

# CALCULO DE TUNELES DE SECCION CIRCULAR EN TERRENOS BLANDOS (ARENAS, ARCILLAS Y MARGAS), CON LAS HIPOTESIS DE TERZAGHI DE SOBRECARGA, ADAPTANDO A LAS MISMAS EL METODO DE BRODOV - GORELIK (\*)

Por JOSE FLOREZ ALIA  
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

PEDRO ABAJO MARTIN  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

EMILIO HERRERO FERNANDEZ-PACHECO  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

*En el presente artículo se estudia el cálculo de secciones circulares construidas en túnel en terrenos blandos. Es un fenómeno universal la ejecución de galerías, tanto metropolitanas, ferrocarriles, carreteras, como de obras hidráulicas. En la estimación facilitada por España a la O. C. D. E. para la década actual, se prevé que se harán en nuestro país 152 Km de túneles en terrenos blandos.*

*Primeramente se adopta como hipótesis de carga las de Terzaghi, comprobadas para estos terrenos en múltiples ocasiones con resultado satisfactorio. Tras unas consideraciones del fenómeno elástico en este tipo de estructuras, se pasa a la aplicación del método de Brodov Gorelik. Dicho método expresa las deformaciones en desarrollo de Fourier en función de unos coeficientes incógnitas. Dos sistemas de fuerzas actuarán, el primero, conocido a través de las citadas hipótesis de carga de Terzaghi; el segundo, de reacciones pasivas, es función de la deformada ligado a ella por el coeficiente de balasto. La expresión de la energía mínima servirá para la determinación de los coeficientes de la deformada. Pero es preciso la visión de la misma para elegir los puntos en que la directriz y la deformada coinciden, es decir, aquellos que marcan los extremos de actuación del empuje pasivo. Son los límites de integración en la expresión del trabajo de las reacciones elásticas del terreno. El problema se resuelve comprendiendo el fenómeno estructural, haciendo iteraciones y entregando al ordenador un abanico de posibilidades para luego elegir la idónea.*

La industrialización de los países está trayendo consigo un gran crecimiento de los núcleos urbanos en la última centuria. El transporte interior fue acometido en algunas ciudades europeas y americanas por medio de los metropolitanos, subterráneos en sus centros muy poblados y a cielo abierto en sus suburbios. Pero el desarrollo de los vehículos de motor contuvo el crecimiento de los "metros", así como la segunda gran guerra en las décadas de los años 40 y 50. La congestión de las calles y la saturación de los aparcamientos está llevando a volver a la solución subterránea. Una nueva causa aparece, la polución atmosférica.

Los responsables de las ciudades y los gobiernos de todo el mundo están impulsando la construcción de los ferrocarriles bajo el suelo, que no producen gases ni ruidos y no asfixian el tráfico de la superficie. Ningún otro medio como este realiza transportes de tan gran volumen a tal velocidad.

La dureza de este tipo de trabajos en túnel, junto con su especialización, hace que escasee la mano de obra. Los grandes planes rebasan sus posibilidades al incrementar cada año los kilómetros de galerías construidos. Ello ha llevado a una intensa mecanización. Pocos hombres ejecutan en un día longitudes de túnel que antes hacían muchos en medio mes.

El proceso de excavación y el empleo de prefabricados en el revestimiento, excavadoras rotatorias y erectores de corona, ha llevado a las secciones circulares.

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la redacción de esta Revista hasta el 31 de enero de 1972.

Por otra parte, las condiciones estructurales de trabajo favorecen el afinamiento de los espesores con estas secciones.

El presente trabajo constituye una colaboración al cálculo de estas secciones.

Hemos adaptado el método general de Brodov-Gorelik a los túneles circulares y lo hemos aplicado a las hipótesis de carga de Terzaghi, comúnmente usadas y comprobadas en casos reales en este tipo de obras.

Seguiremos en nuestra exposición este orden:

1. Hipótesis de Terzaghi.
2. Estudio elástico del túnel circular.
3. Método Brodov-Gorelik.
4. Aplicación del Método Brodov-Gorelik.

En el último capítulo llegamos a las fórmulas que nos dan los esfuerzos, fórmulas, que mediante su adecuada programación para ordenador, permiten la aplicación inmediata al cálculo de casos concretos.

### 1. HIPOTESIS DE TERZAGHI

Las hipótesis de Terzaghi suponen que las cargas del terreno se reparten del modo que indica la figura 1.

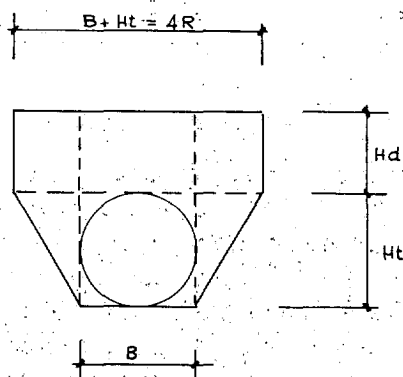


Figura 1.

Con ensayos de laboratorio para arena e *in situ* para roca, Terzaghi obtuvo los siguientes valores:

MATERIAL	Sobre la capa freática		Bajo la capa freática	
	$H_d$ mínima	$H_d$ máxima	$H_d$ mínima	$H_d$ máxima
Arena densa } Inicial .....	0,27 ( $B + H_t$ )	0,60 ( $B + H_t$ )	0,54 ( $B + H_t$ )	1,20 ( $B + H_t$ )
Arena densa } Final .....	0,31 ( $B + H_t$ )	0,69 ( $B + H_t$ )	0,62 ( $B + H_t$ )	1,38 ( $B + H_t$ )
Arena suelta } Inicial .....	0,47 ( $B + H_t$ )	0,60 ( $B + H_t$ )	0,94 ( $B + H_t$ )	1,20 ( $B + H_t$ )
Arena suelta } Final .....	0,54 ( $B + H_t$ )	0,69 ( $B + H_t$ )	1,08 ( $B + H_t$ )	1,38 ( $B + H_t$ )
Roca poco cuarteada .....	$H_d$ inicial = 0, aumentando hasta $H_d$ final = = 0,35 ( $B + H_t$ ).			
Roca disgregada .....	$H_d$ inicial = 0,60 ( $B + H_t$ ), idem $H_d$ final = = 1,10 ( $B + H_t$ ).			

Las características del terreno que hay que tener en cuenta para la aplicación del método Brodov-Gorelik son las siguientes:

$\gamma$  = peso específico.

$K$  = coeficiente de empuje (o de Rankine).

$C$  = coeficiente de balasto.

Para un estudio más profundo de las hipótesis de Terzaghi se pueden consultar las siguientes publicaciones:

"Camino", de J. L. Escario. 5.<sup>a</sup> Edición, págs. 483 y siguientes.

"The art of Tunnelling", de K. Szechy, págs. 270 y siguientes.

## 2. ESTUDIO ELASTICO DEL TUNEL CIRCULAR

### *Estudio elástico del túnel circular.*

*Túnel circular.* — Estructura cilíndrica de revolución, cuyo espesor es muy pequeño respecto al radio medio.

Las cargas exteriores son perpendiculares al eje del túnel.

Trabaja fundamentalmente a flexión.

En nuestro estudio emplearemos las coordenadas cilíndricas, ya que así lo aconseja la forma de la sección (fig. 2).

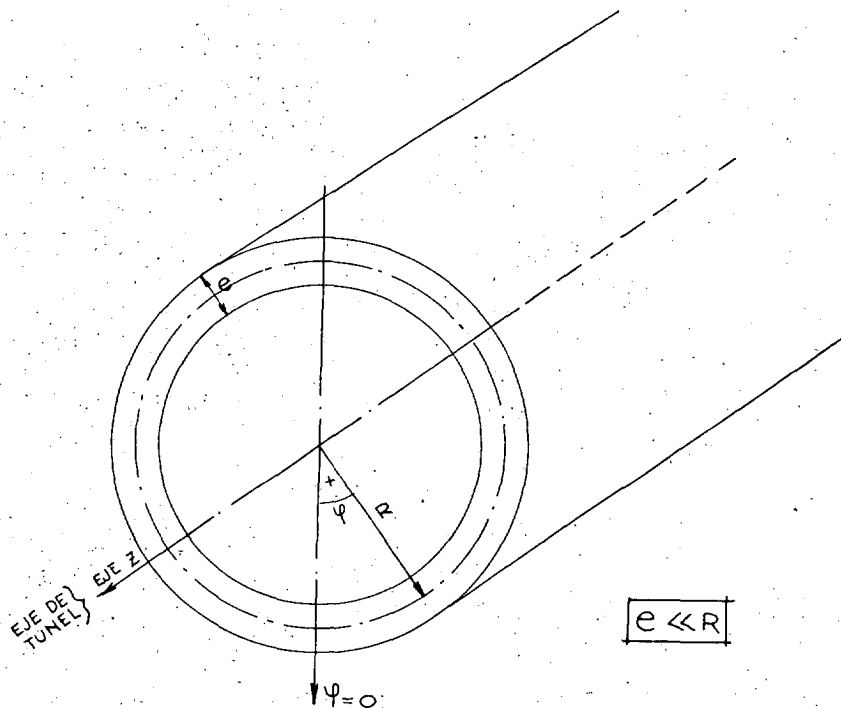


Figura 2.

*Hipótesis del cálculo elástico.*

Son las generales de la elasticidad más algunas particulares del problema que lo convierten en bidimensional (hip. b y c).

a) El material es homogéneo e isótropo.

b) Por ser las cargas normales al túnel (sólo componentes  $P_t$  y  $P_r$  contenidas en la sección transversal), los corrimientos no tienen componente longitudinal. No hay esfuerzos paralelos al eje del túnel (figs. 3 y 4).

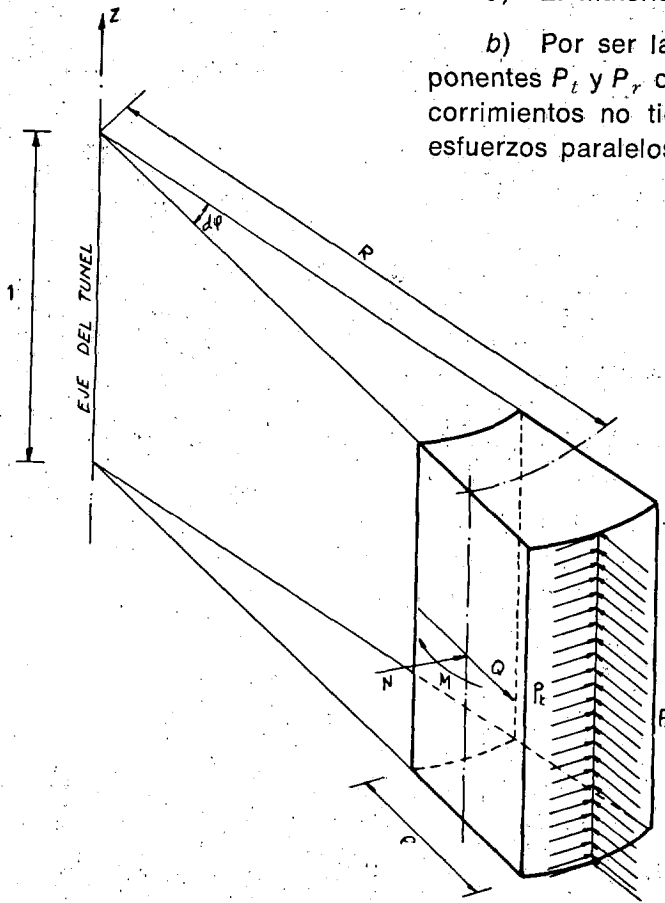


Figura 3.

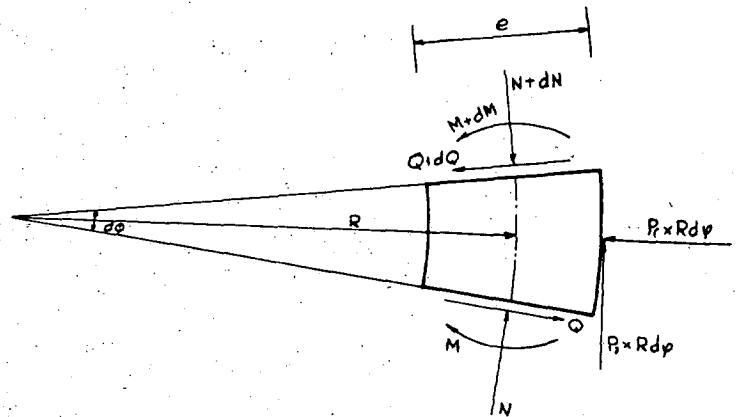


Figura 4.

Con esto el estudio se convierte en bidimensional.

Trabajaremos con la unidad de longitud transversal (fig. 3).

c) De las tres tensiones principales en un paralelepípedo elemental la normal al plano medio es nula ( $\sigma_z = 0$ ) (fig. 5).

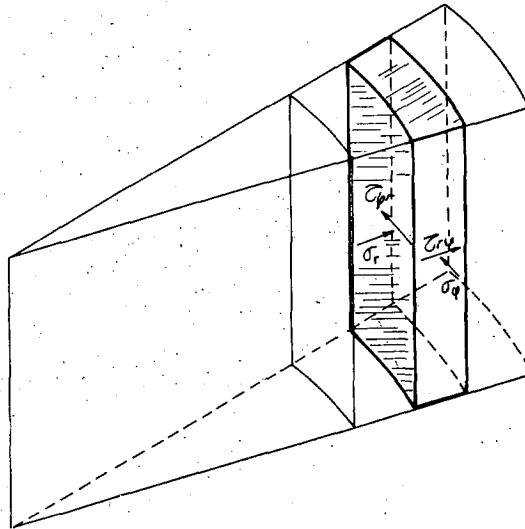


Figura 5.

d) Cumplen la ley de Hooke, entre tensiones y deformaciones:

$$\epsilon_\phi = -\frac{1}{E}(\sigma_\phi - \nu\sigma_r)$$

$$\epsilon_r = -\frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\phi)$$

$$\gamma_{r\phi} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\phi}$$

Véase el convenio adoptado para los sentidos positivos de las tensiones (fig. 6).

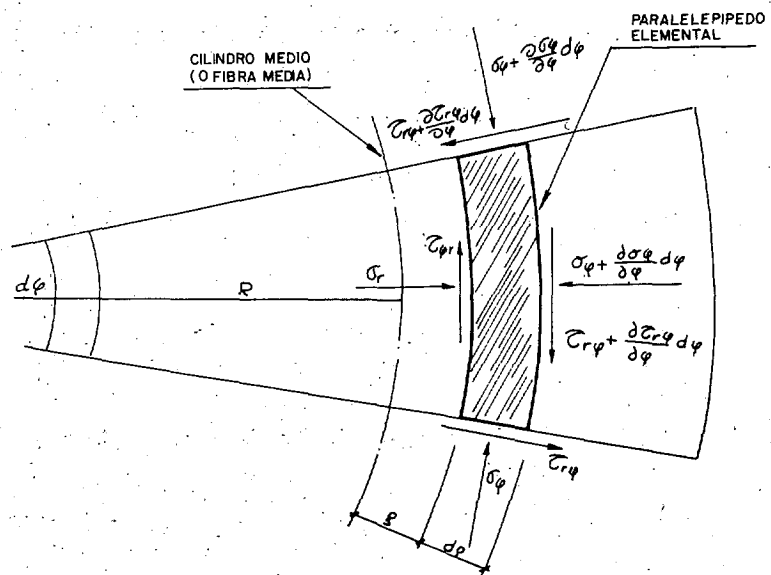


Figura 6.

e) La deformación es lineal: todos los puntos situados en una línea perpendicular al cilindro medio siguen después alineados perpendicularmente a la deformada del cilindro medio (fig. 7).

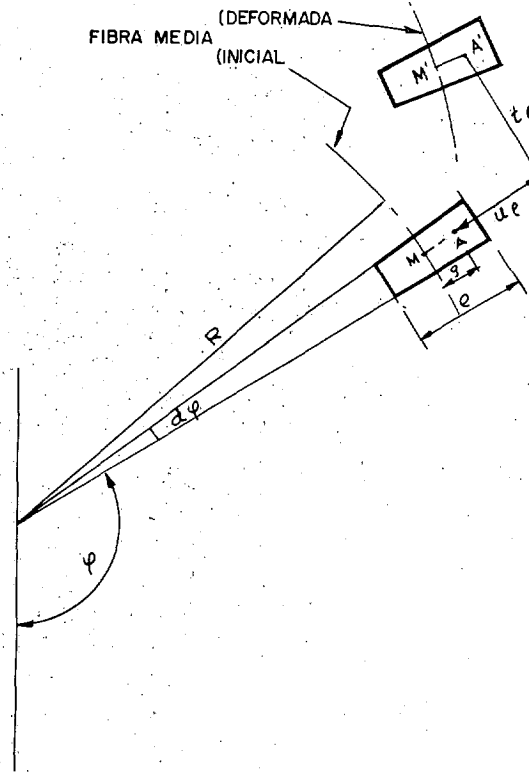


Figura 7.

f) Los corrimientos y las deformaciones son muy pequeñas. Consideraremos a los corrimientos mucho menores que el espesor de la placa.

g) Despreciaremos el alargamiento de la fibra media  $\epsilon_\varphi (\rho = 0) = 0$ .

$u_\rho$  = corrimiento radial, }  
 $t_\rho$  = corrimiento tangencial. } del punto A ( $\varphi, \rho$ ).

$$u_\rho \ll e$$

$$t_\rho \ll e$$

*Marcha del cálculo.*

Las magnitudes que van a intervenir en nuestro estudio y que nosotros interrelacionaremos entre sí son:

**Esfuerzos.** —  $M, Q$  y  $N$  que se ejercen entre dos secciones yuxtapuestas (figuras 3 y 4).

**Tensiones.** —  $\sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{r\varphi}$  y  $\tau_{\varphi r}$  que actúan sobre la unidad de área en las caras de un paralelepípedo elemental (figs. 5, 6 y 8).

**Deformaciones.** — Unitarias  $\epsilon_\varphi$ ,  $\epsilon_r$  y  $\gamma_{r\varphi}$  en un punto cualquiera definido por las variables  $\varphi$  y  $\rho$ .

**Corrimientos.** —  $U_\rho$  y  $t_\rho$  radial y tangencial, respectivamente, de un punto cualquiera  $A(\varphi, \rho)$  (figs. 9, 10 y 11).

**Corrimientos de un punto de la fibra media.** —  $U$  y  $t$  radial y tangencial, respectivamente. Evidentemente,  $U = U_\rho(\rho = 0)$ ;  $t = t_\rho(\rho = 0)$ , y, por tanto, dependen únicamente del punto  $M(\varphi)$  considerado.

Expresaremos:

$M$ ,  $Q$  y  $N$  en función de  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_r$  y  $\tau_{r\varphi}$ .

$\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_r$  y  $\tau_{r\varphi}$  en función de  $\epsilon_\varphi$ ,  $\epsilon_r$  y  $\gamma_{r\varphi}$ .

$\epsilon_\varphi$ ,  $\epsilon_r$  y  $\gamma_{r\varphi}$  en función de  $U_\rho$  y  $t_\rho$ .

$U_\rho$  y  $t_\rho$  en función de  $U$  y  $t$ .

Con lo que llegaremos a expresar  $M$  en función de  $U$  y  $t$  a través de las demás variables.

Como hemos supuesto que la pieza trabaja fundamentalmente a flexión comprobaremos que  $N$  y  $Q$  salen nulos, teniendo que recurrir para obtenerlos a las expresiones del equilibrio, de un elemento de túnel con las cargas exteriores  $P_r$  y  $P_t$  y las interiores  $M$ ,  $Q$  y  $N$ .

**Relaciones entre las tensiones.**

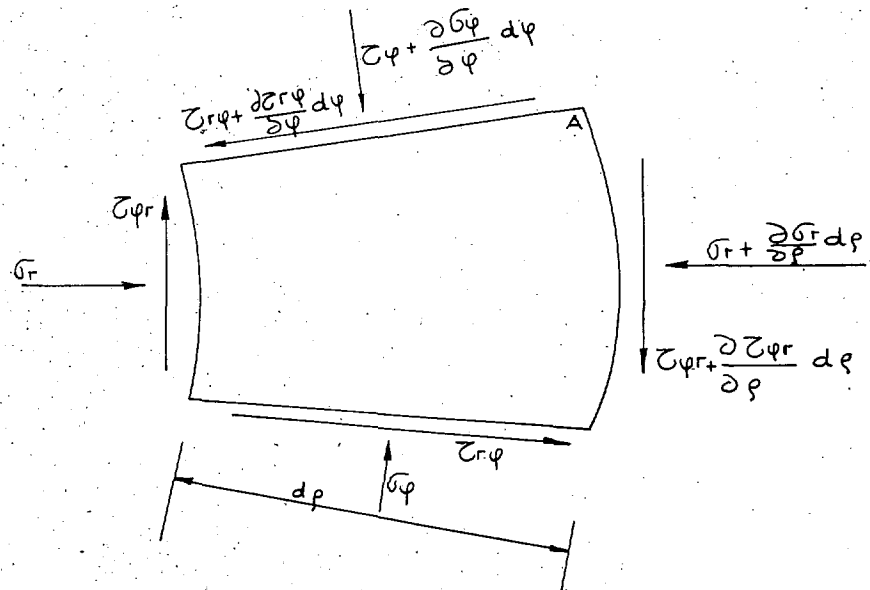


Figura 8.

Tomando momentos en  $A$  y proyectando sucesivamente sobre la tangente y la normal obtenemos, respectivamente:

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}$$

$$\sigma_\varphi - \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} R - \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\tau_{r\varphi} + R \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

*Relaciones entre los esfuerzos.*

Si en la figura 4 proyectamos y tomamos momentos del mismo modo que para las tensiones, obtenemos las relaciones:

$$N = P_r \cdot R + \frac{dQ}{d\varphi} \quad (1)$$

$$Q = -\frac{l}{R} \frac{dM}{d\varphi} - P_t \cdot \frac{e}{2} \quad (2)$$

$$\frac{dN}{d\varphi} = -Q + P_t \cdot R$$

*Relaciones entre tensiones y esfuerzos.*

Los esfuerzos  $M$ ,  $N$  y  $Q$  que, como hemos visto, dependen únicamente del ángulo  $\varphi$ , se obtienen por la superposición de las tensiones en los paralelepípedos elementales a lo largo de la cuña elemental definida por los valores de  $\varphi$  y  $d\varphi$ .

Con esta consideración es inmediato deducir los tres esfuerzos en función de las tensiones  $\sigma_\varphi$  y  $\tau_{r\varphi}$ .

La tensión  $\sigma_r$  no interviene por ser fuerza interior entre los paralelepípedos elementales. Lo mismo sucede con  $\tau_{\varphi r}$ .

Las relaciones son:

$$M = - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_\varphi \cdot \rho \cdot d\rho$$

$$N = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_\varphi \cdot d\rho$$

$$Q = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \tau_{r\varphi} d\rho$$

Relaciones entre las tensiones y las deformaciones.

De las leyes de Hooke, expuestas en las hipótesis de cálculo nos interesa despejar  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  y  $\tau_{r\varphi}$  en función de  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$  y  $\gamma_{r\varphi}$ .

Esta operación es inmediata, resultando:

$$\sigma_\varphi = -\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r)$$

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{r\varphi}$$

Relaciones entre las deformaciones y corrimientos.

SECCION  $\varphi = \text{cte.}$   
 $Z = \text{cte.}$

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{BB' - AA'}{AB} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}$$

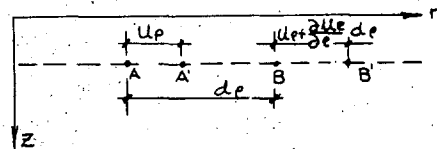


Figura 9.

SECCION  $Z = \text{cte.}$   
 $r = \text{cte.}$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(R + \rho + U_\rho) d\varphi + \frac{\partial t_\rho}{\partial \varphi} d\varphi - (R + \rho) d\varphi}{(R + \rho) d\varphi}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{U_\rho}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial t_\rho}{\partial \varphi}$$

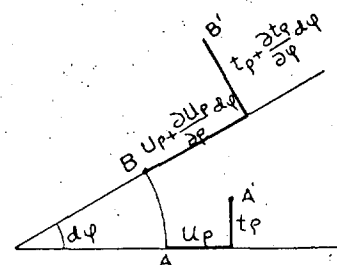


Figura 10.

Para hallar el deslizamiento  $\gamma_{r\varphi}$  tomamos tres puntos: A, B y C, que forman ángulo recto, y medimos la variación de ese ángulo:

SECCION  $Z = \text{cte.}$

$$\gamma_{r\varphi} = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma_1 = \frac{-\frac{t_\rho}{R} (R + \rho + d\rho) + t_\rho + \frac{\partial t_\rho}{\partial \rho} d\rho}{d\rho} = -\frac{t_\rho}{R} + \frac{\partial t_\rho}{\partial \rho}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial U_\rho}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{R d\varphi} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial U_\rho}{\partial \varphi}$$

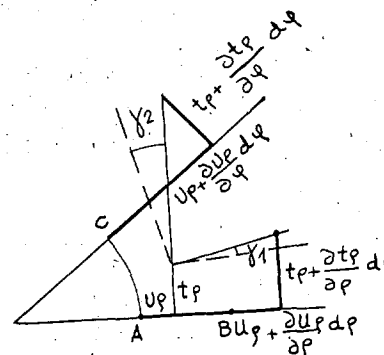


Figura 11.

Resulta, pues:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{U_\rho}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial t_\rho}{\partial \varphi}$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial U_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial t_\rho}{\partial \rho} - \frac{t_\rho}{R}$$

*Deformada de la fibra media.*

Nos interesa particularmente calcular el ángulo que forma con su posición inicial, la normal a la fibra media. A este ángulo lo llamaremos  $d\alpha$ .

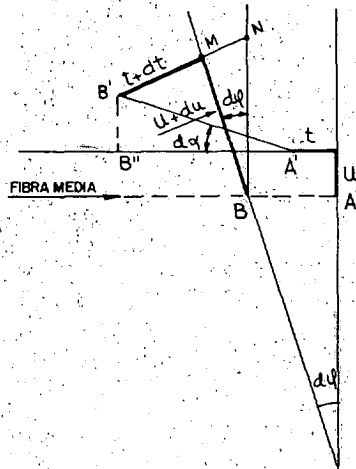
A las deformaciones  $U_\rho$  y  $t_\rho$  correspondientes a un punto determinado de la fibra media les llamaremos simplemente  $U$  y  $t$ , pues sólo dependen del valor de  $\varphi$  que define al punto:

De la hipótesis g:  $\varepsilon_\varphi (\rho=0) = 0$ .

y de la relación:  $\varepsilon_\varphi = \frac{U_\rho}{R} + \frac{l}{R} \frac{dt_\rho}{d\varphi}$

$$U + \frac{dt}{d\varphi} = 0$$

Consideremos dos puntos, A y B, de la fibra media, que en la deformación pasan a A' y B':



$$d\alpha = \frac{B'B'}{B'A'} = \frac{BN - B'N d\varphi - u}{B'N + BA - t} = \frac{u + du - t d\varphi - u}{t + dt + u d\varphi + R d\varphi - t}$$

$$d\alpha = \frac{du - t d\varphi}{dt + u d\varphi + R d\varphi} \quad \text{pero por ser } u d\varphi + dt = 0$$

$$d\alpha = \frac{l}{R} \frac{du}{d\varphi} - \frac{t}{R}$$

Figura 12.

*Relaciones entre los corrimientos de un punto y los de la fibra media.*

Considerando un punto A definido por  $\varphi$  y  $\rho$ , y el punto M con el mismo valor de  $\varphi$ , en la fibra media ( $\rho = 0$ ), los corrimientos  $U_\rho$  y  $t_\rho$  de A' pueden expresarse en función de los corrimientos  $U$  y  $t$  de M.

De la figura:

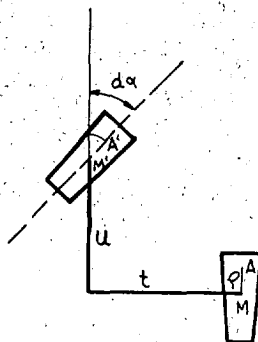


Figura 13.

$$U_\rho = U - \rho [l - \cos(d\alpha)] \approx U$$

$$t_\rho = t - \rho \operatorname{sen}(d\alpha) \approx t - \rho d\alpha$$

Pero:

$$d\alpha = \frac{l}{R} \frac{du}{d\varphi} - \frac{t}{R}$$

Luego:

$$U_\rho = U$$

$$t_\rho = t \left( 1 + \frac{\rho}{R} \right) - \frac{\rho}{R} \frac{du}{d\varphi}$$

Expresión de los esfuerzos en función de los corrimientos de la fibra media.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0$$

ya que  $U$  depende sólo de  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi \frac{U_\rho}{R} + \frac{l}{R} \frac{\partial t_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{U}{R} + \frac{l}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ t + \frac{\rho}{R} \right] - \frac{\rho}{R^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} = -\frac{\rho}{R^2} \left[ U + \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right] \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{l}{R} \frac{\partial U_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial t_\rho}{\partial \rho} - \frac{t_\rho}{R} = \frac{l}{R} \frac{dU}{d\varphi} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ t \left( l + \frac{\rho}{R} \right) - \frac{\rho}{R} \frac{dU}{d\varphi} \right] - \\ &\quad - \frac{t}{R} \left( l + \frac{\rho}{R} \right) + \frac{\rho}{R^2} \frac{dU}{d\varphi} \end{aligned}$$

ya que  $\frac{dt}{d\varphi} = -U$  y que  $t$  sólo depende de  $\varphi$  resulta:

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\rho}{R^2} \left( \frac{dU}{d\varphi} - t \right) = -\frac{\rho}{R^2} \left[ t + \frac{d^2 t}{d\varphi^2} \right]$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{\rho}{R^2} [U + U''] \\ \sigma_r &= -\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi) = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \cdot \frac{\rho}{R^2} [U + U''] \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{E}{2(1+\nu)} \tau_{r\varphi} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\rho}{R^2} [t + t''] \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que el momento de inercia de la sección transversal es:

$$I = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \rho^2 d\rho \quad (\text{respecto de la fibra media})$$

entrando en las expresiones de los esfuerzos y teniendo en cuenta que  $U$  y  $t$ , así como sus derivadas, no dependen de  $\rho$  y, por tanto, son constantes en la integración:

$$M = - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_\varphi \rho d\rho = - \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{l}{R^2} [U + U''] \cdot \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \rho^2 d\rho = - \frac{EI}{R^2(1-\nu^2)} [U + U'']$$

$$N = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_\varphi d\rho = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{l}{R^2} [U + U''] \cdot \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \rho d\rho = 0$$

$$Q = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \tau_{r\varphi} d\rho = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{l}{R^2} [t + t''] \cdot \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \rho d\rho = 0$$

como era previsible dadas las simplificaciones hechas en las hipótesis de cálculo, la pieza trabaja fundamentalmente a flexión.

Para calcular  $N$  y  $Q$  debemos emplear las expresiones [1] y [2] en función de  $M$  y de las cargas exteriores  $P_r$  y  $P_t$ :

$$Q = -\frac{l}{R} \frac{dM}{d\varphi} - P_t \cdot \frac{e}{2} = \frac{EI}{R^3(1-\nu^2)} [U' + U''] + -\frac{e}{2} P_t$$

$$N = \frac{dQ}{d\varphi} + P_r \cdot R = \frac{EI}{R^3(1-\nu^2)} [U'' + U] - \frac{e}{2} \frac{dP_t}{d\varphi} + P_r \cdot R$$

En definitiva:

$$M = -\frac{EI}{R^2(1-\nu^2)} [U + U'']$$

$$Q = \frac{EI}{R^3(1-\nu^2)} [U' + U''] - \frac{e}{2} P_t$$

$$N = \frac{EI}{R^3(1-\nu^2)} [U'' + U] - \frac{e}{2} \frac{dP_t}{d\varphi} + P_r \cdot R$$

### 3. METODO DE BRODOV-GORELIK

Estudia los túneles circulares, cuya sección está embebida elásticamente en el subsuelo, basándose en la ecuación de Winkler-Schedler (The art of Tunnelling, páginas 365 y siguientes):

$$P'_n = C \cdot U \quad \begin{array}{l} \text{para } U > 0 \\ \text{para } U \leq 0 \quad P'_n = 0 \end{array}$$

donde:

$P'_n$  = presión normal en el paramento (positiva a compresión).

$U$  = componente radial de la deformación en el punto considerado (positiva hacia el terreno).

$C$  = coeficiente de reacción del terreno.

como vemos, los sentidos positivos de  $P'_n$  y  $U$  son opuestos.

Esta presión normal se superpone con la presión inicial del terreno de componentes  $P_n$  y  $P_t$  radial y tangencial, respectivamente, obteniéndose una presión total exterior de componentes (fig. 14):

$P_r = P_n + P'_n$ : presión radial.

$P_t$ : presión tangencial.

Supuesto conocidas  $P_n$  y  $P_t$ , es decir,  $P_n = P_n(\varphi)$  y  $P_t = P_t(\varphi)$  como tenemos  $P'_n = C \cdot U$ , una vez conocido  $U = U(\varphi)$  conoceremos la distribución de las presiones exteriores, es decir:  $P_r = P_r(\varphi)$ ;  $P_t = P_t(\varphi)$ .

El método de Brodov-Gorelik supone a la deformación radial  $U$  como desarrollo en serie de Fourier de:

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\varphi + b_m \operatorname{sen} m\varphi)$$

Sentidos positivos de las presiones exteriores.

$P_r = P_n + P'_n$ : presión radial.

$P_t$ : presión tangencial

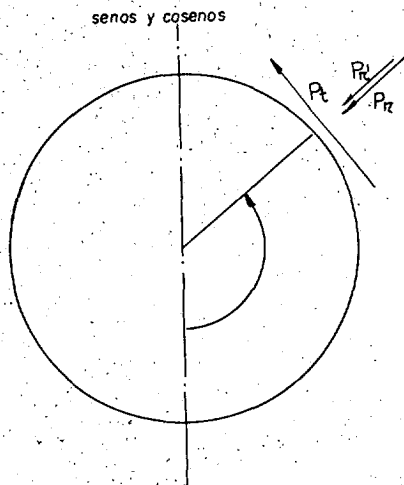


Figura 14.

Sentidos positivos de los corrimientos.

$U$  = corrimiento radial.

$t$  = corrimiento tangencial.

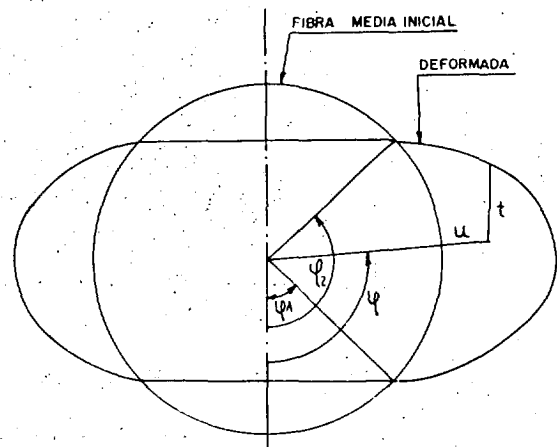


Figura 15.

Por ser la deformada simétrica respecto al eje vertical,  $U$  es una función par  $U(\varphi) = U(-\varphi)$ , es decir (fig. 15):

$$b_m = 0 \quad \text{y} \quad U = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos m\varphi$$

Por otra parte:

$$U + \frac{dt}{d\varphi} = 0 \quad t = - \int U d\varphi$$

sustituyendo e integrando:

$$t = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{m} \operatorname{sen} m\varphi$$

La constante de integración es nula, pues, para  $\varphi = 0, t = 0$ .

Para todos los cálculos consideraremos el túnel reducido a su fibra media.

Los corrimientos  $U$  y  $t$  son precisamente los de la fibra media (fig. 15).

Ya hemos visto antes la expresión de todos los esfuerzos en función de  $U$  y de las cargas exteriores  $P_r = P_n + P'_n$  y  $P_t$ .

El método de Brodov-Gorelik considera una sección de túnel con la unidad de longitud, y expresa que en el equilibrio final la energía potencial total de dicha sección es mínima.

La energía potencial total  $\pi$  de la sección del túnel consta de tres partes:

$T$  = el trabajo de las fuerzas externas.

$V_1$  = el trabajo de la deformación elástica del terreno.

$V_2$  = el trabajo de la deformación de las fuerzas internas.

Entonces:

$$\pi = T + V_1 - V_2$$

Estudiaremos cada sumando por separado.

*Trabajo de las fuerzas externas T.*

$$T = - \oint P_n \cdot U ds + \oint P_t \cdot t \cdot ds$$

Las fuerzas externas tienen las componentes  $P_n ds$  y  $P_t ds$  en un elemento  $ds$ .

La componente radial  $P_n ds$  ejerce un trabajo negativo por ser su sentido positivo opuesto al de  $U$ .

Sustituyendo los valores de  $U$  y  $t$ , obtenidos en desarrollos de Fourier:

$$T = - \oint P_n \cdot R \cdot \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\varphi \cdot d\varphi - \oint P_t \cdot R \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin m\varphi d\varphi$$

*Trabajo de las reacciones elásticas del terreno:  $V_1$ .*

Aquí se nos presenta el problema de que no sabemos los límites de integración, ya que sólo existen reacciones elásticas y, por tanto, trabajo, en las zonas en que la deformación radial es positiva, como está indicado en la ecuación de Winkler-Schedler.

Si conociésemos la deformada (fig. 15) no existiría problema y efectuaríamos la integración entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , pero como no la conocemos podemos hacer una hipótesis dando unos valores a  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ ; una vez efectuado el cálculo obtendremos una deformada con otros valores de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  (a no ser que hubiésemos acertado al elegir los iniciales). Ahora volveremos a efectuar el cálculo con estos nuevos límites de integración y obtendremos otros... De este modo, seguiremos por aproximaciones sucesivas hasta que los valores de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  obtenidos para la deformada coincidan con los adoptados para el cálculo.

Por otra parte, como la deformada es simétrica la integración es el doble de la efectuada entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ :

$$V_1 = -2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ds \int_0^U P_n dU = -2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ds \int_0^U CU dU = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} CU^2 ds$$

El trabajo es negativo por ser opuestos los sentidos adoptados como positivos para  $P'_n$  y para  $U$ .

Sustituyendo ahora:

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\varphi$$

$$ds = R d\varphi$$

resulta:

$$V_1 = -CR \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\varphi \right]^2 d\varphi$$

*Trabajo de las deformaciones internas:  $V_2$*

La energía de deformación producida por los axiles  $N$  y los cortantes  $Q$  es despreciable respecto a la de los momentos flectores  $M$ , ya que la estructura trabaja fundamentalmente a flexión:

$$V_2 = \oint_0^M \mathcal{M} d\theta = \oint_0^M \frac{ds}{EI} \mathcal{M} d\mathcal{M} = \frac{l}{2EI} \oint M^2 ds = \frac{R}{2EI} \oint_0^{2\pi} M^2 d\varphi$$

Pero ya vimos que:

$$M = -\frac{EI}{R^2} \left[ U + \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right] \quad (\text{haciendo } v^2 \approx 0)$$

sustituyendo:

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\varphi; \quad \frac{d^2 U}{d\varphi^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m \cos m\varphi$$

resulta:

$$V_2 = \frac{EI}{2R^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (l - m^2)^2 a_m^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi \right]$$

e integrando:

$$V_2 = \frac{EI\pi}{2R^3} \sum_{m=1}^{\infty} (l - m^2)^2 a_m^2$$

La energía potencial de la sección puede ser expresada, pues, en función de las únicas incógnitas  $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$

Como no podemos trabajar con la serie entera, tomaremos un número  $M$  de términos del desarrollo, con lo que vamos a tener  $M$  incógnitas:  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

Estas incógnitas las hallaremos resolviendo el sistema que resulta de expresar el mínimo de la energía potencial total  $\pi$ :

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_1} = \frac{\partial \pi}{\partial a_2} = \frac{\partial \pi}{\partial a_3} = \dots = \frac{\partial \pi}{\partial a_M} = 0$$

Que proporcionan  $M$  ecuaciones con  $M$  incógnitas.

Una vez conocidos los coeficientes, podremos determinar los corrimientos:

$$U(\varphi) = \sum_{m=1}^{m=M} a_m \cos m\varphi$$

$$t(\varphi) = - \sum_{m=1}^{m=M} \frac{a_m}{m} \sin m\varphi$$

*Cálculo de los esfuerzos.*

Todos los esfuerzos los calcularemos para la unidad de la dimensión longitudinal del túnel.

De las expresiones halladas:

$$P'_n = CU = +C \sum_{m=1}^M a_m \cos m\varphi$$

$$M = \frac{EI}{R^2} \left[ U + \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right] = - \frac{EI}{R^2} \sum_{m=1}^M (l - m^2) a_m \cos m\varphi$$

$$Q = \frac{EI}{R^3} [U' + U'''] - \frac{e}{2} P_t = - \frac{EI}{R^3} \sum_{m=1}^M m(l - l^3) a_m \sin m\varphi - \frac{e}{2} P_t$$

$$N = \frac{EI}{R^3} [U'' + U^{IV}] - \frac{e}{2} \frac{dP_t}{d\varphi} + P_r R = - \frac{EI}{R^3} \sum_{m=1}^M m^2(l - m^2) a_m \cos m\varphi - \frac{e}{2} \frac{dP_t}{d\varphi} + P_n R + CR \sum_{m=1}^M a_m \cos m\varphi; \text{ ya que } P_r = P_n + P'_n$$

Es decir:

$$M = \frac{EI}{R^2} \sum_{m=1}^M (m^2 - l) a_m \cos m\varphi$$

$$Q = \frac{EI}{R^3} \sum_{m=1}^M (m^2 - l) m a_m \sin m\varphi - \frac{e}{2} P_t$$

$$N = \frac{EI}{R^3} \sum_{m=1}^M (m^2 - l) m^2 a_m \cos m\varphi + CR \sum_{m=1}^M a_m \cos m\varphi + P_n R - \frac{e}{2} \frac{dP_t}{d\varphi}$$

#### 4. APLICACION DEL METODO BRODOV-GORELIK

##### Aplicación del método de Brodov-Gorelik.

En el estudio del método de Brodov-Gorelik nos hacía falta conocer la expresión de las tensiones exteriores  $P_n$  y  $P_t$  en función del ángulo  $\varphi$ .

Sea  $H_d$  la altura del terreno sobre la clave, que ejerce una acción tensional sobre el túnel. Supondremos esta altura conocida mediante las hipótesis del capítulo I para el terreno y el túnel que estudiemos.

Las tensiones principales en un punto A, definido por un valor de  $\varphi$  son (fig. 16) las expresadas en el capítulo I, donde:

$$H = R(1 + \cos \varphi)$$

luego:

$$\begin{aligned} V_A &= [H_d + R(1 + \cos \varphi)] \gamma \\ H_A &= K V_A = [H_d + R(1 + \cos \varphi)] \gamma K \end{aligned}$$

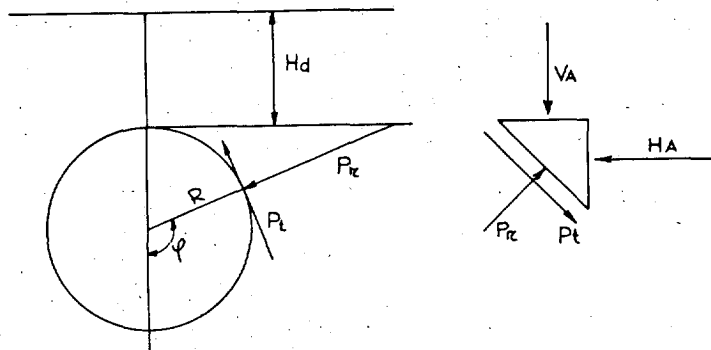


Fig. 16. — Tensiones en un punto.

Para hallar  $P_n$  y  $P_t$  aplicamos el círculo de Mohr:

$$P_n = \frac{V_A + H_A}{2} + \frac{V_A - H_A}{2} \cos 2\varphi$$

$$P_t = \frac{V_A - H_A}{2} \sin 2\varphi$$

Sustituyendo los valores de  $V_A$  y  $H_A$  queda llamando  $H_d + R = H$ :

$$P_n = [H + R \cos \varphi] \left[ \frac{\gamma(1+K)}{2} + \frac{\gamma(1-K)}{2} \cos 2\varphi \right]$$

$$P_t = [H + R \cos \varphi] \frac{\gamma(1-K)}{2} \sin 2\varphi$$

Expresemos ahora cada término de la energía potencial  $\pi$ :

$$\pi = T + V_1 - V_2$$

$$T = -I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} P_n R \sum_{m=1}^M a_m \cos m\varphi d\varphi$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} P_t R \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{m} \operatorname{sen} m\varphi d\varphi$$

$$V_1 = -CR \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \sum_{m=1}^M a_m \cos m\varphi \right]^2 d\varphi$$

$$V_2 = \frac{E I \pi}{2 R^3} \sum_{m=1}^M (1 - m^2)^2 a_m^2$$

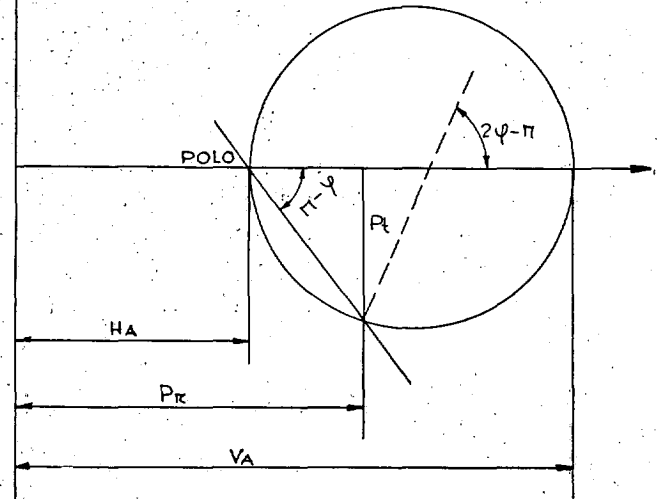


Fig. 17. — Círculo de Mohr.

Sustituyendo en  $I_1$  e  $I_2$  los valores de  $P_n$  y  $P_t$  e integrando:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left\{ [H + R \cos \varphi] \frac{\gamma(l+K)}{2} + [H + R \cos \varphi] \frac{\gamma(l-K)}{2} \cos 2\varphi \right\} R \sum_{m=1}^M a_m \cos m\varphi d\varphi$$

$$I_1 = \sum_{m=1}^M a_m \left\{ \frac{H R \gamma(l+K)}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi + \frac{R^2 \gamma(l+K)}{2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos m\varphi d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{H R \gamma(l-K)}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \cos m\varphi d\varphi + \frac{R^2 \gamma(l-K)}{2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos 2\varphi \cos m\varphi d\varphi \right\}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left\{ [H + R \cos \varphi] \frac{\gamma(l-K)}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \right\} R \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{m} \operatorname{sen} m\varphi d\varphi$$

$$I_2 = \sum_{m=1}^M a_m \left\{ \frac{H R \gamma(l-K)}{2 m} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} m\varphi d\varphi + \frac{R^2 \gamma(l-K)}{2 m} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} m\varphi d\varphi \right\}$$

Consideremos ahora las integrales expuestas por separado:

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi = 0$$

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} \text{Para } m \neq 1 & J_2 = 0 \\ \text{Para } m = 1 & J_2 = \pi \end{cases}$$

$$J_3 = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} \text{Para } m \neq 2 & J_3 = 0 \\ \text{Para } m = 2 & J_3 = \pi \end{cases}$$

$$J_4 = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos 2\varphi \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} \text{Para } m \neq 1 \\ \text{Para } m \neq 3 \end{cases} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} J_4 = 0$$

$$J_4 = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos 2\varphi \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} \text{Para } m = 1 & J_4 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Para } m = 3 \quad J_4 = \frac{\pi}{2}$$

$$J_5 = \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \sin m\varphi d\varphi = \begin{cases} \text{Para } m \neq 2 & J_5 = 0 \\ \text{Para } m = 2 & J_5 = \pi \end{cases}$$

$$J_6 = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin 2\varphi \sin m\varphi d\varphi = \begin{cases} \text{Para } m \neq 1 \\ \text{Para } m \neq 3 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} J_6 = 0$$

$$\begin{cases} \text{Para } m = 1 & J_6 = \frac{\pi}{2} \\ \text{Para } m = 3 & J_6 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores resulta:

$$I_1 = \frac{R^2 \gamma \pi}{4} (3 + K) a_1 + \frac{H R \gamma \pi}{2} (1 - K) a_2 + \frac{R^2 \gamma \pi}{4} (1 - K) a_3$$

$$I_2 = \frac{R^2 \gamma \pi}{4} (1 - K) a_1 + \frac{H R \gamma \pi}{4} (1 - K) a_2 + \frac{R^2 \gamma \pi}{12} (1 - K) a_3$$

$$T = -I_1 - I_2$$

$$T = -R \gamma \pi \left[ R a_1 + \frac{3}{4} H (1 - K) a_2 + \frac{1}{3} R (1 - K) a_3 \right]$$

Por otra parte:

$$V_1 = -CR \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \sum_{m=1}^M a_m \cos m\varphi \right]^2 d\varphi$$

elevando al cuadrado e integrando resulta:

$$V_1 = -CR \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_m^2 \left[ \varphi + \frac{\sin 2m\varphi}{2m} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \sum_{\substack{m=1 \\ n=1 \\ m \neq n}}^M a_m a_n \left[ \frac{\sin(m+n)\varphi}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\varphi}{m-n} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right\}$$

y

$$V_2 = \frac{1 E \pi}{2 R^3} \sum_{m=1}^M (m^2 - 1)^2 a_m^2$$

Con esto, supuestos elegidos convenientemente  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , la energía potencial total depende exclusivamente de los coeficientes  $a_m$ , y para expresar que aquella es mínima escribimos el sistema de  $M$  ecuaciones con  $M$  incógnitas:

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_m} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

Expresando esta derivada resulta:

$$\alpha_m \left\{ CR \left[ \varphi + \frac{\text{sen } 2m\varphi}{2m} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \frac{EI\pi}{R^3} (m^2 - 1)^2 \right\} + CR \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^M \alpha_n \left[ \frac{\text{sen}(m+n)\varphi}{m+n} + \frac{\text{sen}(m-n)\varphi}{m-n} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{\partial T}{\partial \alpha_m}$$

donde:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = -R^2 \gamma \pi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = -\frac{3}{4} RH \gamma \pi (I - K)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{3} R^2 \gamma \pi (I - K)$$

$$y \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} = 0 \quad \begin{matrix} i \neq 1 \\ i \neq 2 \\ i \neq 3 \end{matrix}$$

Cálculo de los esfuerzos.

Sustituyendo las expresiones de  $P_n, P'_n, P_t$  y  $\frac{dP_t}{d\varphi}$  en las expresiones:

$$M = \frac{EI}{R^2} \sum_{m=1}^M (m^2 - 1) \alpha_m \cos m\varphi$$

$$Q = \frac{EI}{R^3} \sum_{m=1}^M m(m^2 - 1) \alpha_m \text{sen } m\varphi - \frac{e\gamma(I - K)}{4} [H + R \cos \varphi] \text{sen } 2\varphi$$

$$N = \frac{EI}{R^3} \sum_{m=1}^M m^2 (m^2 - 1) \alpha_m \cos m\varphi + CR \sum_{m=1}^M \alpha_m \cos m\varphi + \frac{(R - e)\gamma(I - K)}{2} [H + R \cos \varphi] \cos 2\varphi + \frac{R\gamma(I + K)}{2} [H + R \cos \varphi] + \frac{Re\gamma(I - K)}{4} \text{sen } \varphi \text{sen } 2\varphi$$

Estas fórmulas, así como el tanteo de los ángulos  $\varphi$ , y  $\varphi_z$  de un modo iterativo, lo hemos programado en ordenador IBM 1130.