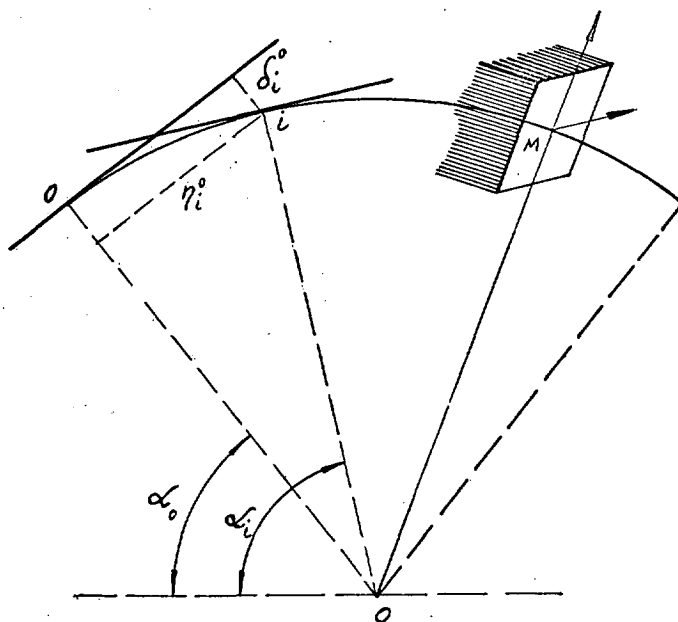
pues, al caso de inestabilidad elástica, conocido como pandeo.

Si partiendo de  $\varphi_0 > 0$  llegamos a obtener  $y_n < 0$ , habrá algún  $y_i = 0$ , correspondiente a una longitud de barra para la que la carga  $p$  resulta crítica a efectos de pandeo. Esta longitud, naturalmente, es menor que la de la barra real, lo que nos indica que hemos sobrepasado las condiciones críticas de pandeo.

### 3. Pandeo lateral de arcos. Ampliación del método desarrollado para la pieza recta.

3.1. Análogamente al caso de la pieza recta, consideramos el movimiento de una sección del arco como consecuencia de una deformación inicial, y de los sucesivos movimientos de las secciones intermedias.

Supondremos arcos con la única condición de que su directriz esté situada en un plano vertical.



Sólo consideramos desplazamientos transversales de los puntos de la directriz, y las deformaciones que pueden provocarlos.

Estas últimas sólo podrán ser:

a) Flexiones transversales del arco. En la sección representada en la figura serían flexiones según el eje  $OM$  (el arco representado es

de directriz circular, pero podría ser de cualquier otro tipo).

b) Giros alrededor de la tangente a la directriz, en el punto correspondiente a la sección que consideremos.

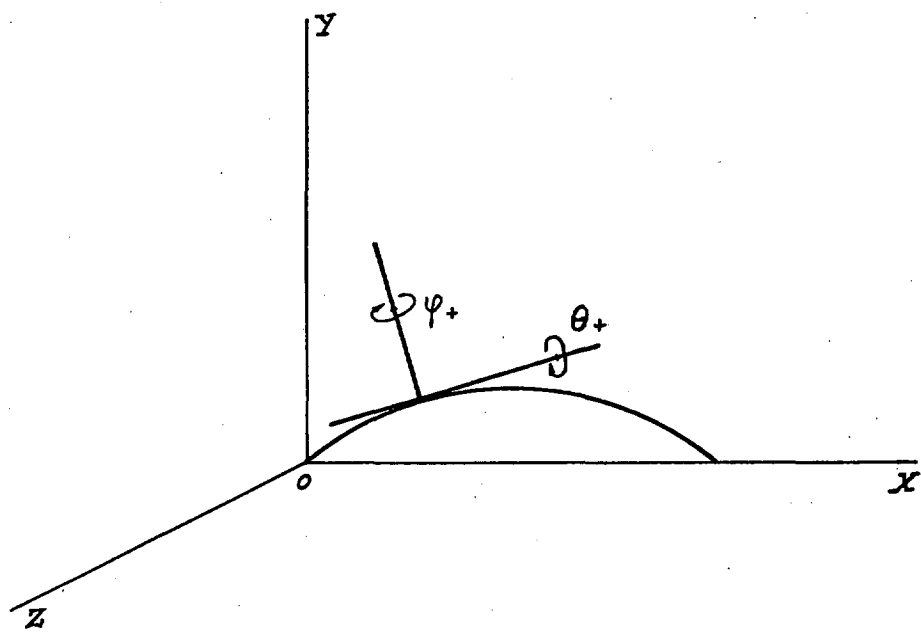
3.2. En la figura anterior — que ya hemos dicho representa un arco circular, aunque el método es válido para cualquier tipo —, aparecen representadas las tangentes y normales en el origen del arco (0), y en un punto genérico (i) del mismo. Se ve sin dificultad qué representan los ángulos  $\alpha_0$  y  $\alpha_i$ . Los símbolos  $\delta_i^0$  y  $\eta_i^0$  representan las distancias de (i) a la tangente y normal, respectivamente, en (0). Es evidente el significado que tendrían  $\delta_i^i$  y  $\eta_i^i$ .

Ahora, puesto que vamos a considerar, según hemos dicho, flexiones transversales y giros alrededor de la directriz (torsiones), definire-

3.3. Ahora seguiremos estrictamente el razonamiento que hacíamos en el caso de la pieza recta. Para fijar ideas, tomaremos un arco articulado en el extremo que adoptamos como origen, en cuyo caso las deformaciones iniciales serán un giro  $\varphi_0$  y otro  $\theta_0$ , de la manera como han sido definidos en el apartado anterior (para otros tipos de sustentación habrían de variarse las condiciones iniciales, por ejemplo, si el extremo fuera empotrado habría que considerar un momento flector y otro torsor). El método, sin embargo, puede generalizarse a cualquier tipo de sustentación.

Según puede verse en la figura del apartado 3.1, el desplazamiento transversal del punto i vendrá dado por la expresión:

$$z_i = [\delta_i^0 \theta_0 + \eta_i^0 \varphi_0] + \int_{j=0}^{j=i} \delta_i^j d\theta_j + \int_{j=0}^{j=i} \eta_i^j d\varphi_j.$$



mos los signos de ambos. Para ello basta con observar la presente figura.

Tomaremos los sentidos positivos representados porque, de (i) en sentido de valores crecientes de x, provocan desplazamientos transversales del arco, en el sentido positivo del eje O Z.

Siendo:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_j &= \frac{(M_f)_j}{EI} ds \\ d\theta_j &= \frac{(M_t)_j}{C} ds \end{aligned} \right\}$$

y  $M_f$  y  $M_t$  los momentos flector transversal y torsor, respectivamente, y  $s$  el arco.

Las relaciones anteriores, expresadas en incrementos finitos, serán:

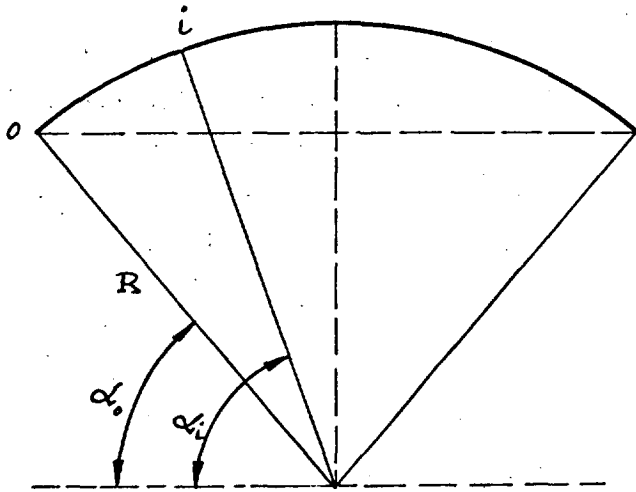
$$z_i = [\delta_i^0 \theta_0 + \eta_i^0 \varphi_0] + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_i^j \Delta \theta_j + \sum_{j=1}^{i-1} \eta_i^j \Delta \varphi_j$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_j &= \frac{(M_f)_j}{EI} \Delta s \\ \Delta \theta_j &= \frac{(M_t)_j}{C} \Delta s \end{aligned} \right\}$$

Las relaciones anteriores son básicas, y en ellas estriba el método que desarrollamos.

La principal diferencia con el caso de la pieza recta reside en el hecho de que en el presente interviene, no sólo la flexión como en aquél, sino además la torsión, lo cual se traduce en dos condiciones iniciales de distinta naturaleza: los ángulos  $\varphi_0$  y  $\theta_0$ .

En aras de la claridad de la expresión, examinaremos un caso concreto, recalcando que en ningún momento nos apoyaremos en una cualidad particular del mismo, con lo que los resultados conservarán su generalidad.



3.4. Sea un arco simétrico, de directriz circular, que podremos definir por su radio y el ángulo  $\alpha_0$ , aparte de las características geométricas de su sección y las mecánicas y resistentes del material que lo constituye. El arco estará sometido a su propio peso, y será articulado en ambos extremos.

Supuesta una cierta deformación transversal, el momento flector en un punto genérico ( $i$ ) será:

$$(M_f)_i = (M_f)^0_i + \sum_{j'=1}^{i-1} (M_f)^{j'}_i$$

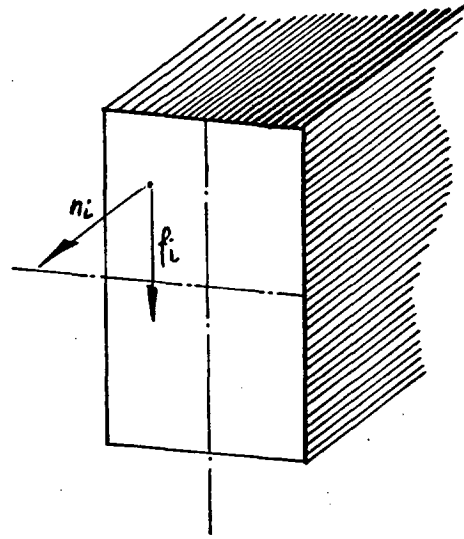
siendo:

1.  $(M_f)^0_i$  el momento flector debido a las reacciones de sustentación.
2.  $(M_f)^{j'}_i$  el momento flector debido al peso de la dovela comprendida entre los puntos ( $j-1$ ) y ( $j$ ), siendo además:

$$\alpha_j = \alpha_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta \alpha$$

Análogas distinciones podremos hacer con el momento torsor.

3.4.1. Consideramos ahora el efecto que sobre la sección ( $i$ ) produce el peso de la dovela comprendida entre los puntos ( $j-1$ ) y ( $j$ ), cuyo punto medio, según dijimos, es ( $j'$ ).



Las componentes, normal y tangencial, respectivamente, serán:

$$\left. \begin{aligned} n_i &= p \Delta s \cdot \cos \alpha_i \\ f_i &= p \Delta s \cdot \sen \alpha_i \end{aligned} \right\}$$

y se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} (M_f)^{j'}_i &= (z_i - z_{j'}) \cdot n_i \\ (M_t)^{j'}_i &= -(z_i - z_{j'}) \cdot f_i \end{aligned} \right\}$$

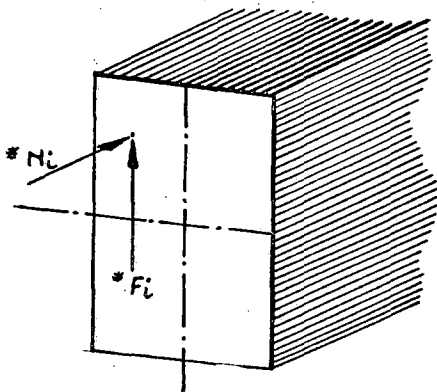
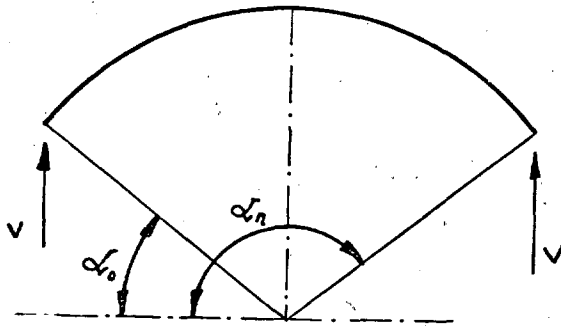
3.4.2. Al considerar las reacciones en los apoyos, tomaremos separadamente sus componentes horizontales y verticales. Tendremos:

$$(M_f)^0_i = {}^*(M_f)^0_i + {}^{**}(M_f)^0_i$$

$$(M_t)^0_i = {}^*(M_t)^0_i + {}^{**}(M_t)^0_i$$

Con el signo \* designamos los momentos debidos a la reacción vertical, y con el signo \*\* los debidos a la reacción horizontal.

a) *Reacción vertical:*



Se tendrá:

$$V = + \frac{1}{2} p S$$

siendo:

$$S = R (\alpha_n - \alpha_0)$$

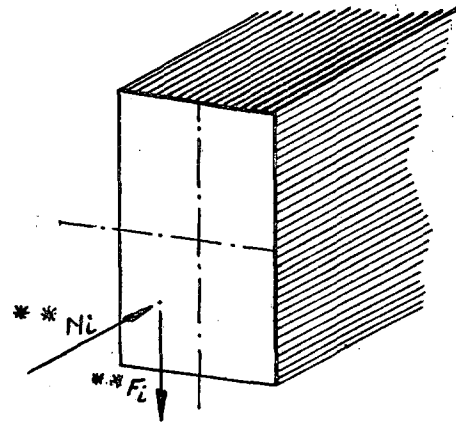
o sea:

$$S = R (\pi - 2 \alpha_0)$$

Resultará:

$$\left. \begin{aligned} {}^* N_i &= V \cos \alpha_i \\ {}^* F_i &= V \sin \alpha_i \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} {}^*(M_f)^0_i &= - {}^* N_i \cdot z_i \\ {}^*(M_t)^0_i &= {}^* F_i \cdot z_i \end{aligned} \right\}$$

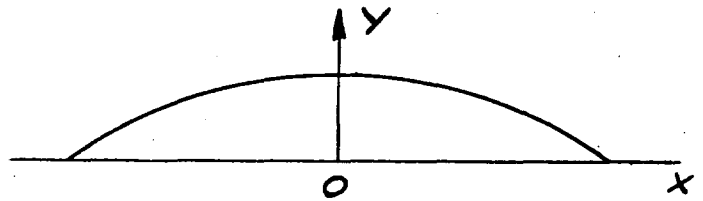
b) *Reacción horizontal:*



Se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} {}^{**} N_i &= H \sin \alpha_i \\ {}^{**} F_i &= H \cos \alpha_i \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} {}^{**}(M_f)^0_i &= - {}^{**} N_i \cdot z_i \\ {}^{**}(M_t)^0_i &= - {}^{**} F_i \cdot z_i \end{aligned} \right\}$$

Será preciso determinar H previamente. Lo haremos de la manera siguiente:



Se tendrá:

$$H = \frac{\int_0^s M_y ds}{\int_0^s y^2 ds}$$

Siendo  $M$  el momento isostático (longitudinal), obtenido al hacer deslizante un apoyo.

Empleando el método de los incrementos finitos:

$$M_i = V x_i - p \Delta s \sum_{i'=1}^{i'=i} (x_i - x_{j'})$$

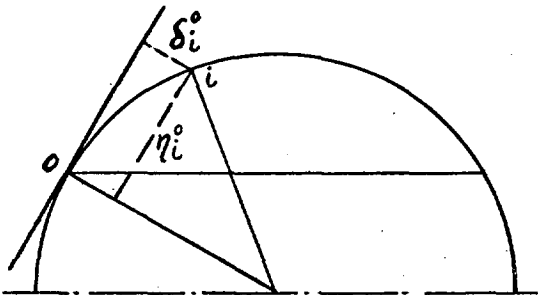
siendo:

$$\begin{cases} x_i = R (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_i) \\ y_i = R (\sin \alpha_i - \sin \alpha_0) \end{cases}$$

$$H = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} M_i y_i \Delta s}{\sum_{i=0}^{i=n} (y_i)^2 \Delta s}$$

3.4.3. Quedará únicamente por determinar los valores de los diferentes  $\delta$  y  $\eta$ .

Según puede verse en la figura adjunta:



$$\begin{cases} \delta^0_i = R [1 - \cos (\alpha_i - \alpha_0)] \\ \eta^0_i = R \sin (\alpha_i - \alpha_0) \end{cases}$$

Análogamente tendremos:

$$\begin{cases} \delta^j_i = R [1 - \cos (\alpha_i - \alpha_j)] \\ \eta^j_i = R \sin (\alpha_i - \alpha_j) \end{cases}$$

3.5. Haremos ahora un resumen de las fórmulas obtenidas, referentes al pandeo del arco:

1.

$$x_i = R (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_i)$$

$$y_i = R (\sin \alpha_i - \sin \alpha_0)$$

2.

$$M_i = V x_i - p \Delta s \sum_{i'=1}^{i'=i} (x_i - x_{j'})$$

3.

$$H = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} M_i y_i}{\sum_{i=0}^{i=n} (y_i)^2}$$

4.

$$z_i = [\delta^0_i \theta_0 + \eta^0_i \varphi_0] + \sum_{j=1}^{j=i-1} \delta^j_i \Delta \theta_j + \sum_{j=1}^{j=i-1} \eta^j_i \Delta \varphi_j$$

5.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_j &= \frac{(M_f)_j}{EI} \Delta s \\ \Delta \theta_j &= \frac{(M_t)_j}{C} \Delta s \end{aligned} \right\}$$

6.

$$\left. \begin{aligned} (M_f)_j &= * (M_f)^0_j + ** (M_f)^0_j + \sum_{k'=1}^{k'=j'} (M_f)^{k'}_j \\ (M_t)_j &= * (M_t)^0_j + ** (M_t)^0_j + \sum_{k'=1}^{k'=j'} (M_t)^{k'}_j \end{aligned} \right\}$$

7.

$$\begin{aligned} (M_f)^{k'}_j &= (z_j - z_{k'}) \cdot n_j & * (M_f)^0_j &= -N_j \cdot z_j \\ (M_t)^{k'}_j &= -(z_j - z_{k'}) \cdot t_j & * (M_t)^0_j &= F_j \cdot z_j \\ ** (M_f)^0_j &= -N_j \cdot z_j \\ ** (M_t)^0_j &= -F_j \cdot z_j \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} n_j &= p \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha_j & * N_j &= V \cdot \cos \alpha_j \\ t_j &= p \cdot \Delta s \cdot \sin \alpha_j & * F_j &= V \cdot \sin \alpha_j \\ ** N_j &= H \cdot \sin \alpha_j \\ ** F_j &= H \cdot \cos \alpha_j \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \delta^j_i &= R [1 - \cos (\alpha_i - \alpha_j)] \\ \eta^j_i &= R \cdot \sin (\alpha_i - \alpha_j) \end{aligned}$$

3.6. Concretando aún más nuestro caso, vamos a considerar un arco de hormigón de 50 m de luz y 20 m de flecha, para el que adoptaremos un módulo de elasticidad  $E = 2,5 \times 10^6 \text{ Tn/m}^2$ , un módulo de Poisson  $\mu = 0,2$ , un peso específico  $\gamma = 2,25 \text{ Tn/m}^3$ , un canto constante de 1 metro (variando luego, como vamos a ver, el ancho), y un módulo de torsión  $C = \frac{1}{3} \cdot A \times B^3 \times G$ . En esta última expresión se tiene:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$A$  = canto de la sección (que es la mayor dimensión).

$B$  = ancho de la sección.

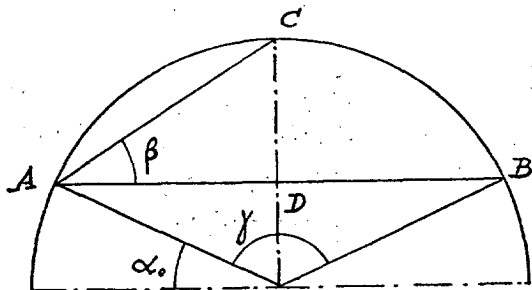
En rigor, no se debiera haber adoptado el valor  $1/3$  para el coeficiente, sino que éste debiera variar con la relación  $\frac{A}{B}$ . Sin embargo, estimamos que su influencia es nula cualitativamente a los efectos que perseguimos y muy escasa cuantitativamente.

Tendremos además:

$$I = \frac{1}{12} A \cdot B^3$$

$$s = R \Delta \alpha$$

En cuanto a otros elementos del arco, los deducimos de la figura siguiente:



$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - 2\beta$$

$$\beta = \arctg \frac{2CD}{AB}$$

$$\gamma = \pi - 2\alpha_0$$

Con las relaciones que aparecen en el apartado 3.5 y en éste, se ha elaborado el programa para cálculo electrónico que damos a continuación, en el cual, para su mejor comprensión, advertiremos el significado de los siguientes términos:

$E$  = módulo de elasticidad.

UMU = coeficiente de Poisson.

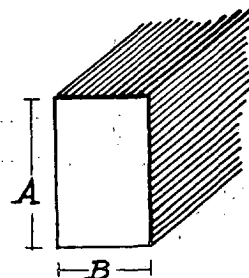
GAMA = peso específico.

AB = luz del arco.

CD = flecha del arco.

$A$  = canto de la sección.

$B$  = ancho de la sección.



DELFA = número de dovelas en que se ha dividido el arco.

FIO = ángulo  $\varphi_0$ .

CITAO = ángulo  $\theta_0$ .

Finalmente advertiremos que si anulamos el ángulo inicial  $\theta_0$ , de los sistemas 4, 5 y 6 de 3.5, deduciremos:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = \eta^0_1 \varphi_0 \text{ (proporcional a } \varphi_0)$$

Además haremos:

$$z_1' = \frac{1}{2} (z_0 + z_1) \text{ (proporcional a } \varphi_0)$$

Y para el siguiente:

$$z_2 = \eta^0_2 \varphi_0 + \delta^1_2 \Delta \theta_1 + \eta^1_2 \Delta \varphi_1$$

siendo:

$$\Delta \theta_1 = \frac{(M_t)_1}{C} \Delta s$$

$$\Delta \varphi_1 = \frac{(M_f)_1}{EI} \Delta s$$

Y además:

$$(M_t)_1 = * (M_t)^0_1 + ** (M_t)^0_1 + (M_t)^1_1$$

Según las relaciones 7 de 3.5, y puesto que  $z_1$  y  $z_1'$  han resultado proporcionales a  $\varphi_0$ , resultará que en el segundo miembro de la última expresión los tres sumando son proporcionales

```

DIMENSION X(3000),Y(3000),Z(3000)
PI=3.1415927
1 READ(5,30)E,UMU,GAMA,AB,CD,A,B
2 READ(5,30)DELFA,FIO,CITAO
WRITE(6,32)DELFA,FIO,CITAO,A,B
ALFAO=PI/2.-2.*ATAN(2.*CD/AB)
R=AB/(2.*COS(ALFAO))
DELAL=(PI-2.*ALFAO)/DELFA
DELSE=R*DELAL
P=GAMA*A*B*DELSE
A1=A*B*B/12.
C=4.*A1*E/(2.*(1.+UMU))
V=GAMA*A*B*R*(PI-2.*ALFAO)/2.
IDELF=DELFA+1.
DO 3 I=1,IDELEF
A11=I-1
ALF=ALFAO+A11*DELAL
X(I)=R*(COS(ALFAO)-COS(ALF))
3 Y(I)=R*(SIN(ALF)-SIN(ALFAO))
S1=(V*X(I)-P*DELSE*X(I))*Y(I)
S2=Y(I)*Y(I)
DO 5 I=2,IDELEF
S=X(I)
I1=I-1
DO 4 J=1,I1
S=S+(X(I1)-(X(J)+X(J+1))/2.)
AN=V*X(I1)-P*DELSE*S
S1=S1+AN*Y(I1)
5 S2=S2+Y(I1)*Y(I1)
H=S1/S2
DO 6 I=1,IDELEF
6 Z(I)=.0
ALF=ALFAO+DELAL
Z(2)=R*(1.-COS(ALF-ALFAO))*CITAO+R*SIN(ALF-ALFAO)*FIO
DO 9 I=3,IDELEF
ALF=ALF+DELAL
S11=.0
S22=.0
I1=I-1
DO 8 J=2,I1
AJ=J-1
ALFJ=ALFAO+AJ*DELAL
ANI=P*DELSE*COS(ALFJ)
FI=P*DELSE*SIN(ALFJ)
ANFI1=V*COS(ALFJ)*Z(J)
ANFI2=H*SIN(ALFJ)*Z(J)
ANTI1=-V*SIN(ALFJ)*Z(J)
ANTI2=H*COS(ALFJ)*Z(J)
S=.0
SS=.0
J1=J-1
DO 7 K=1,J1
S=S+ANI*(-(Z(J)-(Z(K)+Z(K+1))/2.))
7 SS=SS+FI*(Z(J)-(Z(K)+Z(K+1))/2.)
ANFI=ANFI1+ANFI2+S
ANTI=ANTI1+ANTI2+SS
DELFI=ANFI*DELSE/(E*A1)
DELCI=ANTI*DELSE/C
S11=S11+DELFI*R*(1.-COS(ALF-ALFJ))
S22=S22+DELFI*R*SIN(ALF-ALFJ)
8 S33=R*(1.-COS(ALF-ALFAO))*CITAO+R*SIN(ALF-ALFAO)*FIO
9 Z(I)=S33-S11-S22
DO 10 I=1,IDELEF
10 WRITE(6,31)X(I),Y(I),Z(I)
31 FORMAT(7F10.5)
32 FORMAT(3E20.7)
32 FORMAT(1H1,10HDOVELAS = ,F4.0/1X,6HFIO = ,F7.3,7HCITAO = ,F7.3,4X;3
*HA. = ,F5.2,4X,3HB = ,F5.2//)
GO TO 2
END

```

2  
3  
4  
5  
6  
  
11 12  
15 16  
  
45 46  
  
53  
54  
55  
57  
59  
61  
  
74  
76  
78  
  
87

a  $\varphi_0$ , o sea,  $(M_t)_1$  es proporcional a  $\varphi_0$ . A la misma conclusión podemos llegar con respecto a  $(M_f)_1$ , y por lo tanto podremos establecer que:

$$z_2 \text{ es proporcional a } \varphi_0$$

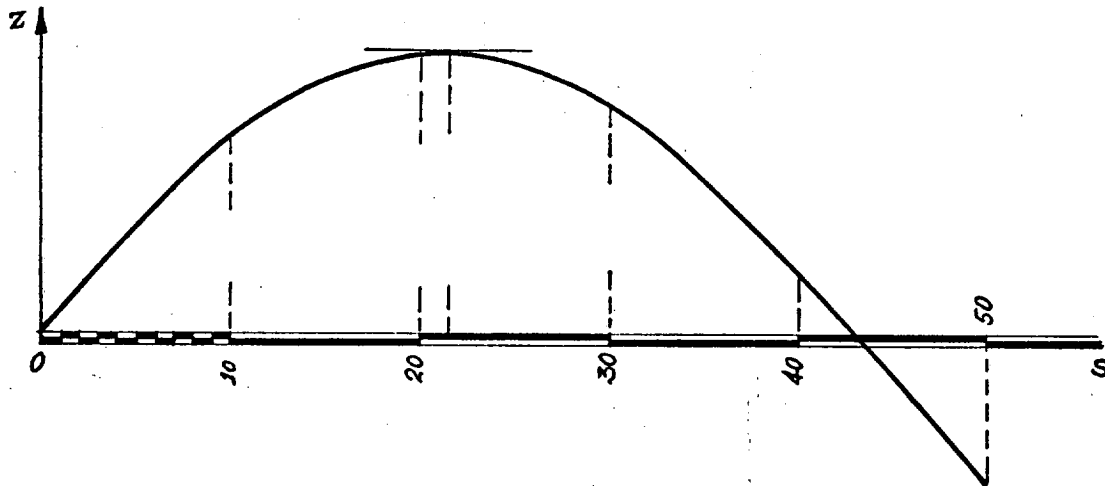
De la misma manera podremos ver que los siguientes valores de  $z_i$  son, asimismo, proporcionales a  $\varphi_0$ .

Análogamente, anulando  $\varphi_0$  y tomando  $\theta_0 \neq 0$ , los valores de  $z_i$  serán proporcionales a  $\theta_0$ .

Esto nos permite estudiar cualquier caso de pandeo sin más que adoptar un solo valor para  $\varphi_0$  y otro para  $\theta_0$ . Si estos valores son  $\alpha$  y  $\beta$ , bastará hacer las hipótesis:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \varphi_0 = \alpha \\ \quad \theta_0 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2) \quad \varphi_0 = 0 \\ \quad \theta_0 = \beta \end{array}$$

En los cálculos que a continuación exponemos, comprobaremos que tomando ( $\varphi_0 = \alpha$ ,  $\theta_0 = \beta$ ), los valores resultantes son la suma de los correspondientes a las hipótesis 1 y 2 arriba citadas.



3.7. A continuación exponemos los resultados de una serie de cálculos. Con estos resultados y con las ideas expuestas hasta aquí, estaremos en condiciones de interpretar satisfactoriamente el fenómeno del pandeo lateral de los arcos.

3.7.1. En una primera serie de cálculos se adoptó un ancho  $B = 0,50$  m y unos ángulos iniciales  $\varphi_0 = 10^\circ$  y  $\theta_0 = 0^\circ$ . Se tantearon los valo-

res de 150, 300 y 350 dovelas como número de partes en que se dividía el arco, con el objeto de averiguar el número de ellas necesario para obtener una aproximación suficiente.

Los resultados aparecen en el diagrama número 1, cuyo sentido vamos a aclarar:

Dividiendo el arco en 50 partes iguales, podremos representar la variación de  $z_i$  en un diagrama cartesiano en el que las abscisas representen la longitud del arco y las ordenadas el valor de  $z_i$ . Esto da lugar a curvas con aspecto semejante al de la presente figura.

De estas curvas obtendremos los siguientes datos a considerar:

- El valor máximo alcanzado.
- La situación del punto correspondiente a dicho valor.
- Situación del punto correspondiente al valor nulo de  $z_i$ .
- Valor final.

En el diagrama número 1 se representa la variación de estos datos según el número de dovelas adoptado para el cálculo. En él se puede

apreciar la convergencia, al aumentar el número de dovelas, de los valores citados. Estimamos que la aproximación es suficiente para 350 dovelas.

3.7.2. En una segunda serie de cálculos se trató de conseguir un ancho  $B$  tal que el valor final fuera nulo, o se aproximara mucho a un valor nulo. Se tantearon los valores  $B = 0,50$  m,  $B = 0,70$  m y  $B = 0,80$  m. Los resultados se reflejan en el diagrama número 3. En el diagrama

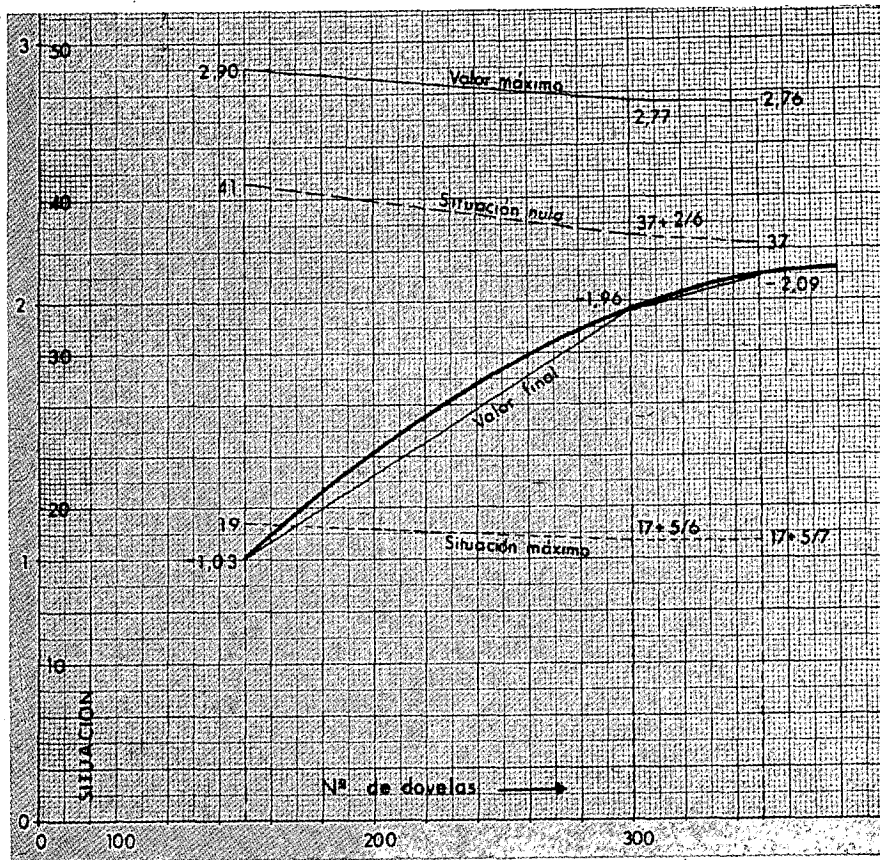


Diagrama 1.  
 $\phi = 10^\circ$ ;  
 $\theta = 0^\circ$ ;  
 $B = 0.50$  m.

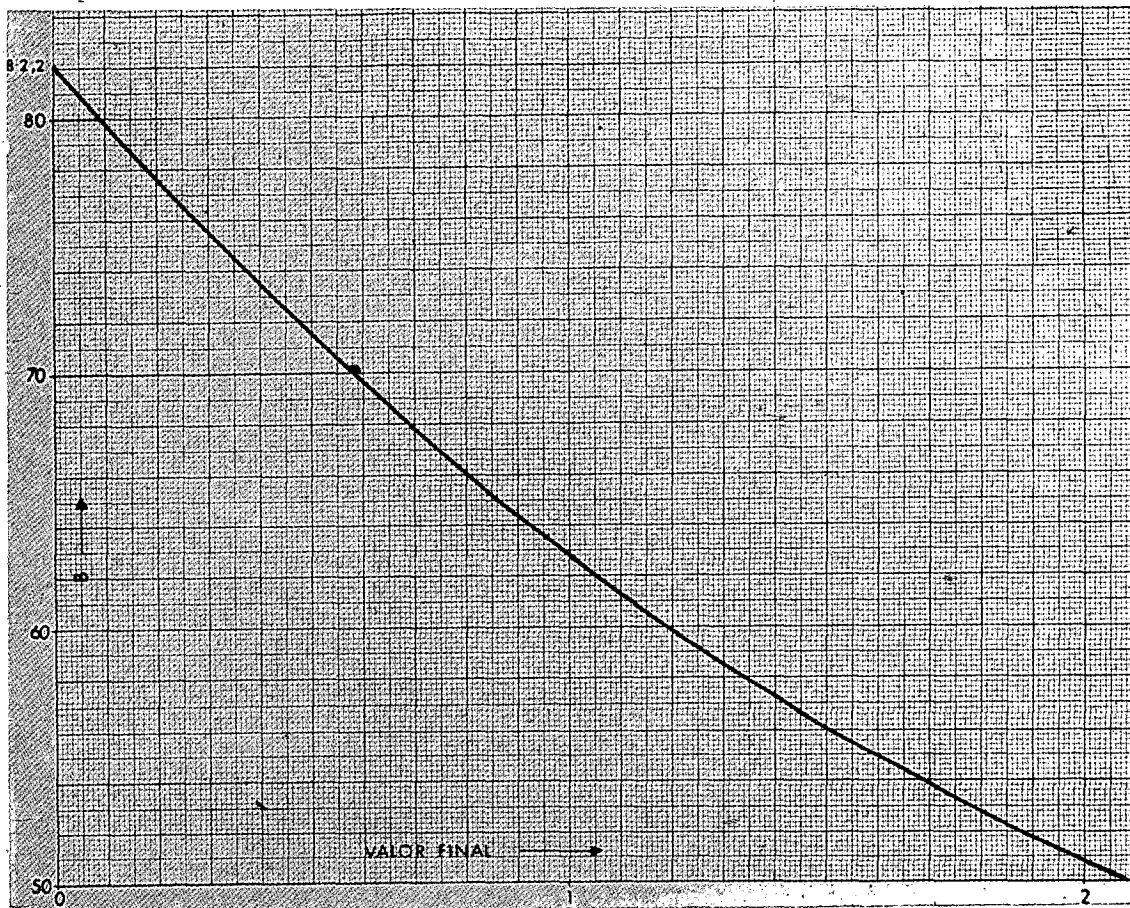


Diagrama 2.  
 $\phi = 10^\circ$ ;  
 $\theta = 0^\circ$ ;

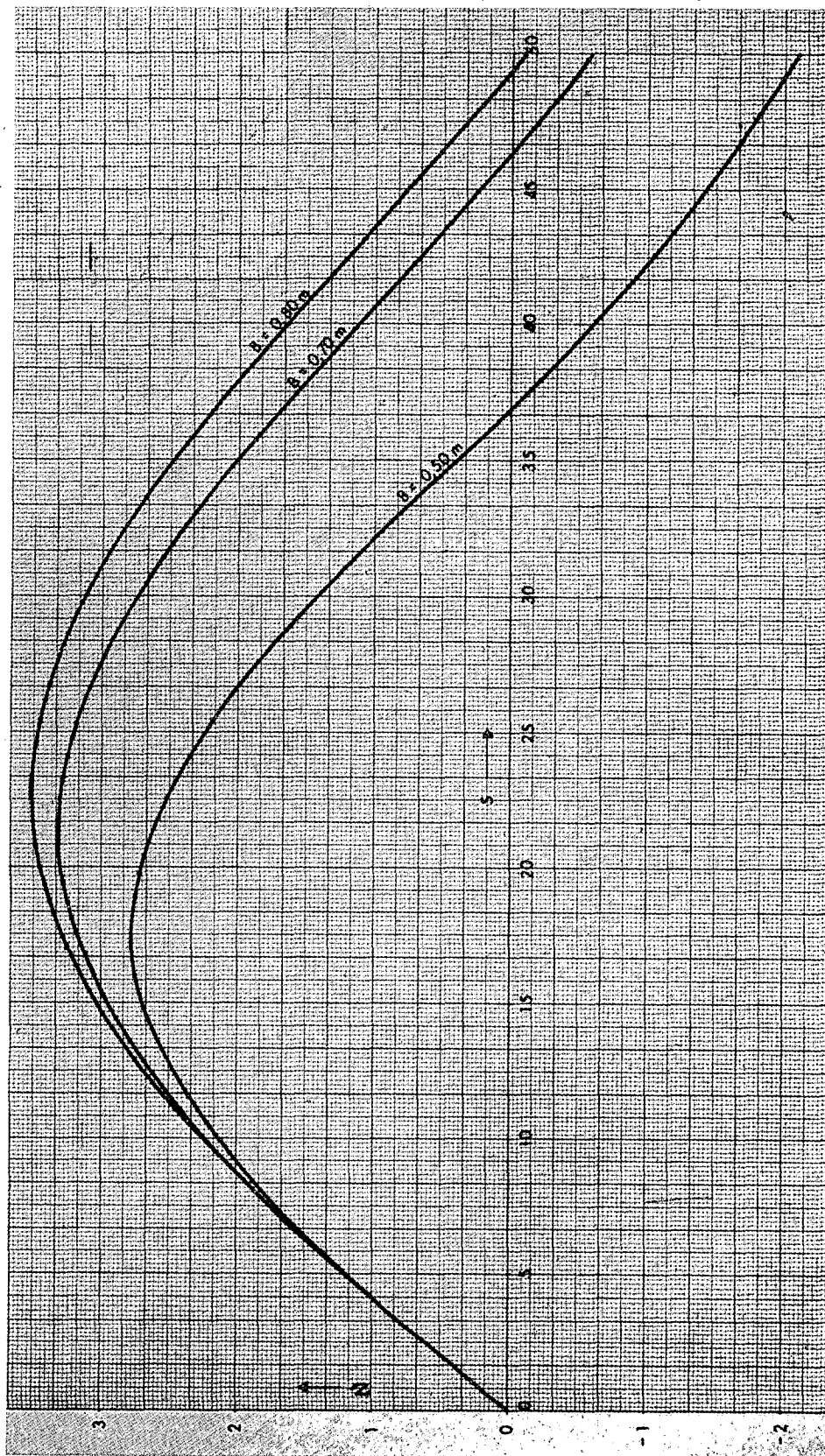


Diagrama 3. —  $\varphi = 10^\circ$ ;  $\theta = 0^\circ$ ; núm. de dovelas: 350.

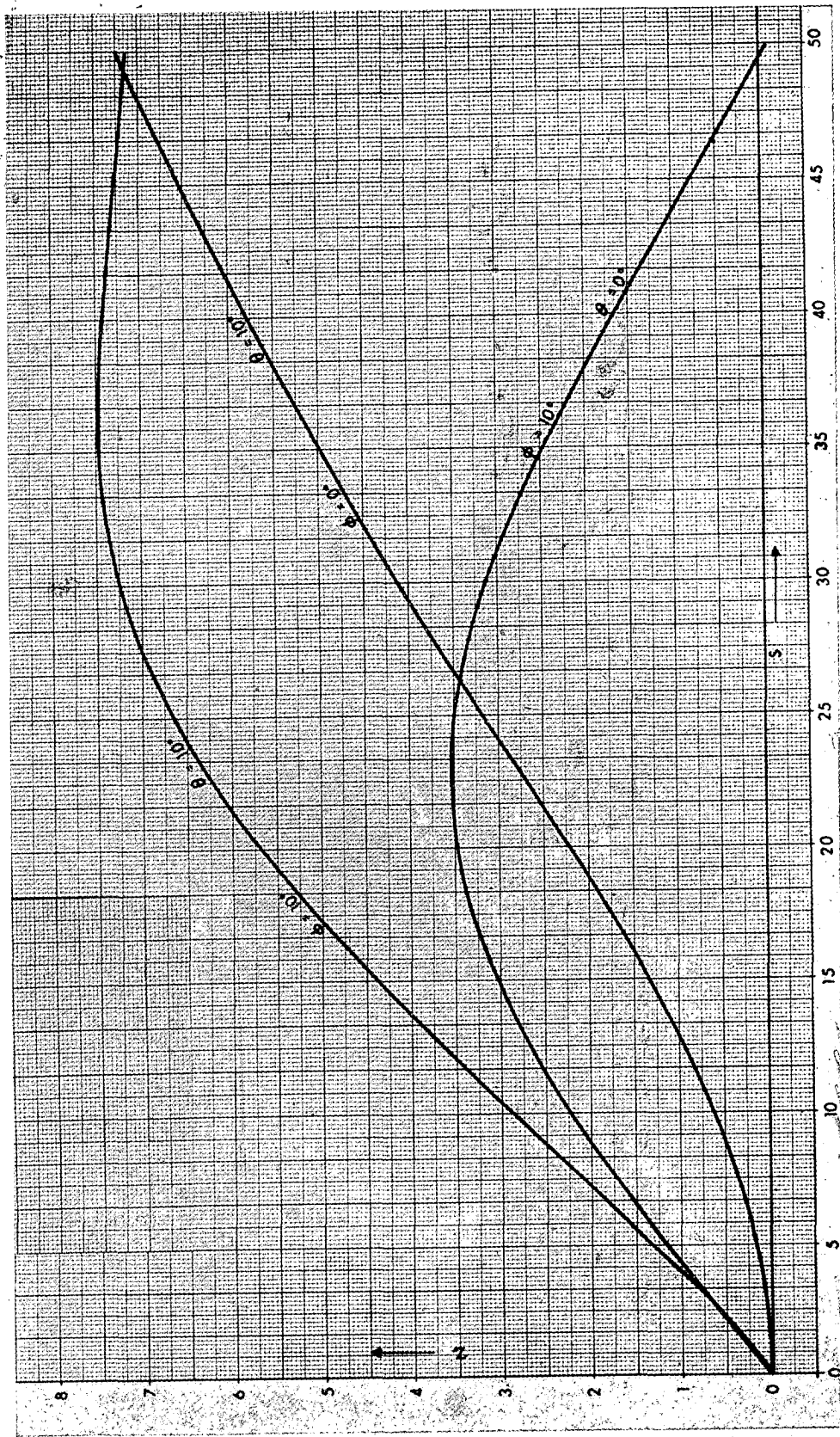


Diagrama 4.—  $B = 0,80$  m; núm. de dovelas: 350.

número 2 se ha representado una curva que nos da la variación del valor final en función del ancho  $B$ . Por extrapolación de la misma podemos considerar que se obtiene un valor final nulo para  $B = 0,82$  m.

Llegando a este resultado, podremos razonar como lo hacíamos en el caso de la pieza recta (suponiendo, de momento, que inicialmente es  $\theta_0 = 0$ ).

Análogamente a lo que entonces decíamos, si el valor final obtenido es positivo, sólo podremos conseguir que se anule partiendo de una deformación inicial  $\varphi_0 = 0$ , lo que nos llevaría a valores nulos de  $z_i$ , es decir, a la estabilidad elástica del arco. Por el contrario, si el valor final es nulo, lo será también para cualquier valor de  $\varphi_0$ , incidiendo en el caso crítico de inestabilidad elástica. Para valores finales negativos, se habrán rebasado las condiciones críticas de estabilidad elástica.

Este último ha sido el caso de los valo-

res tanteados ( $B = 0,50$  m,  $B = 0,70$  m y  $B = 0,80$  m). Para  $B = 0,82$  m las condiciones serían críticas y para mayores valores de  $B$  el arco sería estable elásticamente.

3.7.3. Queda ahora la cuestión de considerar deformaciones iniciales tales que  $\theta_0 \neq 0$ . Se tantearon los dos casos siguientes, con 35 dovelas y  $B = 0,80$  m y con valores:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0 = 0^\circ \\ \theta_0 = 10^\circ \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{l} \varphi_0 = 10^\circ \\ \theta_0 = 10^\circ \end{array} \right\}$$

Este último debería ser la suma del primero y del que ya hemos citado con:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0 = 10^\circ \\ \theta_0 = 0^\circ \end{array} \right\}$$

Esto fue, en efecto, lo que sucedió y lo citamos a modo de comprobación. Un resumen de los resultados aparece en el cuadro siguiente:

| Punto del arco   | 5    | 10   | 15   | 20   | 25   | 30   | 35   | 40   | 45   | 50   |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Valores para $\varphi_0 = 10^\circ, \theta_0 = 0^\circ$  | 1,19 | 2,24 | 3,02 | 3,44 | 3,46 | 3,11 | 2,47 | 1,65 | 0,76 | -0,9 |
| Valores para $\varphi_0 = 0^\circ, \theta_0 = 10^\circ$  | 0,16 | 0,63 | 1,34 | 2,22 | 3,17 | 4,11 | 4,98 | 5,77 | 6,50 | 7,23 |
| Valores para $\varphi_0 = 10^\circ, \theta_0 = 10^\circ$ | 1,35 | 2,87 | 4,36 | 5,66 | 6,63 | 7,22 | 7,45 | 7,42 | 7,26 | 7,14 |

Puede comprobarse que los valores de la última fila son la suma de los de las anteriores.

En el diagrama número 4 aparecen representados gráficamente los resultados correspondientes a los casos del cuadro.

Examinado el caso  $\varphi_0 = 0, \theta_0 = 10^\circ$ , vemos que nos hallamos muy lejos de las condiciones críticas de pandeo. Esto es natural, teniendo en cuenta que la rigidez del arco a efecto de giros sobre tangentes a su directriz es mucho mayor que a efectos de flexiones laterales.

Se puede extraer de este hecho la siguiente conclusión:

En un arco como el considerado, al adoptar un ancho  $B = 0,82$ , la única manera de conseguir que en el extremo final el valor de  $z$  sea nulo es que la deformación inicial  $\theta_0$  sea nula, pudiendo adoptarse cualquier valor para la de-

formación inicial  $\varphi_0$ , resultando de todas formas indeterminados los valores de  $z_i$ , es decir, resultando la pieza elásticamente inestable. Podríamos decir que la deformación inicial  $\varphi_0$  es determinante a efectos de pandeo lateral.

En un arco diferente podría resultar determinante la condición inicial  $\theta_0$ . Siempre será el cálculo quien nos aclare esta cuestión.

Y con cuanto se ha expuesto, queda resuelta la cuestión del pandeo lateral de los arcos, enfocada desde el punto de vista del cálculo numérico.

El programa original fue elaborado por don Francisco Javier Bilbao, del Instituto L. J. de Torrónegui, Bilbao, donde se hicieron cálculos preliminares. Al disponer este Centro de un ordenador de poca potencia, se recurrió a los servicios del ordenador de Iberduero, S. A., en Bil-

bao, bajo la dirección de D. Jaime Echegarria.

Posteriormente se apreció que el tiempo requerido para los cálculos no permitía un estudio completo con dicho ordenador, por lo que se decidió recurrir al Centro de Cálculo Electrónico de la Universidad de Madrid.

Tanto el Instituto L. J. de Torrónategui como Iberduero, S. A. se brindaron a hacer los cálculos gratuitamente y dieron las máximas facilidades. El autor agradece desde aquí esta desinteresada y valiosa colaboración.

El acceso al ordenador del Centro de Cálculo Electrónico de la Universidad de Madrid fue facilitado por D. Alberto Dou, S. J., catedrático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos y de la Facultad de Ciencias de Madrid, quien al mismo tiempo apoyó decididamente la iniciativa. En dicho Centro se contó con la eficaz colaboración de D. Florentino Briones, Director del mismo, de la señorita M.<sup>a</sup> Teresa Molina, Licenciada en Ciencias Físicas, y de D. Pedro Montilla, alumno de la E.T.S. de Ingenieros Agrónomos. A todos ellos, también, manifiesto mi reconocimiento.

#### Comentarios finales.

1. Si se presenta una articulación intermedia (a efectos longitudinales), que podemos suponer de tipo cilíndrico, el contacto de ambas caras se hará según una generatriz, supuesto el arco sin carga. Al considerar este cargado, la generatriz se transforma en una franja de contacto, ya que de no ser así se darían tensiones de valor infinito.

Sin embargo, en la sección correspondiente a dicho contacto se dará una discontinuidad en la inercia y en el módulo de torsión, si bien la articulación absorberá momentos flectores laterales y momentos torsores con ángulos cuyo valor no coincidirá con el que por continuidad les correspondería si no existiese la articulación.

Ahora bien, según hemos visto, el corrimiento final, decisivo para juzgar la estabilidad elástica del arco, procede de la suma —en el límite integral— de una serie de giros anteriores, por lo cual si prescindimos del correspondiente a la sección de la articulación, o le damos el que le correspondería por continuidad, no variaremos los resultados. O, lo que es equivalente, puede tomarse la inercia y el módulo de torsión de una sección próxima.

2. El método expuesto puede aplicarse al estudio del pandeo por flexión y por torsión de barras rectas.

\* \* \*

A continuación damos los resultados del cálculo electrónico correspondientes al caso:

$$B = 0,80 \text{ m.}$$

$$350 \text{ dovelas.}$$

$$\varphi_0 = 10^\circ.$$

$$\theta_0 = 0.$$

Las tres columnas representan, respectivamente, los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dando a estas ordenadas el sentido que puede verse en la figura del apartado 3.2.



|               |               |                  |               |               |                  |               |                 |                    |
|---------------|---------------|------------------|---------------|---------------|------------------|---------------|-----------------|--------------------|
| 0.2815363E 02 | 0.1980520E 02 | 0.3340925E 01    | 0.4014501E 02 | 0.1504549E 02 | 0.2203859E 01    | 0.4829737E 02 | 0.5046137E 01   | 0.5624207E 00      |
| 0.2834963E 02 | 0.1978013E 02 | 0.3331143E 01    | 0.4030395E 02 | 0.1492809E 02 | 0.2180828E 01    | 0.4837896E 02 | 0.4866168E 01   | 0.5374155E 00      |
| 0.2854544E 02 | 0.1975354E 02 | 0.3321082E 01    | 0.4046199E 02 | 0.1480947E 02 | 0.2157686E 01 37 | 0.4845917E 02 | 0.4685575E 01   | 0.5124546E 00      |
| 0.2874103E 02 | 0.1972545E 02 | 0.3310745E 01    | 0.4061910E 02 | 0.1468963E 02 | 0.2134434E 01    | 0.4853798E 02 | 0.4504369E 01   | 0.4875393E 00      |
| 0.2893641E 02 | 0.1969585E 02 | 0.3300135E 01    | 0.4077529E 02 | 0.1456858E 02 | 0.2111076E 01    | 0.4861539E 02 | 0.4322561E 01   | 0.4626718E 00      |
| 0.2913154E 02 | 0.1966474E 02 | 0.3289253E 01 28 | 0.4093054E 02 | 0.1444633E 02 | 0.2087614E 01    | 0.4869140E 02 | 0.4140161E 01   | 0.4378534E 00      |
| 0.2932644E 02 | 0.1963213E 02 | 0.3278101E 01    | 0.4108484E 02 | 0.1432289E 02 | 0.2064050E 01    | 0.4876599E 02 | 0.3957180E 01   | 0.4130858E 00 47   |
| 0.2952107E 02 | 0.1959802E 02 | 0.3266681E 01    | 0.4123819E 02 | 0.1419827E 02 | 0.2040389E 01    | 0.4883918E 02 | 0.3773630E 01   | 0.3883709E 00      |
| 0.2971544E 02 | 0.1956240E 02 | 0.3254995E 01    | 0.4139057E 02 | 0.1407246E 02 | 0.2016631E 01    | 0.4891094E 02 | 0.3589520E 01   | 0.3637104E 00      |
| 0.2990952E 02 | 0.1952529E 02 | 0.3243046E 01    | 0.4154197E 02 | 0.1394548E 02 | 0.1992781E 01 38 | 0.4898129E 02 | 0.3404863E 01   | 0.3391060E 00      |
| 0.3010332E 02 | 0.1948668E 02 | 0.3230835E 01    | 0.4169239E 02 | 0.1381734E 02 | 0.1968840E 01    | 0.4905021E 02 | 0.3219669E 01   | 0.3145593E 00      |
| 0.3029681E 02 | 0.1944659E 02 | 0.3218364E 01    | 0.4184182E 02 | 0.1368804E 02 | 0.1944812E 01    | 0.4911769E 02 | 0.3033949E 01   | 0.2900720E 00      |
| 0.3048999E 02 | 0.1940499E 02 | 0.3205637E 01 29 | 0.4199025E 02 | 0.1355760E 02 | 0.1920698E 01    | 0.4918375E 02 | 0.2847714E 01   | 0.2656456E 00      |
| 0.3068283E 02 | 0.1936192E 02 | 0.3192654E 01    | 0.4213766E 02 | 0.1342601E 02 | 0.1896502E 01    | 0.4924837E 02 | 0.2660976E 01   | 0.2412814E 00 48   |
| 0.3087535E 02 | 0.1931735E 02 | 0.3179418E 01    | 0.4228406E 02 | 0.1329329E 02 | 0.1872227E 01    | 0.4931154E 02 | 0.2473744E 01   | 0.2169813E 00      |
| 0.3106751E 02 | 0.1927130E 02 | 0.3165932E 01    | 0.4242943E 02 | 0.1315945E 02 | 0.1847875E 01    | 0.4937327E 02 | 0.2286031E 01   | 0.1927471E 00      |
| 0.3125931E 02 | 0.1922377E 02 | 0.3152198E 01    | 0.4257376E 02 | 0.1302449E 02 | 0.1823449E 01 39 | 0.4943355E 02 | 0.2097847E 01   | 0.1685795E 00      |
| 0.3145074E 02 | 0.1917477E 02 | 0.3138217E 01    | 0.4271705E 02 | 0.1288842E 02 | 0.1798950E 01    | 0.4949237E 02 | 0.1909204E 01   | 0.1444807E 00      |
| 0.3164178E 02 | 0.1912429E 02 | 0.3123993E 01    | 0.4285929E 02 | 0.1275125E 02 | 0.1774384E 01    | 0.4954974E 02 | 0.1720114E 01   | 0.1204519E 00      |
| 0.3183243E 02 | 0.1907234E 02 | 0.3109527E 01 30 | 0.4300046E 02 | 0.1261298E 02 | 0.1749750E 01    | 0.4960565E 02 | 0.1530586E 01   | 0.9649456E -01     |
| 0.3202268E 02 | 0.1901891E 02 | 0.3094822E 01    | 0.4314056E 02 | 0.1247363E 02 | 0.1725053E 01    | 0.4966010E 02 | 0.1340633E 01   | 0.7260975E -01 49  |
| 0.3221250E 02 | 0.1896403E 02 | 0.3079880E 01    | 0.4327959E 02 | 0.1233321E 02 | 0.1700294E 01    | 0.4971308E 02 | 0.1150265E 01   | 0.4879957E -01     |
| 0.3240190E 02 | 0.1890768E 02 | 0.3064704E 01    | 0.4341752E 02 | 0.1219172E 02 | 0.1675477E 01    | 0.4976459E 02 | 0.9594953E 00   | 0.2506512E -01     |
| 0.3259086E 02 | 0.1884987E 02 | 0.3049297E 01    | 0.4355436E 02 | 0.1204917E 02 | 0.1650605E 01 50 | 0.4981463E 02 | 0.7683338E 00   | 0.1407892E -02     |
| 0.3277937E 02 | 0.1879061E 02 | 0.3033659E 01    | 0.4369010E 02 | 0.1190556E 02 | 0.1625678E 01    | 0.4986319E 02 | 0.5767921E 00   | -0.2217120E -01    |
| 0.3296741E 02 | 0.1872990E 02 | 0.3017795E 01    | 0.4382473E 02 | 0.1176092E 02 | 0.1600701E 01    | 0.4991028E 02 | 0.3848814E 00   | -0.4567057E -01    |
| 0.3315498E 02 | 0.1866773E 02 | 0.3001706E 01 31 | 0.4395824E 02 | 0.1161524E 02 | 0.1575675E 01    | 0.4995588E 02 | 0.1926135E 00   | -0.6908894E -01    |
| 0.3334206E 02 | 0.1860413E 02 | 0.2985395E 01    | 0.4409062E 02 | 0.1146853E 02 | 0.1550604E 01    | 0.5000000E 02 | -0.3341120E -06 | -0.9242487E -01 51 |
| 0.3352865E 02 | 0.1853908E 02 | 0.2968864E 01    | 0.4422186E 02 | 0.1132081E 02 | 0.1525489E 01    | \$185000      |                 |                    |
| 0.3371473E 02 | 0.1847259E 02 | 0.2952116E 01    | 0.4435196E 02 | 0.1117209E 02 | 0.1500334E 01    |               |                 |                    |
| 0.3390030E 02 | 0.1840467E 02 | 0.2935154E 01    | 0.4448091E 02 | 0.1102236E 02 | 0.1475140E 01 41 |               |                 |                    |
| 0.3408533E 02 | 0.1833533E 02 | 0.2917980E 01    | 0.4460871E 02 | 0.1087164E 02 | 0.1449911E 01    |               |                 |                    |
| 0.3426903E 02 | 0.1826456E 02 | 0.2900596E 01    | 0.4473533E 02 | 0.1071994E 02 | 0.1424648E 01    |               |                 |                    |
| 0.3445377E 02 | 0.1819236E 02 | 0.2883005E 01 22 | 0.4486079E 02 | 0.1056727E 02 | 0.1399355E 01    |               |                 |                    |
| 0.3463715E 02 | 0.1811876E 02 | 0.2865210E 01    | 0.4498506E 02 | 0.1041364E 02 | 0.1374033E 01    |               |                 |                    |
| 0.3481996E 02 | 0.1804374E 02 | 0.2847213E 01    | 0.4510814E 02 | 0.1025909E 02 | 0.1348685E 01    |               |                 |                    |
| 0.3500218E 02 | 0.1796731E 02 | 0.2829017E 01    | 0.4523003E 02 | 0.1010352E 02 | 0.1323313E 01    |               |                 |                    |
| 0.3518381E 02 | 0.1788948E 02 | 0.2810625E 01    | 0.4535072E 02 | 0.9947055E 01 | 0.1297920E 01 42 |               |                 |                    |
| 0.3536483E 02 | 0.1781025E 02 | 0.2792039E 01    | 0.4547019E 02 | 0.9789663E 01 | 0.1272509E 01    |               |                 |                    |
| 0.3554524E 02 | 0.1772962E 02 | 0.2773261E 01    | 0.4558845E 02 | 0.9631354E 01 | 0.1247081E 01    |               |                 |                    |
| 0.3572502E 02 | 0.1764761E 02 | 0.2754295E 01 33 | 0.4570548E 02 | 0.9472137E 01 | 0.1221638E 01    |               |                 |                    |
| 0.3590416E 02 | 0.1756422E 02 | 0.2735143E 01    | 0.4582128E 02 | 0.9312024E 01 | 0.1196184E 01    |               |                 |                    |
| 0.3608265E 02 | 0.1747944E 02 | 0.2715806E 01    | 0.4593585E 02 | 0.9151021E 01 | 0.1170720E 01    |               |                 |                    |
| 0.3626049E 02 | 0.1739330E 02 | 0.2696292E 01    | 0.4604917E 02 | 0.8989140E 01 | 0.1145249E 01    |               |                 |                    |
| 0.3643765E 02 | 0.1730578E 02 | 0.2676599E 01    | 0.4616124E 02 | 0.8826390E 01 | 0.1119774E 01 43 |               |                 |                    |
| 0.3661414E 02 | 0.1721690E 02 | 0.2656730E 01    | 0.4627204E 02 | 0.8662781E 01 | 0.1094295E 01    |               |                 |                    |
| 0.3678993E 02 | 0.1712666E 02 | 0.2636688E 01    | 0.4638159E 02 | 0.8498322E 01 | 0.1068816E 01    |               |                 |                    |
| 0.3696503E 02 | 0.1703507E 02 | 0.2616478E 01 34 | 0.4648986E 02 | 0.8333024E 01 | 0.1043339E 01    |               |                 |                    |
| 0.3713941E 02 | 0.1694213E 02 | 0.2596100E 01    | 0.4659686E 02 | 0.8166895E 01 | 0.1017866E 01    |               |                 |                    |
| 0.3731307E 02 | 0.1684785E 02 | 0.2575557E 01    | 0.4670257E 02 | 0.7999946E 01 | 0.9923981E 00    |               |                 |                    |
| 0.3748600E 02 | 0.1675223E 02 | 0.2554853E 01    | 0.4680699E 02 | 0.7832187E 01 | 0.9669393E 00    |               |                 |                    |
| 0.3765818E 02 | 0.1665528E 02 | 0.2533991E 01    | 0.4691011E 02 | 0.7663628E 01 | 0.9414909E 00 44 |               |                 |                    |
| 0.3782961E 02 | 0.1655701E 02 | 0.2512972E 01    | 0.4701193E 02 | 0.7494278E 01 | 0.9160552E 00    |               |                 |                    |
| 0.3800028E 02 | 0.1645742E 02 | 0.2491800E 01    | 0.4711244E 02 | 0.7324149E 01 | 0.8906341E 00    |               |                 |                    |
| 0.3817018E 02 | 0.1635651E 02 | 0.2470477E 01 35 | 0.4721164E 02 | 0.7153250E 01 | 0.8652296E 00    |               |                 |                    |
| 0.3833929E 02 | 0.1625430E 02 | 0.2449007E 01    | 0.4730952E 02 | 0.6981590E 01 | 0.8398443E 00    |               |                 |                    |
| 0.3850761E 02 | 0.1615079E 02 | 0.2427391E 01    | 0.4740606E 02 | 0.6809181E 01 | 0.8144794E 00    |               |                 |                    |
| 0.3867513E 02 | 0.1604598E 02 | 0.2405633E 01    | 0.4750128E 02 | 0.6636032E 01 | 0.7891379E 00    |               |                 |                    |
| 0.3884183E 02 | 0.1593988E 02 | 0.2383735E 01    | 0.4759516E 02 | 0.6462155E 01 | 0.7638212E 00 45 |               |                 |                    |
| 0.3900771E 02 | 0.1583250E 02 | 0.2361701E 01    | 0.4768769E 02 | 0.6287559E 01 | 0.7385314E 00    |               |                 |                    |
| 0.3917276E 02 | 0.1572385E 02 | 0.2339532E 01    | 0.4777888E 02 | 0.6112254E 01 | 0.7132704E 00    |               |                 |                    |
| 0.3933697E 02 | 0.1561393E 02 | 0.2317232E 01 36 | 0.4786871E 02 | 0.5936252E 01 | 0.6880405E 00    |               |                 |                    |
| 0.3950032E 02 | 0.1550274E 02 | 0.2294803E 01    | 0.4795718E 02 | 0.5759562E 01 | 0.6628433E 00    |               |                 |                    |
| 0.3966281E 02 | 0.1539029E 02 | 0.2272249E 01    | 0.4804429E 02 | 0.5582195E 01 | 0.6376810E 00    |               |                 |                    |
| 0.3982443E 02 | 0.1527660E 02 | 0.2249572E 01    | 0.4813003E 02 | 0.5404161E 01 | 0.6125551E 00    |               |                 |                    |
| 0.3998516E 02 | 0.1516166E 02 | 0.2226774E 01    | 0.4821439E 02 | 0.5225472E 01 | 0.5874675E 00 46 |               |                 |                    |