

EL CALCULO ELECTRONICO DE ESTRUCTURAS PLANAS POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (I) (*)

Por JOSE MIGUEL SAN MIGUEL ROMERO
Ingeniero de Caminos, AUXINI-Construcción.

ANDRES CANCER
Ingeniero Industrial, I.B.M.

El Massachusetts Institute of Technology ha programado, en estrecha colaboración con IBM y otras empresas y departamentos, el método de los elementos finitos en un programa que lleva el nombre genérico de STRUDL.

El método, como se sabe, ha sido sistematizado por O. C. Zienkiewicz, basándose en una serie de principios que permiten la construcción de un modelo equivalente a la realidad por medio de la división del medio continuo en un conjunto de elementos geométricos sencillos y el establecimiento entre ellos de ciertas relaciones que se traducen en sistemas de ecuaciones matriciales; el tratamiento de éstas conduce a la obtención de desplazamientos de los vértices de cada elemento y, de aquí, según ciertas hipótesis, a la obtención de las deformaciones y, por tanto, del estado tensional.

La complejidad del planteamiento, así como el número considerable de elementos que se necesitan para reproducir cualquier estructura, por sencilla que sea, exige un gran volumen de cálculo; pero, por otra parte, la sencillez de las expresiones matemáticas, así como la sistematización del proceso, hacen de este método un campo excelente para su tratamiento con auxilio de un computador electrónico.

Sin embargo, como sucede siempre en los programas de este tipo, la obtención de una solución muy general, que se pueda utilizar, con la flexibilidad necesaria, en el gran conjunto de casos que usualmente se presenta, conduce, naturalmente, a datos de entrada minuciosos y de gran exigencia en cuanto a su calidad.

La experiencia desarrollada en Estudios Hidráulicos de AUXINI-Construcción en casos análogos a éste ha aconsejado una serie de programas que tienen por objeto la preparación de datos.

En este trabajo se describen los diferentes programas empleados en la preparación de datos. En un artículo próximo se incluirán los resultados obtenidos en la aplicación de estos programas al cálculo elástico de presas.

Introducción.

Aun cuando el método de los elementos finitos no se limita a las estructuras planas, sino que, por el contrario, tiene un campo de aplicación especialmente indicado en las estructuras espaciales, se ha realizado el estudio que se presenta sobre estructuras planas por varias razones.

La primera de estas razones es que el programa STRUDL dispone de numerosos y muy especializados elementos tipo para las estructuras planas; en segundo lugar, que el número de elementos necesario para el cálculo es considerablemente menor en una estructura plana y, por tanto, es muy viable en un estudio experimental por su bajo coste; en tercer lugar la conveniencia de disponer de un contraste para verificar el estudio; este contraste se pondrá de manifiesto

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la redacción de esta Revista hasta el 28 de febrero de 1972.

en el artículo anunciado que corresponde al cálculo elástico de presas.

Estructura plana.

Es sobradamente conocida la definición de este tipo de estructuras para que sea necesario repetir aquí una definición precisa de ellas.

Sin embargo, conviene hacer diversas puntualizaciones; en primer lugar, cuando decimos estructura plana nos referimos indistintamente a tensión plana o a deformación plana, siendo necesario indicar en cada caso de cálculo cuál de estos tipos es el de la estructura. En segundo lugar, el hecho de que la estructura se considere plana no impide que puedan abordarse con este estudio las estructuras que, siendo estereas como, por ejemplo, un contrafuerte de una presa, puedan ser asimilados en ciertos aspectos, a una estructura plana según el plano de simetría, dando un espesor diferente a cada uno de los ele-

mentos en que se descompone dicha sección plana. En fin, la acepción plana no impide la consideración de material heterogéneo o anisótropo en la composición de la estructura siempre que, naturalmente, esta anisotropía sea también plana.

Método fotoelástico.

Cuando una estructura plana no puede ser calculada con auxilio de los métodos numéricos usuales, es necesario recurrir al estudio fotoelástico.

Sin embargo, el método tiene unas limitaciones que restringen su aplicación; prescindiendo de consideraciones económicas, entre las que no es nada despreciable el factor tiempo, desde un punto de vista estrictamente técnico son dos las limitaciones fundamentales del método. La primera es la imposibilidad de reproducir las fuerzas de masa, ya que la carga debe realizarse por medios mecánicos, lo que exigiría coaccionar el material del modelo para poder ser aplicada, falseando totalmente el ensayo. En segundo lugar, la dificultad de reproducir materiales anisótropos o no homogéneos simplemente debido a que la estructura ha de ser reproducida con plástico naturalmente continuo.

Método de los elementos finitos.

Para un análisis detallado del método se remite al lector a la literatura especializada. Sin embargo, dado el carácter eminentemente práctico del estudio que se presenta, indicaremos someramente las condiciones básicas para la aplicación del método por cuanto que marcan unos límites interesantes de conocer.

Principios generales.

El medio continuo se divide, por medio de líneas imaginarias en un cierto número de elementos finitos; en nuestro caso serán triángulos o rectángulos.

Los elementos se suponen interconectados en un número finito de nudos situados en su contorno. Los desplazamientos de estos nudos serán las incógnitas básicas del problema exactamente igual que en el análisis estructural simple.

Se define una función para establecer unívocamente el estado de desplazamientos dentro

de cada elemento finito en función de los desplazamientos de los nudos.

Las funciones de desplazamiento definen así, unívocamente, el estado de deformaciones dentro de un elemento en función de los desplazamientos de sus nudos. Estas deformaciones junto con las deformaciones iniciales, si existen, y las propiedades elásticas del material, definirán el estado de tensiones en el interior del elemento y, por tanto, también en su contorno.

De este modo, cualquier sistema de fuerzas concentradas en los nudos quedará determinado por una relación matricial de rigidez con los desplazamientos de los nudos.

La resolución de esta ecuación da el resultado buscado.

Observaciones.

El grado de exactitud en el cálculo de la estructura es función de la densidad de elementos, por lo que en las zonas donde se prevean las máximas tensiones y, también, la máxima curvatura de las isostáticas, será necesario aumentar dicha densidad. Es evidente que, con esta condición, el cálculo será siempre una "aproximación" a los valores reales. Este es, quizá, el inconveniente mayor del método, ya que la definición de elementos es, como se ve, resultado de la experiencia y la intuición del calculista; sin embargo, será posible en general asegurarse un resultado aceptable introduciendo un "coeficiente de seguridad" en el número de elementos finitos para cubrir los defectos de aquella experiencia o intuición. En fin, si tal "coeficiente de ignorancia" llegase a ser demasiado elevado, siempre podrá naturalmente hacerse uso de un control de la calidad del resultado por medio de un criterio cualquiera de convergencia al ir aumentando sucesivamente el número de elementos.

Sistematización.

Desde luego el método es, como se deduce de su planteamiento, altamente sistemático, con unas expresiones matemáticas sencillísimas y, en cambio, con un proceso muy largo de ejecución; estas características le hacen especialmente apto para ser tratado en un computador electrónico.

Programa de elementos finitos.

Características generales.

El programa de elementos finitos forma parte del Sistema ICES (Integrated Civil Engineering System) y está incluido dentro del subsistema STRUDL (Structural Design Language). Un esquema de la forma de operación del Sistema ICES y los módulos de que consta, se presenta en la figura 1.

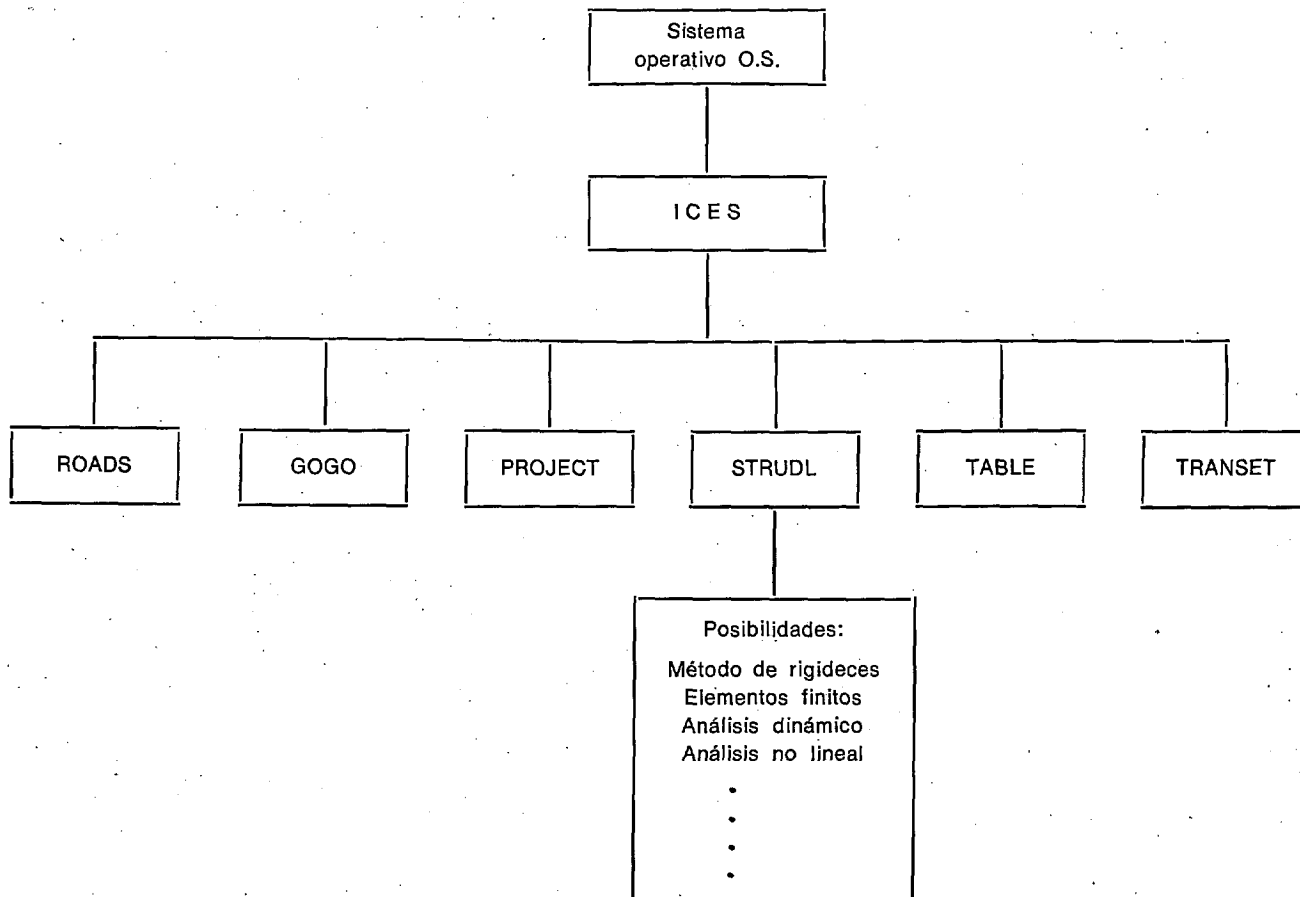


Figura 1.

El método de elementos finitos es, pues, uno de los procedimientos incluidos en el subsistema STRUDL.

La configuración mínima necesaria es un sistema 360/40, superior o 370, con dos unidades de discos, lectora de fichas e impresora, dispositivo de coma flotante y 128 K de capacidad de memoria. Sus posibilidades en cuanto al tamaño de las estructuras que es capaz de resolver de-

pende de la capacidad de la máquina utilizada. Como características generales del subsistema STRUDL se pueden indicar las siguientes:

1. Admite datos formados por palabras y/o número.
2. No necesita utilizar impresos especiales ni posiciones fijas para rellenar los datos.
3. Pueden darse comentarios en y entre las fichas de datos.

4. Admite cambiar de unidades de unos datos a otros y en salida.
5. Puede darse una estructura completa (v. g. pórtico espacio), modificarse, realizar diferentes tipos de análisis (celosía espacial, pórtico o emparrillado plano), pasarla a elementos finitos, etc.
6. Pueden seleccionarse resultados y datos en la salida.

7. Los pasos para obtener los datos necesarios son:
 - a) Situar un esquema de la estructura en un sistema de ejes.
 - b) Identificación de nudos y barras (numérica y/o alfanumérica).
 - c) Calcular coordenadas de nudos.
 - d) Fijar condiciones de los soportes (rígidos o plásticos).
 - e) Uniones de barras o elementos.
 - f) Condiciones de tales uniones.
 - g) Propiedades y constantes de los elementos.
 - h) Cargas.
 - i) Tipo de análisis.
 - j) Resultados a pedir.

Elementos finitos que pueden emplearse.

De los infinitos elementos que podrán plantearse en la resolución de los casos que se presentan en la realidad, el programa tiene incluidos los que figuran en las tablas 1 y 2, cuyas características y formulación pueden encontrarse en la bibliografía adjunta.

Una consideración muy importante sobre este programa es el hecho de que el sistema ICES se ha concebido como un programa vivo, es decir, que los usuarios van aportando su experiencia y nuevos elementos y/o procedimientos al sistema, con lo cual sus posibilidades crecen de año en año. Así, en la primera versión de elementos finitos sólo aparecían dos tipos, habiéndose ampliado con seis elementos en el transcurso de un año.

Preparación de datos.

Como se ha visto en el párrafo precedente, los datos que son necesarios para calcular una estructura cualquiera, por sencilla que sea, son muy numerosos. Las coordenadas de los nudos, las incidencias de éstos en cada elemento, los diferentes tipos de elementos y las cargas concentradas en los nudos suponen el manejo de miles de datos, cada uno de los cuales es indispensable para el cálculo, de modo que, en caso de error en uno sólo, todo el proceso queda invalidado.

Es evidente que con unas limitaciones de este tipo es muy difícil garantizar la calidad de los

datos, a no ser que, naturalmente, se recurra a procedimientos de control excesivamente lentos y costosos; en una palabra, la preparación de datos puede convertirse en un problema de gran envergadura que haga ineficaz el método.

Precisamente esta limitación no ha podido ser obviada de origen, introduciendo en el STRUDL las subrutinas necesarias para ello, a causa de la enorme diversidad de estructuras que pueden presentarse; sin embargo, limitando las estructuras que han de calcularse, por ejemplo, a estructuras planas y, dentro de éstas, a ciertas estructuras, como, por ejemplo, presas de embalse, es posible establecer programas de preparación de datos muy potentes que reduzcan el número de datos en los que es posible el error humano, creando los demás datos necesarios para el STRUDL a partir de éstos.

Este ha sido el objetivo que se ha perseguido en AUXINI-Construcción en colaboración estrecha con I.B.M.; a continuación se describen los diferentes programas que se han preparado para la realización de tal cometido.

Programa para la definición de coordenadas e incidencias.

Como se dijo en el párrafo anterior, es necesario dar de cada nudo las coordenadas y, de cada elemento, los nudos que lo limitan ordenadamente según el sentido contrario a las agujas del reloj. Además, en el caso de elementos triangulares, el primer lado ha de ser el de mayor longitud.

También se ha señalado con anterioridad que los elementos han de ser definidos según el criterio del calculista, atendiendo a su experiencia y a su intuición.

Por ello es imposible establecer programas que construyan los elementos sin intervención humana, es decir, automatizando completamente su preparación. Se puede, y así se ha hecho en algunas ocasiones, definir de forma geométrica sencilla los elementos; por ejemplo, definiendo líneas de cuya intersección se obtengan los elementos. Esto puede ser especialmente útil cuando la geometría de la estructura lo aconseja. Por ejemplo, la sección de un túnel circular es especialmente apta para una solución de este tipo. Pero en general no será posible establecer un criterio de preparación de elementos.

TABLA 1







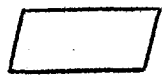
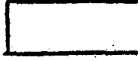







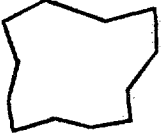


Nombre	Forma	Núm. de nudos	Núm. de grados de libertad	Tipo de análisis
PSR		4	$U_1 U_2$	Tensión plana. Deformación plana.
CSTL		3	$U_1 U_2$	Tensión plana. Deformación plana.
LST		6	$U_1 U_2$	Tensión plana. Deformación plana.
PSROT		4	$U_1 U_2 U_6$	Tensión plana. Deformación plana.
CPT		3	$U_3 U_4 U_5$	Flexión de placas.
BPR		4	$U_3 U_4 U_5$	Flexión de placas.
BPP		4	$U_3 U_4 U_5$	Flexión de placas.
SSCR		4	$U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$	Cilindros de paredes delgadas.
SSGT		3	$U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$	Cilindros de paredes delgadas.
SBCT		3	$U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$	Flexión y alargamiento de placas.
TETRA 4		4	$U_1 U_2 U_3$	Tres dimensiones.
CSTG		3	$U_1 U_2$	Tensión plana. Deformación plana.

TABLA 2

Nombre	Forma	Núm. de nudos	Núm. de grados de libertad	Tipo de análisis
IPLQ		4	$U_1 U_2$	Tensión plana. Deformación plana.
IPQQ		8	$U_1 U_2$	Tensión plana. Deformación plana.
ALSQ		8	$U_v U_z$	Axi-simétrico.
IPCQ		12	$U_1 U_2$	Tensión plana. Deformación plana.
IPLS		8	$U_1 U_2 U_3$	Tres dimensiones.
IPQS		20	$U_1 U_2 U_3$	Tres dimensiones.

Además, nuestra experiencia nos indica que la dificultad no es propiamente la preparación de los elementos y la determinación de las coordenadas, sino corregir los errores que se puedan introducir. Por ejemplo, con un croquis relativamente sencillo de los elementos que desean utilizarse para el cálculo de la estructura se puede, con personal auxiliar entrenado, preparar el conjunto de coordenadas en un plazo no superior a dos días. Téngase en cuenta además que, para una cierta estructura, esta descomposición será la misma en todos los distintos tipos de carga que deseen ensayarse.

Sin embargo, las coordenadas que se han obtenido por este procedimiento pueden tener numerosos errores; por ejemplo, lecturas equivocadas, números bailados, cambio de la abscisa por la ordenada, etc.

De la misma forma, las incidencias de cada elemento, es decir, los nudos que lo limitan, pueden ser definidos en un solo día por un auxiliar. Pero también aquí caben errores como, por ejemplo, algún nudo mal leído, algún elemento desordenado, etc.

Para obviar estas dificultades se utiliza un programa especialmente concebido para corregir las coordenadas e incidencias, el cual, con los datos anteriores, realiza el dibujo automático de la estructura que definen.

Desde luego, este dibujo destacará los errores de bulto que se señalan como más probables en los párrafos anteriores; así, si se han bailado las coordenadas de un punto, éste resultará situado en un punto totalmente desplazado del suyo natural; si algún elemento no queda definido por los nudos correctos, su situación en el dibujo lo indicará. En fin, si algún elemento no tiene los nudos que lo limitan en el orden contrario a las agujas de un reloj, el programa lo indicará igualmente, ya que, para cada uno de ellos, se verifica tal condición, comprobando si la orientación de los nudos es de signo positivo calculando los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

de cada tres nudos consecutivos.

Además, los lados de cada triángulo se ordenan automáticamente para comenzar siempre por el de mayor longitud.

Es evidente que, seleccionados de esta forma los errores de mayor importancia, pueden pasar desapercibidos otros errores menores; éstos quizá sean puestos de manifiesto en un segundo dibujo de la estructura corregida; pero obsérvese que, en cualquier caso, si la estructura dibujada no indica la existencia de errores a simple vista, es evidente que, si el calculista está conforme con la estructura dibujada, se podrá seguir con el cálculo en la seguridad de que, aunque no sea exactamente la estructura original, la diferencia entre una y otra es de segundo orden.

Programa de preparación de tipos de elementos.

Se emplean dos tipos de elementos, los CSTL y los PSR. La diferencia entre uno y otro es simplemente que los primeros son triángulos y los segundos rectángulos; por ello, un programa especialmente preparado perfora estas tarjetas sin más que investigar para cada elemento, cuántos nudos tiene.

Programa de preparación de cargas.

Se han preparado dos programas especiales de preparación de cargas que son los de peso propio y los de carga superficial. Como es sabido, la carga se define, dando, en cada nudo, las componentes de ésta según los dos ejes principales de referencia.

En el caso de peso propio, estas cargas son, sencillamente, el resultado de calcular, para cada elemento, el área del mismo y multiplicar por la densidad, dividiendo el resultado por tres o por cuatro, según se trata de un triángulo o de un rectángulo, realizando esta operación con todos los nudos de la estructura, acumulando en cada uno la carga que proviene de los elementos que limita, se obtienen las cargas totales en cada nudo que, posteriormente se descomponen según los ejes.

En el caso de la carga de superficie, que se refiere, como se ha dicho antes, por tratarse de cálculo de presas, a carga hidrostática, bas-

ta con definir la línea que marca el nivel de agua — recta que tendrá una ecuación del tipo $y = a.x + b$ respecto a los ejes principales — y el paramento mojado — dando, sencillamente, los nudos que definen este paramento en sentido tal que, al avanzar, el agua queda a la derecha — para que el conjunto de cargas quede totalmente definido y, por tanto, para que pueda ser realizado automáticamente.

Obsérvese que en uno y otro caso, los datos son mínimos; para peso propio basta la densidad y la dirección en que actúa la gravedad. Para la carga de superficie, basta la línea de carga y el paramento mojado; en conjunto, no más de treinta o cuarenta números sencillos.

Resumen.

Con estos programas se resuelve el arduo problema de la preparación de datos para gran número de casos; en particular, los programas de definición de coordenadas e incidencias, el de preparación de tipos de elementos y el de preparación de cargas debidas al peso propio son programas cuya utilidad es totalmente general.

Su fiabilidad, como se ha puesto de manifiesto, es extraordinaria y, por tanto, puede abordarse el problema sin riesgo de errores y, lo que es muy importante, sin temor a que se produzcan dilaciones excesivas en el cálculo.