COMENTARIOS SOBRE ARTICULOS PUBLICADOS EN MESES ANTERIORES

Comentarios al artículo: "El método de simulación y la resistencia característica del hormigón", de Valentín Martín Jadraque (publicado en la Revista de Obras Públicas de Mayo y Junio de 1971).

Por JOSE MANUEL LOPEZ SAIZ Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Ha sido muy interesante para mí la lectura de este artículo, sobre todo en el aspecto de hacer notar los posibles usos del ordenador en la obtención de funciones de distribución de variables que no son obtenibles fácilmente mediante métodos matemáticos.

En este aspecto creo que este artículo puede hacer pensar en soluciones nuevas para múltiples problemas estadísticos que se presentan con frecuencia en el campo de la ingeniería civil.

Ahora bien, si desde el punto de vista del método seguido me ha parecido muy interesante, este artículo tiene una segunda vertiente que es la de proponer la aplicación de un nuevo estimador para la resistencia característica del hormigón, distinto del propuesto por el Comité Europeo del Hormigón, y que han adoptado las normas MOP de 1968.

Las razones de proponer este estimador, según se expone en este artículo, son dos:

a) El estimador propuesto por la instrucción para el proyecto de ejecución de obras de hormigón en masa o armado de 1968, no es un estimador centrado de la resistencia característica tal como viene definida en esa misma instrucción.

b) El estimador propuesto por la instrucción crea, a juicio del autor del artículo, problemas de tipo práctico debido a que "por el hecho de que a un hormigón de corta calidad se le añada otro de mejor calidad", se consigue rebajar extraordinariamente su resistencia característica.

En primer lugar quiero hacer unas consideraciones acerca de este segundo punto, las cuales aparecen apuntadas en el mismo artículo de referencia. Hay que tener en cuenta que cuando se habla de resistencia característica del hormigón se está hablando de un concepto estadístico de calidad. Evidentemente desde un punto de vista estadístico no se puede caracterizar por un número, el que sea, una población más que si ésta es una única población, es decir, que no se puede caracterizar por una sola resistencia característica dos tipos distintos de hormigón, como en el caso de añadir a un hormigón de peor calidad un hormigón de mejor calidad.

Evidentemente, cuando esto sucede, es decir, cuando se está fabricando un hormigón de una cierta calidad, y por cualquier razón, bien sea porque ésta parece que no es suficiente bien sea por necesidades de desencofrado, por necesidades de durabilidad, o por cualquier otra, se interesa aumentar la resistencia del hormigón que se está fabricando, automáticamente deben separarse estos hormigones como dos tipos distintos, con lo cual queda automáticamente paliada la dificultad expresada en segundo lugar para la aplicación del estimador propuesto por el C.E.B.

Evidentemente, por otro lado, muchas veces se usa la aplicación de un hormigón de mejor calidad a otro de peor calidad con la intención de conseguir que se pueda dar por aceptable en su conjunto un hormigón que no lo fue en principio; es decir, se quieren ocultar faltas de calidad en el principio de los trabajos mediante un aumento en la calidad al final de los mismos; sin embargo, evidentemente aparte de ser dos tipos de hormigón distintos, es totalmente claro que aunque en los últimos pisos de un edificio, o en los últimos metros de un dintel de un puente, se haya puesto hormigón de mayor calidad de la necesaria, no indica que tenga que resistir la estructura en sus primeros pisos o en los primeros metros del puente, si en ellos el hormigón no tiene la calidad exigida.

Por todo ello creo que la dificultad expresada de que en caso de mezclar dos hormigones de distintas calidades, es decir, dos hormigones que se debían controlar por separado, el estimador nos dé una baja muy grande de la resistencia característica en vez de ser una desventaja de este estimador es más bien una ventaja del mismo, puesto que obliga a los suministradores de hormigón, bien sean contratistas o bien sean suministradores de hormigón prefabricado, a indicar claramente cuándo han cambiado de dosificación para de esta forma conseguir que se controlen los distintos tipos de hormigón por separado, pues de lo contrario su intento de mezclar distintos tipos de hormigón no les reporta ningún beneficio, sino que más bien les perjudicará en el conjunto del hormigón fabricado.

Para mí, pues, esta característica del estimador propuesto por el C.E.B., en vez de ser una desventaja es una ventaja muy positiva de dicho estimador.

En cuanto a la primera de las objeciones propuesta para el estimador del C.E.B., es decir, el que no es un estimador centrado, si bien es una objeción clara al mismo, hay que tener en cuenta que el que un estimador sea insesgado, aunque es una condición muy interesante, no es la más importante de todas, es decir, es mucho más interesante saber qué es lo que ocurre al aplicar dicho estimador en relación con su error, respecto al valor que se va a estimar. Si tenemos en cuenta esta característica que se define como eficiencia del estimador, la eficiencia relativa de dos estimadores se puede medir como la relación entre la media de sus desviaciones cuadráticas con relación al valor a estimar.

Llamando θ al valor a estimar y θ_1 y θ_2 sus estimaciones.

$$E_f = \frac{E(\theta_1 - \theta)^2}{E(\theta_2 - \theta)^2}.$$

Teniendo en cuenta que:

$$E(\theta_1 - \theta) = \text{varianza de } \theta_1 + [(\text{media de } \theta_1) - \theta]^2 = \text{varianza de } \theta_1 + (\text{sesgo de } \theta_1)^2.$$

podemos obtener la eficiencia de un estimador respecto al otro conociendo sus varianzas y sus sesgos respecto al valor estimado. Si la eficiencia es mayor que la unidad resulta que el estimador 1 es menos preciso que el 2, si la eficiencia es menor que la unidad resulta más preciso el estimador 1 que el 2.

Definiremos como estimador base el propuesto por el C.E.B., y que llamaremos Alfa, y compararemos con él, el nuevo estimador propuesto en este artículo y que denominaremos al igual que en el mismo *R*. Teniendo en cuenta esto, la eficiencia de este nuevo estimador respecto al anterior se determina como relación entre la media de la desviación cuadrática del estimador Alfa respecto al valor estimado, partido por la media de la desviación cuadrática respecto al valor estimado del nuevo estimador.

Podemos, entonces, establecer el siguiente cuadro:

Número observaciones	Sesgo de alfa	Sesgo de *R*	Var. alfa	Var. *R*	E. alfa	E. *R*	Eficiencia
6	+ 0 234	— 0,055	0,41	0,714	0,4647	0,717	0,648
12	0,147	— 0,016	0 206	0 284	0,2276	0,2342	0,8
18	0,113	— 0,002	0,136	0 184	0,1487	0'184	0,803
30	0,087	—	0,085	0,097	0,092	0,097	0,95

En estas columnas E. Alfa y E. R., indican la media de la desviación cuadrática de los estimadores Alfa y R respecto del valor estimado, es decir, respecto a la resistencia característica.

De la observación de este cuadro, y sobre todo de la columna correspondiente a la eficiencia, se ve que en todos los casos el estimador Alfa es más eficiente que el estimador R, es decir, que al efectuar una estimación de la resistencia característica mediante el estimador Alfa, obtendremos normalmente valores más cercanos a la resistencia característica, que haciendo esa misma estimación mediante el estimador propuesto en el artículo que comentamos.

Evidentemente esto nos hace pensar que antes de desechar el estimador propuesto por el C.E.B., y sustituirle por el nuevo estimador es necesario investigar más a fondo el estimador del C.E.B., efectuando incluso una simulación tal como se ha hecho con el estimador R para obtener en el mismo las curvas de probabilidad de aceptar o rechazar hormigones de mayor y menor calidad que la exigida, etc., para poder llegar a conclusiones más firmes.

Sobre todo, parece muy claro que desde el punto de vista del suministrador de hormigón, el estimador propuesto por el C.E.B. es muchísimo más interesante, ya que no solamente normalmente le dará estimaciones de la resistencia característica más próxima a la resistencia característica real, sino que además, debido a que su sesgo es negativo, como término medio le dará valores de la resistencia característica, ligeramente superiores a los reales.

Por otro lado, y pasando a definir un estimador, yo creo que debido a que en las estimaciones de máxima verosimilitud de μ y σ en una población son los valores de la media muestral, y la *desviación típica muestral* sería de gran aplicación el estimador que denominaremos M y que se define como $M = \overline{X} - 1{,}645\, S$.

Este estimador en el límite tiene una distribución normal, ya que debido a que la población de la cual se extraen las observaciones es una población normal (μ, σ), ocurre que: $\overline{X}$ se distribuye según la distribución normal con media μ y desviación típica σ, partido por el número de observaciones del que se ha obtenido $\overline{X}$.

Por otro lado para valores grandes del número de observaciones (N mayor que 30) sabemos (Chacón, *Curso de Estadística,* tomo 1.º, página 432) que raíz cuadrada de $2\chi^2$, es aproximadamente normal de media raíz cuadrada de $(2n - 3)$, y desviación típica 1. Según esto resulta que S también es normal con media:

$$\frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n}}\,\sigma \text{ y desviación típica } \frac{\sigma}{\sqrt{2n}},$$

y por tanto M, al ser una combinación lineal de dos variables normales, es también normal con media:

$$\overline{M} = \mu - 1\,645\,\frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n}}\,\sigma,$$

y varianza:

$$\sigma^2_M = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1\,645^2\,\sigma^2}{2n} \sim 2{,}3\,\frac{\sigma^2}{n}.$$

De todo ello se deduce que el estimador M tiene un sesgo que podemos estimar en:

$$S\,M = \left(\mu - 1\,645\,\frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n}}\,\sigma\right) - (\mu - 1\,645\,\sigma) =$$

$$= 1\,645\left(1 - \frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n}}\right)\sigma.$$

Por otro lado, para valores pequeños del número de observaciones no podemos suponer la normalidad del estimador M, pero podemos calcular su media y su varianza a partir de las medias y varianzas de $\overline{X}$ y S, ya que estos valores, en una combinación lineal de variables $W = a\,x + b\,y$ son:

$$E(W) = a\,E(x) + b\,E(y).$$

$$\sigma^2_W = |\,a\,|\,\sigma^2_x + |\,b\,|\,\sigma^2_y;$$

teniendo esto en cuenta y sabiendo que $\overline{X}$ es normal (μ, σ) y que (cf. Chacón, *Curso de Estadística*, pág. 432 y págs. 112 y 113) S sigue una distribución de Hermet un $n - 1$ grados de libertad y con media:

$$\overline{S} \sim \left(1 - \frac{3}{4n} - \frac{7}{32n^2} \ldots\right)\sigma,$$

y desviación típica σ_s tal que:

$$\sigma^2_s = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{8n} - \frac{25}{128n^2} + \ldots\right)\sigma^2.$$

A partir de esto obtenemos como media $(\overline{S})$ y varianza $(\sigma_s{}^2)$ de S los valores (siendo σ la desviación típica de la población a la que pertenece la muestra de la que se obtiene S):

n	$\bar{s}$	$\sigma^2{}_s$
6	0,86896 σ	0,079 σ^2
12	0,9359 σ	0,040 σ^2
18	0,9583 σ	0,0274 σ^2
30	0,9747 σ	0,0165 σ^2

y a partir de aquí obtenemos los valores medios y varianzas de M para 6, 12, 18 y 30 probetas, y que es:

n	Media de M	Varianza de M
6	— 1,429	0,38
12	— 1,539	0,1932
18	— 1,5764	0,129
30	— 1,6033	0,0783

como se puede ver, éste es un estimador sesgado, por lo que si queremos centrarlo hemos de variar el coeficiente de σ en la fórmula de M obteniendo así el estimador $M c = \bar{X} — K S$, teniendo K un valor variable con el número de series que se utilizan para calcular $\bar{X}$ y S.

Operando de igual manera que en casos anteriores tenemos:

n	K	Media de M_c	Varianza de M_c
6	1,893	— 1,645	0,449
12	1,758	— 1,645	0,209
18	1,716	— 1,645	0,136
30	1,688	— 1,645	0,81

Del mismo modo podemos operar con estimadores con una eficiencia semejante a la de $M c$, como son aquellos que utilizan el recorrido, y que podemos escribir y calcular al tiempo su media y varianza (llamaremos a este estimador Q), en función de los valores obtenidos, ordenados de menor a mayor y que llamamos $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

n	ESTIMADOR	Media	Varianza
6	$\bar{X} — 0{,}65\ (X_6 — X_1)$	— 1,645	0,469
12	$\bar{X} — 0{,}25\ (X_{12} + X_{11} + X_9 — X_4 — X_2 — X_1)$	— 1,645	0,212
18	$\bar{X} — 0{,}173\ (X_{18} + X_{17} + X_{16} + X_{14} — X_5 — X_3 — X_2 — X_1)$	— 1,645	0,138

De todo esto podemos obtener un cuadro que nos indique las distintas desviaciones medias cuadráticas de estos estimadores para de ellos deducir su eficiencia.

N.º Observaciones	E. alfa	E. R.	E. M.	E. Mc.	E. Q.
6	0,4647	0,717	0,4264	0,449	0,469
12	0,2276	0,2842	0,204	0,209	0,212
18	0,1487	0,184	0,134	0,136	0,138
30	0,092	0 097	0,080	0,081	—

Podemos así deducir cuál estimador puede interesar más, teniendo en cuenta que un estimador será tanto más sensible cuanto mayor sea su eficiencia.

Creo, pues, que el nuevo estimador propuesto no aventaja a los estimadores existentes hasta ahora (Alfa o M) y que sería interesante estudiar las distribuciones de M, $M c$ y Q mediante el sistema de simulación propuesto en el artículo que se comenta, para obtener unas funciones de probabilidad de aceptación y rechazo que sirvieron para posteriores aplicaciones de control de calidad.