# EL ALGEBRA Y LAS CALCULADORAS(*)

Por IGNACIO CANALS

Dr. en Matemáticos. Prof. Titular en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional de México, D. F.

*Así como las computadoras han entrado de lleno, y en forma decisiva, en la vida de las grandes empresas, en la investigación tecnológica y en el análisis numérico en todas sus formas, es predecible que muy pronto tomen un papel importante en la investigación científica, aun en las ramas más abstractas. Así, por ejemplo, en marzo de 1970 tuvo lugar en New York el "Six-Hundred Seventy-Third Meeting" de la "American Mathematical Society", dedicado a "Computers in Algebra and Number Theory", donde se presentaron un centenar de trabajos sobre el tema. También he tenido noticia que en Inglaterra se están aplicando con éxito las computadoras a problemas de Geometría algebraica. En [4] se puede consultar una aplicación a la base mínima de un campo de números algebraicos.*

*No quiero entrar en la discusión sobre las posibilidades futuras de las computadoras que tratan de reproducir todos los procesos automáticos del cerebro humano. Personalmente pienso que la facultad creadora del hombre, llámase intuición, imaginación, penetración, inteligencia, razón, etc., no podrá nunca ser integrada en una máquina, llámese ésta como se llame.*

*En la primera sección del presente trabajo trataré de explicar en lenguaje común, sin tecnicismos, las diferentes formas en que una persona puede utilizar una computadora. En la segunda parte se hará un programa para resolver un problema concreto, dejando para la tercera sección la aplicación del resultado obtenido en la segunda para deducir un resultado nuevo referente al álgebra de Cayley.*

## 1. Diferentes formas de comunicarse con la computadora.

El llamado "cerebro" de la computadora está formado por circuitos electrónicos, y cada uno de ellos, una vez activado, ejecuta una determinada tarea. De tal forma, que a cada circuito está asociada, lo que suele llamarse una instrucción de máquina, que no es otra cosa sino el código de la estructura que causa la conexión del circuito correspondiente de antemano diseñado y montado. El conjunto de códigos que causa las conexiones de los circuitos correspondientes, es lo que se llama el "lenguaje" de la máquina.

Otra parte de la máquina, que llamaremos el procesador central, se ocupa de ir ejecutando secuencialmente, activando y cerrando circuitos a velocidades difíciles de imaginar, una lista de códigos que forman lo que llamaremos un programa. Un código es un número de dos o tres cifras, dependiendo del tamaño de la computadora, escrito en base ocho. (En seguida veremos el porqué de la base ocho.) Estos códigos, que reconoce el procesador central están guardados en un almacén electrónico llamado "memoria" de la máquina (más adelante veremos cómo llegan a dicho almacén estos números), que está compuesto de casilleros, llamados palabras, y cada casillero tiene un número determinado de posiciones, llamados *bits* (contracción de **b**inary dig**it**), y que son anillos muy pequeños, que se llaman núcleos, de material ferromagnético, con la posibilidad de conservar permanentemente una corriente eléctrica inducida en uno de dos posibles sentidos; para fijar ideas supondremos a lo largo del artículo que son 24. Si en un núcleo la corriente gira en el sentido de las manecillas del reloj, el procesador lo entiende como un cero y si gira en sentido contrario lo entiende como un uno.

En esta forma se origina un número de 24 ceros o unos, es decir, un número de

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de octubre de 1971.

24 cifras en base dos, que agrupados de tres en tres proporciona un número de 8 cifras en base 8. Las cifras más significativas, llamadas la parte superior del casillero, son las que se utilizan para el código de la instrucción. El resto de las cifras, la parte inferior del casillero, se utiliza para direccionar (o hacer referencia a) cualquier casillero del almacén electrónico. La capacidad del almacén electrónico se mide en unidades de $2^{10} = 1024$ casilleros, que se designan por la letra *K*. Una computadora pequeña suele tener 8 *K* de almacenamiento y una grande hasta 256 *K* (o más) casilleros de almacenamiento. El tamaño del casillero en las computadoras más grandes llega a ser hasta de 60 posiciones (o más), y en las pequeñas, de 12 posiciones.

Un circuito típico, que no falta en ninguna computadora, es el que produce un salto, es decir, el procesador central hace una conexión que realiza la siguiente función: "ejecutar la conexión que se indica en el casillero número tal", lo cual se logra poniendo en el casillero, cuyo contenido está siendo procesado, el número 01014377 (donde se supone que el código de salto es 010 y la dirección del casillero la 14377).

La dificultad de manejar códigos puramente numéricos salta a la vista. Entonces, una primera simplificación es representar cada código por una abreviatura, mnemónico (de dos a cuatro letras), que nos recuerda la tarea que realiza. Así, por ejemplo, si el código de salto es 010 podemos convenir en que lo representaremos por SLI (abreviatura de **s**a**l**to **i**ncondicional). Desgraciadamente para nosotros (los de habla castellana), hasta el momento, ninguna de las abreviaturas de los lenguajes conocidos están en nuestro idioma.

Análogamente, las direcciones se sustituyen por palabras, que pueden tener como máximo seis u ocho letras (dependiendo del tipo de computadora). Así, el código anterior quedaría: SLI ITERA, donde ITERA es la dirección simbólica de un casillero que contiene otro código que sería, por ejemplo: MUA NUM, que diría, por ejemplo, multiplica el contenido de A por el contenido de NUM y guarda el resultado en A.

Este tipo de lenguajes se llaman ensambladores, porque cada mnemónico y su dirección asociada es traducido y guardado en el almacén electrónico generalmente en un solo casillero. Así, SLI ITERA ensamblaría como 01014377.

Por tanto, un lenguaje ensamblador es lo más cercano al lenguaje de la máquina y otorga así el máximo de posibilidades para dirigir la máquina en la forma que se desee; con el grave inconveniente de que es difícil aprenderlo para la mayoría de la gente. Por tal motivo, se han diseñado diferentes lenguajes (FORTRAN, ALGOL, COBOL, LISP, etc.), cada uno apropiado a un uso determinado. Son lenguajes que el usuario puede aprender con facilidad, que al momento de pasarlos al almacén electrónico de la computadora son traducidos al lenguaje de la máquina por un programa que se llama compilador, y que está escrito en el lenguaje ensamblador de la máquina.

Estos compiladores, al tener que prever situaciones muy generales, producen unos programas que son más largos, y por tanto, más lentos que los que uno podría escribir para ese caso concreto en el lenguaje ensamblador. Aunque en la mayor parte de los casos, siendo la realización corta, no se apreciaría la diferencia.

Resulta una maravilla del ingenio humano el que todo esto haya podido ser logrado con la sencilla y feliz idea de dos únicos elementos, el uno y el cero, conectar o desconectar.

Para que una computadora pueda leer un programa escrito en el lenguaje ensamblador de otra computadora, se debe escribir un programa —que se llama "simulador"— que simule cada código de la segunda computadora por medio de uno o varios códigos de la primera.

Para hacernos una idea de la velocidad con que operan las computadoras daremos algunos datos. La unidad patrón actual para medir el tiempo es el microsegundo, que es la millonésima parte de un segundo. El promedio de lo que tarda el procesador central en recoger un código de un casillero del almacén y conectar el circuito correspondiente es de tres microsegundos (para una computadora de tamaño mediano), es decir, que puede hacer en un segundo 333.333 conexiones en el orden prefijado por el programa que está en el almacén electrónico, marca distinta a la primera (con excepción de ciertos tipos de cintas magnéticas que han sido grabadas en el modo BCD).

En el lenguaje técnico cuando se habla de "hardware", se entiende que son los circuitos (la parte material), y cuando se habla de "software", se entiende que son códigos que forman un programa que ejecuta una tarea determinada.

El equipo periférico de una computadora generalmente lo constituyen: lectora de tarjetas, lectora de cinta de papel, impresora, perforadora de tarjetas, perforadora de cinta de papel, graficadores, tubos de rayos catódicos, unidades de cintas magnéticas y unidades de discos. Hay equipo periférico más especializado que no citamos.

Algo que nunca ha pasado previamente por el almacén de la computadora, debe entrar a él generalmente por la lectora de tarjetas (es el medio más rápido, teniendo capacidad para leer en un minuto 1200 tarjetas de 80 columnas cada una, es decir, lee 1600 caracteres por segundo); por la lectora de cinta de papel perforada (350 caracteres por segundo, cuatro veces más lenta que la lectora de tarjetas), o bien por teclado de máquina de escribir (cuya velocidad depende de la habilidad del mecanógrafo; una buena mecanógrafa escribe dos caracteres por segundo).

La computadora tiene la posibilidad de grabar el contenido de los casilleros de su almacén electrónico en cinta magnética o en disco (magnetizando pequeños puntitos en dos direcciones diferentes, 0 y 1) y formar así archivos electrónicos, y volver a pasar a su almacén —para procesarlo— lo ya grabado. Pero hasta la fecha, lo grabado por una computadora en una cinta magnética o disco no puede ser pasado al almacén electrónico correspondiente de otra computadora de marca distinta a la primera. El promedio de tiempo necesario para grabar en cinta magnética, con densidad de 800 bits por pulgada, es de 41.666 caracteres por segundo (se entiende por caracteres, las letras, números y símbolos especiales como +, —, etc.), y en disco es de 200.000 caracteres por segundo. Lo cual da una idea de las velocidades con que se pueden procesar datos, que ya están grabados en cinta magnética o discos. Todas estas cifras se están superando constantemente en los nuevos modelos que salen al mercado.

El equipo de salida para poder ser leído visualmente es el más lento. Así, por ejemplo, una impresora de líneas escribe mil líneas por minuto, y cada línea tiene 136 caracteres, lo que da un porcentaje de 216 caracteres por segundo (ya hay impresoras que escriben una hoja entera de un solo golpe). Si se escribe por máquina de escribir eléctrica conectada a la computadora, el porcentaje es de 18 caracteres por segundo (nueve veces más rápido que una mecanógrafa de primera).

## 2. Una aplicación al cálculo de determinantes.

En muchos libros podemos encontrar algoritmos, y programas para esos algoritmos, que resuelven el problema de encontrar el determinante de una matriz cuadrada, cuyas entradas son números reales o inclusive números complejos. Aquí nos proponemos resolver el problema para matrices cuyas entradas son variables. Y en concreto, calcularemos el polinomio cuyo cuadrado es el determinante de una matriz antisimétrica de orden par. En [1] página 252 encontramos que:

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_5 & 0 \end{vmatrix} = (x_1 x_6 - x_2 x_5 + x_3 x_4)^2,$$

así como la demostración de que el determinante de una matriz antisimétrica de orden par es el cuadrado de un polinomio homogéneo respecto de sus elementos.

Un primer paso para resolver el problema es escribir un programa que calcule la permutación sucesiva de una dada, suponiendo las permutaciones de $n$ números ordenadas de menor a mayor. Así la primera permutación sería $(1, 2, ..., n-1, n)$ y la última $(n, n-1, ..., 2, 1)$. El algoritmo que hay que programar es el que se indica en [1], página 138, y es lo que se consigue con la subrutina Permsige (*), que está escrita en el lenguaje ensamblador llamado Compass, de una computadora de la serie 3000 de Control Data Corporation. La misma subrutina calcula el signo de la permutación.

El siguiente paso es encontrar el término del determinante que se corresponde con una permutación determinada, lo cual se hace por medio de la subrutina Tercorpe (*), que forma el término que corresponde a la permutación $(i_1, i_2, ..., i_n)$, recogiendo el término $i_1$-ésimo de la primera fila, el $i_2$-ésimo de la segunda y así sucesivamente hasta $i_n$-ésimo de la fila $n$-ésima. En el caso concreto, que se trata aquí, los elementos de la matriz son variables con coeficientes más uno o menos uno. Para el caso general, con coeficientes cualesquiera, habría que introducir una pequeña modificación. El término encontrado es un monomio que queda en el arreglo Termdet, que contiene en la entrada $i$-ésima (Termdet + $i$) el exponente de la variable $i$-ésima y en Termdet + 0 el coeficiente (en este caso + 1 ó — 1).

Una tercera subrutina, Permcorr (*), calcula una permutación que se corresponda con un monomio de grado $n$ en las variables que aparecen en la matriz. Esta subrutina se utilizará para encontrar el signo de los términos del polinomio solución,

(*) Puede consultarse en el Centro Nacional de Cálculo de México.

como se explicará más adelante. Para escribir esta subrutina hubo que resolver una dificultad digna de mencionarse, y es la que surge cuando el orden en que se buscan las variables en la matriz no es el adecuado. Así, por ejemplo, si queremos buscar una permutación de 8 elementos que se corresponda con el monomio de grado 8 que sigue $x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, x_{23}, x_{14}, x^2_{28}$, encontramos $x_1$ en el lugar (1, 2) de la matriz, después $x_2$ en el lugar (2, 5), sigue $x_{20}$ en el lugar (4, 6), al tratar de buscar $x_{23}$ nos encontramos que la variable $x_{23}$ situada en el lugar (5, 6) no se puede tomar porque la columna 6 está ya ocupada por $x_{20}$ y la que está en el lugar (6, 5) tampoco se puede tomar, pues la columna 5 está ya ocupada por $x_{10}$. Entonces se hace el cambio de $x_{20}$ por $x_{23}$ y se busca de nuevo la permutación que corresponde a $x_1, x_2, x_{10}, x_{23}, x_{20}, x_{14}, x^2_{28}$ y se encuentra (2, 5, 1, 3, 6, 4, 8, 7). En este caso la incompatibilidad surgió por las columnas y por variables en la mitad superior de la matriz, puede ocurrir también incompatibilidad por filas, y variables ambas en la parte superior de la matriz o una variable en la parte superior y otra en la inferior, por ejemplo, para el monomio $x_1\, x_2\, x_{14}\, x_{12}\, x_{23}\, x_{19}\, x_{28}\, x_{27}$, la impatibilidad ocurre con $x_{19}$, pues la primera vez que aparece $x_{19}$ es en la fila 4, ya ocupada por $x_{14}$ situada en la parte inferior de la matriz, y la segunda vez en la fila 5, ya ocupada por $x_{23}$ situada en la parte superior de la matriz. Esta dificultad se resuelve en la subrutina Permcorr por un sistema de banderas (variables Nopaso 1, Nopaso 2, Nopaso 3, Nopaso 4, que cierran o abren el camino a los diferentes tipos de intercambio de variables).

El programa principal irá inspeccionando cada término del determinante y comprobará si es de la forma $x\,i^2_1, x\,i^2_2, \ldots, x\,i^2_{n/2}$, en cuyo caso lo escribirá sin los cuadrados y calculando previamente el signo. Al primero que se encuentre de esta forma se le pondrá el signo más, al encontrar el segundo se multiplicará por el primero, se calculará primeramente una permutación que le corresponda y después el monomio, ya con su signo, correspondiente a dicha permutación, y ese signo será el del segundo término. El mismo proceso se repite para cada término que es cuadrado perfecto. Aunque hay varias permutaciones que corresponden a un mismo monomio $x\,i_1, x\,i_2, \ldots, x\,i_n$, todas proporcionan el mismo signo pues siendo la matriz antisimétrica, la misma variable aparece solamente dos veces, una con signo más y otra con signo menos, por tanto, al invertir dos términos de la permutación las variables correspondientes cambian de signo; y por otra parte, el número de inversiones para pasar de una permutación a otra debe ser par, pues si queremos cambiar la variable $x_i$ que está en el lugar $(i, j)$ de la matriz por la variable $-x_i$ que está en el lugar $(j, i)$, debemos intercambiar la fila $i$ con la fila $j$, y la columna $j$ con la columna $i$; y el caso excepcional $(i, i)$ no hay que considerarlo, pues en esos lugares hay ceros.

Con el programa se calcularon los determinantes de las matrices antisimétricas $(4 \times 4)$, $(6 \times 6)$ y $(8 \times 8)$. El tiempo de máquina fue 4'26". El número de términos del polinomio crece rápidamente, para una matriz $(2n \times 2n)$, dicho número es $(2n - 1)$, $(2n - 3), \ldots, 3$.

### 3. Conmutadores en el álgebra de Cayley.

En [2] encontramos el siguiente resultado: "sea $A$ un álgebra normada con elemento indentidad sobre el campo de los números reales, entonces $A$ es el campo de

Fig. 1. — Programa POLIMATR para la obtención del polinomio cuyo cuadrado es el determinante de una matriz antisimétrica de orden par.

```
COMPASS 3.0/MSDS            POLIMATR                                                     12/09/70  PAGE    2
                                         EXT       CIO,CONVBBCD
                                         EXT       TERCORPE,PERMCORR,PERMSIGE
                                         COMMON
    00000                      N         BSS       1
    00001                      TERMDET   BSS       121
    00172                      PERM      BSS       4
    00176                      M         BSS       1
    00177                      MATRIZ    BSS       256
    00577                      SALAPERM  BSS       4
    00603                      SALATERM  BSS       16
                                         PRG
    00000                      BANDERA   BSS       1
    00001                      FILA      BSS       1
    00002                      PRIMERO   BSS       6
    00010                      PRODUCTO  BSS       16
    00030                      PROTPERM  BSS       4
    00034                      RENGLON   BSS       1
    00035        60606060      SALA1     BCD       11,0
    00036        60606060
    00037        60606060
    00040        60606060
    00041        60606060
    00042        60606060
    00043        60606060
    00044        60606060
    00045        60606060
    00046        60606060
    00047        60606060
    00050        60606060                BCD       3,
    00051        60606060
    00052        60606060
    00053                                BSS       10
    00065        60606060      MARGEN1   BCD       12,
    00066        60606060
    00067        60606060
    00070        60606060
    00071        60606060
    00072        60606060
    00073        60606060
    00074        60606060
    00075        60606060
    00076        60606060
    00077        60606060
    00100        60606060
    00101                      SALA2SIG  BSS       1
    00102                      SALA2VAR  BSS       5
    00107        60606020      SIGMAS    OCT       60606020
    00110        60606040      SIGMENOS  OCT       60606040
    00111                      TERMPOLI  BSS       6
    00117        01606060      TITULO1   BCD       10,1                         POLINOMIO CU
    00120        60606060
    00121        60606060
    00122        60606060
    00123        60606060
COMPASS 3.0/MSDS            POLIMATR                                                     12/09/70  PAGE    3
    00124        60606060
    00125        60606060
    00126        47464331
    00127        45464431
    00130        46602364
    00131        70466023                BCD       14,YO CUADRADO ES EL DETERMINANTE DE LA MAT
    00132        64212451
    00133        21244660
    00134        25626025
    00135        43602425
    00136        63255144
    00137        31452145
    00140        63256024
    00141        25604321
    00142        60442163
    00143        51317160                BCD       8,RIZ ANTISIMETRICA DE ORDEN NN.
    00144        21456331
    00145        62314425
    00146        63513123
    00147        21602425
    00150        60465124
    00151        25456045
    00152        45336060
    00153        60606060      TITULO2   BCD       11,
    00154        60606060
    00155        60606060
    00156        60606060
    00157        60606060
    00160        60606060
    00161        60606060
    00162        60606060
    00163        60606060
    00164        60606060
    00165        60606060
    00166        23212421                BCD       10,CADA VARIABLE XI EN LA MATRIZ SE SUSTITU
    00167        60652151
    00170        31212243
    00171        25606731
    00172        60254560
    00173        43216044
    00174        21635131
    00175        71606225
    00176        60626462
    00177        63316364
    00200        70256047                BCD       3,YE POR I.
    00201        46516031
    00202        33606060
    00203        60606060      TITULO3   BCD       11,
    00204        60606060
    00205        60606060
    00206        60606060
    00207        60606060
    00210        60606060
    00211        60606060
```

```
                                           EMPIEZA EL PRODUCTO DEL PRIMER TERMINO POR EL J-ESIMO.
   00520  14100001 14 0  00001 1            ENI     1,1
   00521  14200000 14 0  00000 2            ENI     0,2
   00522  20100002 20 0 P00002 1            LDA     PRIMERO,1
   00523  40200010 40 0 P00010 2            STA     PRODUCTO,2
   00524  15200001 15 0  00001 2            INI     1,2
   00525  20100111 20 0 P00111 1            LDA     TERMPOLI,1
   00526  40200010 40 0 P00010 2            STA     PRODUCTO,2
   00527  15200001 15 0  00001 2            INI     1,2
   00530  10100530 10 0 P00530 1            ISI     *,1                    (*)=N/2
   00531  01000522 01 0 P00522 0            UJP     *-7
   00532  14100001 14 0  00001 1            ENI     1,1                    CUENTA NUMERO VARIAB DIFERENTES
   00533  14300001 14 0  00001 3            ENI     1,3
   00534  20100007 20 0 P00007 1  INICIO2   LDA     PRODUCTO-1,1           SALTA SI SE BORRO VARIABLE
   00535  03000552 03 0 P00552 0            AZJ,EQ  ITERA2A                NUMERO DE VARIABLE EN Q.
   00536  13077747 13 0  77747 0            SHAQ    -24
   00537  53100000 53 0  00000 1            TIA     1
   00540  53500000 53 1  00000 2            TAI     2
   00541  31000000 31 0 C00000 0            SBA     N                      SI ES EL ULTIMO TERMINO
   00542  03000550 03 0 P00550 0            AZJ,EQ  *+6                    ES DE GRADO UNO.
   00543  20200010 20 0 P00010 2            LDA     PRODUCTO,2
   00544  03000546 03 0 P00546 0            AZJ,EQ  *+2
   00545  03400655 03 1 P00655 0            AQJ,EQ  EXPONEN2
   00546  10200546 10 0 P00546 2            ISI     *,2                    (*)=N-1
   00547  01000543 01 0 P00543 0            UJP     *-4
   00550  14600001 14 1  00001 2            ENA     1
   00551  01000643 01 0 P00643 0            UJP     EXPONENT+1             EXPONENTE ES 1
   00552  10100552 10 0 P00552 1  ITERA2A   ISI     *,1                    (*)=N
   00553  01000534 01 0 P00534 0            UJP     INICIO2
                               SI (B3)=N+1 TODOS LOS TERMINOS TIENEN EXPONENTE UNO, EN CASO CONTRA-
                               RIO HAY QUE COMPLETAR CON CEROS LOS TERMINOS DE SALATERM.
   00554  04300554 04 0 P00554 3            ISE     *,3                    (*)=N+1
   00555  01000660 01 0 P00660 0            UJP     COMPLEO0
   00556  00777777 00 1 X77777 3            RTJ     PERMCORR               PERM CORR QUEDA EN SALAPERM
   00557  01000665 01 0 P00665 0            UJP     SIGTERM
   00560  14600001 14 1  00001 2  ESCRIBE1  ENA     1
   00561  40000000 40 0 P00000 0            STA     BANDERA                SE QUITA BANDERA PRIMER TERM
   00562  14300562 14 0 P00562 3            ENI     *,3                    (*)=N/2
   00563  20300111 20 0 P00111 3            LDA     TERMPOLI,3
   00564  40300002 40 0 P00002 3            STA     PRIMERO,3
   00565  02700563 02 1 P00563 3            IJD     *-2,3
   00566  20000107 20 0 P00107 0            LDA     SIGMAS
   00567  40000111 40 0 P00111 0            STA     TERMPOLI
   00570  40000002 40 0 P00002 0            STA     PRIMERO
   00571  20000111 20 0 P00111 0  ESCRIBE2  LDA     TERMPOLI
   00572  40000101 40 0 P00101 0            STA     SALA2SIG
   00573  14200000 14 0  00000 2            ENI     0,2                    CUENTA CARACTERES A ESCRIBIR
   00574  14100001 14 0  00001 1            ENI     1,1
   00575  20100111 20 0 P00111 1  INICIO6   LDA     TERMPOLI,1
   00576  05600012 05 1  00012 2            ASG     10
   00577  01000613 01 0 P00613 0            UJP     UNCARAC
   00600  01000627 01 0 P00627 0            UJP     DOSCARAC
   00601  10100601 10 0 P00601 1  ITERA6    ISI     *,1                    (*)=N/2
   00602  01000575 01 0 P00575 0            UJP     INICIO6
```



```
   00603  15200064 15 0  00064 2            INI     52,2                   * DE SIGNO +48 MARGEN 128.
   00604  47200611 47 0 P00611 2            STI     NUMCARAC,2
   00605  00700450 00 1 X00450 3            RTJ     CIO
   00606  02000075 02 0  00075 0            02      61
   00607  01000605 01 0 P00605 0            UJP     *-2
   00610  00000324 00 0 P00065 0            00,C    MARGEN1
   00611           40000000       NUMCARAC  OCT     40000000
   00612  01000472 01 0 P00472 0            UJP     INICIO
   00613  42001328 42 0 P00265 2  UNCARAC   SACH    X1CARA+2               (X1CARA)= XI
   00614  20000265 20 0 P00265 0            LDA     X1CARA
   00615  12000014 12 0  00014 0            SHA     12                     (A)=I  X
   00616  42400410 42 1 P00102 0            SACH    SALA2VAR,2
   00617  15200001 15 0  00001 2            INI     1,2
   00620  12000006 12 0  00006 0            SHA     6
   00621  42400410 42 1 P00102 0            SACH    SALA2VAR,2
   00622  15200001 15 0  00001 2            INI     1,2
   00623  12000006 12 0  00006 0            SHA     6
   00624  42400410 42 1 P00102 0            SACH    SALA2VAR,2
   00625  15200001 15 0  00001 2            INI     1,2
   00626  01000601 01 0 P00601 0            UJP     ITERA6
   00627  13077747 13 0  77747 0  DOSCARAC  SHAG    -24
   00630  51000761 51 0 P00761 0            DVA     =010
   00631  42001331 42 0 P00266 1            SACH    X2CARA+1
   00632  43001332 43 0 P00266 2            SQCH    X2CARA+2
   00633  20000266 20 0 P00266 0            LDA     X2CARA
   00634  14300003 14 0  00003 3            ENI     3,3
   00635  12000006 12 0  00006 0            SHA     6
   00636  42400410 42 1 P00102 0            SACH    SALA2VAR,2
   00637  15200001 15 0  00001 2            INI     1,2
   00640  02700635 02 1 P00635 3            IJD     *-3,3
   00641  01000601 01 0 P00601 0            UJP     ITERA6
   00642  14600002 14 1  00002 2  EXPONENT  ENA     2
   00643  41300602 41 0 C00602 3            STQ     SALATERM-1,3
   00644  53420040 53 1  20040 0            TAM     408
   00645  53300000 53 0  00000 3            TIA     3                      SE MULTIPLICA POR 4
   00646  12000002 12 0  00002 0            SHA     2
   00647  15477773 15 1  77773 0            INA,S   -4                     (B2)=4*(B3)-4 DIRECCIONA EL
   00650  53600000 53 1  00000 2            TAI     2                      CARACTER CERO DE SALATERM-1,3
   00651  53020040 53 0  20040 0            TMA     408
   00652  42403014 42 1 C00603 0            SACH    SALATERM,2
   00653  15300001 15 0  00001 3            INI     1,3                    AUMENTA LA CUENTA
   00654  01000552 01 0 P00552 0            UJP     ITERA2A
   00655  14600000 14 1  00000 2  EXPONEN2  ENA     0
   00656  40200010 40 0 P00010 2            STA     PRODUCTO,2             BORRA VARABLE YA CONTADA
   00657  01000642 01 0 P00642 0            UJP     EXPONENT
   00660  14600000 14 1  00000 2  COMPLEO0  ENA     0
   00661  40300602 40 0 C00602 3            STA     SALATERM-1,3
   00662  10300662 10 0 P00662 3            ISI     *,3                    (*)=N
   00663  01000661 01 0 P00661 0            UJP     *-2
   00664  01000556 01 0 P00556 0            UJP     ITERA2A+4
                               SE PROTEGE PERM Y SE PASA SALAPERM A PERM
   00665  20000000 20 0 C00000 0  SIGTERM   LDA     N                      BITS 23-17 DE MOVE+1 DEBE
   00666  12000021 12 0  00021 0            SHA     17                     CONTENER NUMERO DE CARACTERES
   00667  40000701 40 0 P00701 0            STA     NUEVPERM+1
```

```
COMPASS 3.0/MSOS                POLIMATR                                          12/09/70  PAGE    6
     00354  15477776 15 1  77776 0            INA,S     -1
     00355  40000001 40 0 P00001 0            STA       FILA
     00356  14200001 14 0  00001 2            ENI       1,2
     00357  20000001 20 0 P00001 0  INICIO1   LDA       FILA
     00360  50000000 50 0 C00000 0            MUA       N
     00361  30000001 30 0 P00001 0            ADA       FILA
     00362  53240000 53 0  40000 2            AIA       2                (A)=((FILA)-1)*N+(FILA)-1+(B2)
     00363  53700000 53 1  00000 3            TAI       3               ELEMENTO (FILA,FILA+B1)
     00364  53100000 53 0  00000 1            TIA       1
     00365  40300177 40 0 C00177 3            STA       MATRIZ,3
     00366  20000001 20 0 P00001 0            LDA       FILA
     00367  53240000 53 0  40000 2            AIA       2
     00370  50000000 50 0 C00000 0            MUA       N
     00371  30000001 30 0 P00001 0            ADA       FILA             (A)=((FILA)-1+(B2))*N+(FILA)-1
     00372  53700000 53 1  00000 3            TAI       3               ELEMENTO (FILA+B2,FILA)
     00373  53100000 53 0  00000 1            TIA       1
     00374  16477777 16 1  77777 0            XDA,S     -0
     00375  40300177 40 0 C00177 3            STA       MATRIZ,3
     00376  15100001 15 0  00001 1            INI       1,1
     00377  10200377 10 0 P00377 2  ITERA1    ISI       *,2              (*)=(RENGLON)
     00400  01000357 01 0 P00357 0            UJP       INICIO1
     00401  01000345 01 0 P00345 0            UJP       FORMMATR+1
     00402  20000000 20 0 C00000 0  DIAGONAL  LDA       N
     00403  44000414 44 0 P00414 0            SWA       ITERA2
     00404  15600001 15 1  00001 2            INA       1
     00405  44000413 44 0 P00413 0            SWA       INCREMEN
     00406  44000554 44 0 P00554 0            SWA       ITERA2A+2
     00407  14200000 14 0  00000 2            ENI       0,2
     00410  14100001 14 0  00001 1            ENI       1,1
     00411  14600000 14 1  00000 2            ENA       0
     00412  40200177 40 0 C00177 2            STA       MATRIZ,2
     00413  15200413 15 0 P00413 2  INCREMEN  INI       *,2              (*)=N+1
     00414  10100414 10 0 P00414 1  ITERA2    ISI       *,1              (*)=N
     00415  01000412 01 0 P00412 0            UJP       INCREMEN-1      SE TERMINA DE FORMAR MATRIZ
     00416  20000000 20 0 C00000 0            LDA       N
     00417  44000435 44 0 P00435 0            SWA       ITERA3
     00420  50000000 50 0 C00000 0            MUA       N
     00421  44000432 44 0 P00432 0            SWA       ITERAB
     00422  20000000 20 0 C00000 0            LDA       N
     00423  15600016 15 1  00016 2            INA       14              14 PALABRAS MARGEN IZQUIERDO
     00424  44000443 44 0 P00443 0            SWA       NUMPALA
     00425  14100000 14 0  00000 1  ESCRMATR  ENI       0,1             SE ESCRIBE LA MATRIZ
     00426  14200001 14 0  00001 2            ENI       1,2
     00427  20100177 20 0 C00177 1            LDA       MATRIZ,1
     00430  00700301 00 1 X00301 3            RTJ       CONV8BCD
     00431  41200052 41 0 P00052 2            STQ       SALA1+13,2
     00432  10100432 10 0 P00432 1  ITERAB    ISI       *,1
     00433  01000435 01 0 P00435 0            UJP       *+2
     00434  01000450 01 0 P00450 0            UJP       CUARTITU
     00435  10200435 10 0 P00435 2  ITERA3    ISI       *,2
     00436  01000427 01 0 P00427 0            UJP       ESCRMATR+2
     00437  00700312 00 1 X00312 3            RTJ       CIO
     00440  02000075 02 0  00075 0            02        61
     00441  01000437 01 0 P00437 0            UJP       *-2
```

```
COMPASS 3.0/MSOS                POLIMATR                                          12/09/70  PAGE    7
     00442  00000035 00 0 P00035 0            00        SALA1
     00443  00000443 00 0 P00443 0  NUMPALA   00        *
     00444  00700437 00 1 X00437 3            RTJ       CIO
     00445  13100075 13 0  00075 1            13        61,1
     00446  03200444 03 0 P00444 2            AZJ,GE    *-2
     00447  01000426 01 0 P00426 0            UJP       ESCRMATR+1
     00450  00700444 00 1 X00444 3  CUARTITU  RTJ       CIO
     00451  02000075 02 0  00075 0            02        61
     00452  01000450 01 0 P00450 0            UJP       *-2
     00453  00000231 00 0 P00231 0            00        TITULO4
     00454  00000034 00 0  00034 0            00        28               TERMINA ESCRITURA MATRIZ
```

```
COMPASS 3.0/MSOS                POLIMATR                                          12/09/70  PAGE    8
     00455  14600001 14 1  00001 2            ENA       1               SE FORMA LA PRIMERA PERMUTACION
     00456  42000751 42 0 C00172 1            SACH      PERM+1          QUE PROPORCIONA UN TERMINO DEL
     00457  15600001 15 1  00001 2            INA       1               DETERMINANTE DIFERENTE DE CERO,
     00460  42000750 42 0 C00172 0            SACH      PERM            TENIENDO EN CUENTA QUE EL TERMI-
     00461  54200000 54 0 C00000 2            LDI       N,2             NO EN EL LUGAR (1,1) ES CERO.
     00462  53200000 53 0  00000 2            TIA       2
     00463  42400747 42 1 C00171 3            SACH      PERM-1,2
     00464  10600003 10 1  00003 2            ISD       3,2
     00465  01000462 01 0 P00462 0            UJP       *-3
     00466  14600001 14 1  00001 2            ENA       1
     00467  40000001 40 0 C00001 0            STA       TERMDET          PONE SIGNO PRIMERA PERMUTACION
     00470  00777777 00 1 X77777 3            RTJ       TERCORPE         SI (A)=0 EL DETERMINANTE TIENE
                                   TODOS LOS TERMINOS IGUALES A CERO, QUE NO ES EL CASO ACTUAL.
     00471  00700477 00 1 P00477 3            RTJ       CUADRPER
     00472  00777777 00 1 X77777 3  INICIO    RTJ       PERMSIGE
     00473  03000272 03 0 P00272 0            AZJ,EQ    PROBLENN         SI (A)=0 NO HAY PERM QUE SIGA
     00474  00700470 00 1 X00470 3            RTJ       TERCORPE         SI (A)=0 NO HAY MAS TERMINOS
     00475  03000272 03 0 P00272 0            AZJ,EQ    PROBLENN         DIFERENTES DE CERO.
     00476  01000471 01 0 P00471 0            UJP       *-5
     00477  01077777 01 0  77777 0  CUADRPER  UJP       **
     00500  14200001 14 0  00001 2            ENI       1,2              TERMDET+X CONTIENE EL EXPONENTE
     00501  14100001 14 0  00001 1            ENI       1,1              DE LA VARIABLE X-ESIMA.
     00502  20100001 20 0 C00001 1  INICIO1A  LDA       TERMDET,1
     00503  04600000 04 1  00000 2            ASE       0
     00504  01000510 01 0 P00510 0            UJP       GRADO
     00505  10100505 10 0 P00505 1  ITERA1A   ISI       *,1              (*)=M=NUMERO VARIABLES EN MATR
     00506  01000502 01 0 P00502 0            UJP       INICIO1A
     00507  01000516 01 0 P00516 0            UJP       SIGNO            TERM EXAMINADO ES CUADR. PERF.
     00510  04600002 04 1  00002 2  GRADO     ASE       2                GRADO ES 0,1 O 2.
     00511  01000477 01 0 P00477 0            UJP       CUADRPER         TERM EXAMINADO NO CUADR. PERF.
     00512  53100000 53 0  00000 1            TIA       1                (B1)=NUMERO DE VARIABLE
     00513  40200111 40 0 P00111 2            STA       TERMPOLI,2       PRIMERA PALABRA DE TERMPOLI
     00514  15200001 15 0  00001 2            INI       1,2              ES PARA EL SIGNO.
     00515  01000505 01 0 P00505 0            UJP       ITERA1A
     00516  20000000 20 0 P00000 0  SIGNO     LDA       BANDERA
     00517  03000560 03 0 P00560 0            AZJ,EQ    ESCRIBE1         PRIMER TERMINO.
```

```
00212          60606060
00213          60606060
00214          60606060
00215          60606060              BCD        11,        LA MATRIZ SE ESCRIBE A CONTINUACION.        34
00216          60606060
00217          60606060
00220          43216044
00221          21635131
00222          71606225
00223          60256223
00224          51312225
00225          60216023
00226          46456231
00227          45642123
00230          31464533                                                     EL POLINOMIO            35
00231          00606060     TITULO4  BCD        10,0
00232          60606060
00233          60606060
00234          60606060
00235          60606060
00236          60606060
00237          60606060
00240          25436047
00241          46433146
00242          46443146              BCD        10, SOLUCION, QUE ES HOMOGENEO, SE ESCRIBE            36
00243          60624643
00244          64233146
00245          45736050
00246          64256025
00247          62603046
00250          44462725
00251          45254673
00252          60622560
00253          25622351
00254          31222560              BCD        8,ENSEGUIDA A TERMINO POR RENGLON.                    37
00255          25456225
00256          27643124
00257          21602160
00260          63255144
00261          31454660
00262          47465160
00263          51254527
00264          43464633                                                                              38
00265          60676060     X1CARA   BCD        1, X                                                 39
00266          67606060     X2CARA   BCD        1,X
```



```
                                                                                             41
                                     ENTRY      POLIMATR                                      42
00267  01077777 01 0  77777 0  POLIMATR UJP     **                                            43
00270  14600002 14 1  00002 2           ENA     2                                             44
00271  40000000 40 0 C00000 0           STA     N                                             45
00272  20000000 20 0 C00000 0  PROBLENN LDA     N           SE CALCULARA EL DETERMINANTE      46
00273  04600010 04 1  00010 2           ASE     8           PARA N=4,6,8.                     47
00274  01000276 01 0 P00276 0           UJP     *+2         DEVUELVE CONTROL, FIN PROGRAMA    48
00275  01000267 01 0 P00267 0           UJP     POLIMATR                                      49
00276  15600002 15 1  00002 2           INA     2                                             50
00277  40000000 40 0 C00000 0           STA     N                                             51
00300  40000034 40 0 P00034 0           STA     RENGLON                                       52
00301  00777777 00 1 X77777 3           RTJ     CONVBBCD                                      53
00302  43000650 43 0 P00152 0           SQCH    TITULO1+108                                   54
00303  12477771 12 1  77771 0           SHQ     -6                                            55
00304  43000647 43 0 P00151 3           SQCH    TITULO1+107 SE PONEN TRES TITULOS             56
00305  14100002 14 0  00002 1           ENI     2,1                                           57
00306  14600117 14 1 P00117 2           ENA     TITULO1                                       58
00307  44000315 44 0 P00315 0           SWA     COMIENTI                                      59
00310  14600034 14 1  00034 2           ENA     28                                            60
00311  44000316 44 0 P00316 0           SWA     NUMPALAB                                      61
00312  00777777 00 1 X77777 3  ESCTITUL RTJ     CIO                                           62
00313  02000075 02 0  00075 0           02      61                                            63
00314  01000312 01 0 P00312 0           UJP     *-2                                           64
00315  00000117 00 0 P00117 0  COMIENTI 00      TITULO1                                       65
00316  00000034 00 0  00034 0  NUMPALAB 00      28                                            66
00317  02500745 02 1 P00745 1           IJD     TITULOS,1   BANDERA=0 INDICARA QUE SE ESTA    67
00320  14600000 14 1  00000 2           ENA     0           CALACULANDO EL PRIMER TERMINO.    68
00321  40000000 40 0 P00000 0           STA     BANDERA                                       69
00322  20000000 20 0 C00000 0           LDA     N                                             70
00323  44000552 44 0 P00552 0           SWA     ITERA2A                                       71
00324  44000662 44 0 P00662 0           SWA     COMPLE00+2                                    72
00325  15477776 15 1  77776 0           INA,S   -1                                            73
00326  44000712 44 0 P00712 0           SWA     INICIO4-1                                     74
00327  44000546 44 0 P00546 0           SWA     ITERA2A-4                                     75
00330  50000000 50 0 C00000 0           MUA     N                                             76
00331  12077776 12 0  77776 0           SHA     -1          SE DIVIDE POR 2.                  77
00332  40000176 40 0 C00176 0           STA     M           PONE NUMERO DE VARIABLES.         78
00333  44000505 44 0 P00505 0           SWA     ITERA1A                                       79
00334  20000000 20 0 C00000 0           LDA     N                                             80
00335  12077776 12 0  77776 0           SHA     -1          (A)=N/2                           82
00336  44000530 44 0 P00530 0           SWA     INICIO2-4                                     83
00337  44000562 44 0 P00562 0           SWA     ESCRIBE1+2                                    84
00340  44000601 44 0 P00601 0           SWA     ITERA6                                        85
00341  12000001 12 0  00001 0           SHA     1           (A)=N                             86
00342  15477775 15 1  77775 0           INA,S   -2                                            87
00343  44000713 44 0 P00713 0           SWA     INICIO4     NUMERA VARIABLES                  88
00344  14100001 14 0  00001 1  FORMMATR ENI     1,1                                           89
00345  20000034 20 0 P00034 0           LDA     RENGLON                                       90
00346  15477776 15 1  77776 0           INA,S   -1                                            91
00347  03000402 03 0 P00402 0           AZJ,EQ  DIAGONAL                                      92
00350  40000034 40 0 P00034 0           STA     RENGLON                                       93
00351  44000377 44 0 P00377 0           SWA     ITERA1                                        94
00352  20000000 20 0 C00000 0           LDA     N                                             95
00353  31000034 31 0 P00034 0           SBA     RENGLON
```

```
COMPASS 3.0/MSOS              POLIMATR                                                    12/09/70  PAGE   11
     00670  40000705 40 0 P00705 0            STA       MUEVSAPE+1          A MOVER,
     00671  40000741 40 0 P00741 0            STA       MUEVPROP+1
     00672  11000750 11 0 C00172 0            ECHA      PERM
     00673  46000701 46 0 P00701 0            SCHA      MUEVPERM+1
     00674  11002774 11 0 C00577 0            ECHA      SALAPERM
     00675  46000705 46 0 P00705 0            SCHA      MUEVSAPE+1
     00676  11000140 11 0 P00030 0            ECHA      PROTPERM
     00677  46000741 46 0 P00741 0            SCHA      MUEVPROP+1
     00700  72000140 72 0 P00030 0  MUEVPERM  MOVE      77B,PERM,PROTPERM
     00701  37400750 37 1 C00172 0
     00702  77604000 77 1  04000 2            PAUS      4000B
     00703  01000702 01 0 P00702 0            UJP       *-1
     00704  72000750 72 0 C00172 0  MUEVSAPE  MOVE      77B,SALAPERM,PERM
     00705  37402774 37 1 C00577 0
     00706  77604000 77 1  04000 2            PAUS      4000B
     00707  01000706 01 0 P00706 0            UJP       *-1
                                   SE CALCULA EL SIGNO DE LA PERMUTACION
     00710  14600001 14 1  00001 2            ENA       1
     00711  40000001 40 0 C00001 0            STA       TERMDET
     00712  14100712 14 0 P00712 1            ENI       *,1                 (*)=N-1
     00713  14200713 14 0 P00713 2  INICIO4   ENI       *,2                 (*)=N-2
     00714  22400750 22 1 C00172 0            LACH      PERM,1
     00715  23400750 23 1 C00172 0            LQCH      PERM,2              SI A MENOR QUE Q CAMBIA SIGNO
     00716  03600721 03 1 P00721 2            AQJ,GE    ITERA4
     00717  24000001 24 0 C00001 0            LCA       TERMDET
     00720  40000001 40 0 C00001 0            STA       TERMDET
     00721  10600000 10 1  00000 2  ITERA4    ISD       0,2
     00722  01000714 01 0 P00714 0            UJP       INICIO4+1
     00723  53100000 53 0  00000 1            TIA       1
     00724  15477775 15 1  77775 0            INA,S     -2
     00725  53600000 53 1  00000 2            TAI       2
     00726  10500001 10 1  00001 1            ISD       1,1
     00727  01000714 01 0 P00714 0            UJP       INICIO4+1
     00730  00700474 00 1 X00474 3            RTJ       TERCORPE
     00731  20000001 20 0 C00001 0            LDA       TERMDET             TERMDET CONTIENE EL SIGNO DEL
                                  MONOMIO CORRESPONDIENTE A LA PERMETUCION EN PERM.
     00732  05400001 05 1  00001 0            ASG,S     1
     00733  01000736 01 0 P00736 0            UJP       *+3
     00734  20000107 20 0 P00107 0            LDA       SIGMAS
     00735  01000737 01 0 P00737 0            UJP       *+2
     00736  20000110 20 0 P00110 0            LDA       SIGMENOS
     00737  40000111 40 0 P00111 0            STA       TERMPOLI
     00740  72000750 72 0 C00172 0  MUEVPROP  MOVE      77B,PROTPERM,PERM
     00741  37400140 37 1 P00030 0
     00742  77604000 77 1  04000 2            PAUS      4000B
     00743  01000742 01 0 P00742 0            UJP       *-1
     00744  01000571 01 0 P00571 0            UJP       ESCRIBE2
     00745  01100746 01 0 P00746 1  TITULOS   UJP       *+1,1
     00746  01000754 01 0 P00754 0            UJP       TERTITUL
     00747  14600153 14 1 P00153 2            ENA       TITULO2
     00750  44000315 44 0 P00315 0            SWA       COMIENTI
     00751  14600030 14 1  00030 2            ENA       24
     00752  44000316 44 0 P00316 0            SWA       NUMPALAB
     00753  01000312 01 0 P00312 0            UJP       ESCTITUL

COMPASS 3.0/MSOS              POLIMATR                                                    12/09/70  PAGE   12
     00754  14600203 14 1 P00203 2  TERTITUL  ENA       TITULO3
     00755  44000315 44 0 P00315 0            SWA       COMIENTI
     00756  14600026 14 1  00026 2            ENA       22
     00757  44000316 44 0 P00316 0            SWA       NUMPALAB
     00760  01000312 01 0 P00312 0            UJP       ESCTITUL
                                              END       POLIMATR

LITERALS
00761          00000012

                                   NUMBER OF LINES WITH DIAGNOSTICS      0
```

los números reales, o el campo de los números complejos, o el álgebra de los cuaternios o el álgebra de los números de Cayley".

A medida que se va subiendo en la cadena anterior, se pierde alguna propiedad algebraica, así al pasar de los complejos a los cuaternios se pierde la conmutatividad, aunque no totalmente, pues conserva la propiedad de ser alternativa. El álgebra de Cayley resulta ser la única álgebra de este tipo (consultar [3]).

Fig. 2. — Aplicación del programa anterior a la obtención de los polinomios cuyos determinantes son las matrices antisimétricas de orden 4 y 6.

```
POLINOMIO CUYO CUADRADO ES EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ ANTISIMETRICA DE ORDEN  4.
          CADA VARIABLE XI EN LA MATRIZ SE SUSTITUYE POR I.
                LA MATRIZ SE ESCRIBE A CONTINUACION.

                     0   1   2   3

                    -1   0   4   5

                    -2  -4   0   6

                    -3  -5  -6   0

EL POLINOMIO SOLUCION, QUE ES HOMOGENEO, SE ESCRIBE ENSEGUIDA A TERMINO POR RENGLON.
               +X1 X6
               -X2 X5
               +X3 X4
```

```
POLINOMIO CUYO CUADRADO ES EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ ANTISIMETRICA DE ORDEN  6.
          CADA VARIABLE XI EN LA MATRIZ SE SUSTITUYE POR I.
                LA MATRIZ SE ESCRIBE A CONTINUACION.

                     0   1   2   3   4   5

                    -1   0   6   7   8   9

                    -2  -6   0  10  11  12

                    -3  -7 -10   0  13  14

                    -4  -8 -11 -13   0  15

                    -5  -9 -12 -14 -15   0

EL POLINOMIO SOLUCION, QUE ES HOMOGENEO, SE ESCRIBE ENSEGUIDA A TERMINO POR RENGLON.
               +X1 X10 X15
               -X1 X11 X14
               +X1 X12 X13
               -X2 X7 X15
               +X2 X8 X14
               -X2 X9 X13
               +X3 X6 X15
               -X3 X8 X12
               +X3 X9 X11
               -X4 X6 X14
               +X4 X7 X12
               -X4 X9 X10
               +X5 X6 X13
               -X5 X7 X11
               +X5 X8 X10
```

Los números de Cayley son los elementos de $R^8$ (octógonos) con la siguiente multiplicación: $x \cdot y = (x_1, x_2, \ldots, x_8)\, A(y)$, $A(y)$ es la matriz $8 \times 8$ que se escribe a continuación:

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\
-y_2 & y_1 & -y_4 & y_3 & -y_6 & y_5 & y_8 & -y_7 \\
-y_3 & y_4 & y_1 & -y_2 & -y_7 & -y_8 & y_5 & y_6 \\
-y_4 & -y_3 & y_2 & y_1 & -y_8 & y_7 & -y_6 & y_5 \\
-y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\
-y_6 & -y_5 & y_8 & -y_7 & y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 \\
-y_7 & -y_8 & -y_5 & y_6 & y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 \\
-y_8 & y_7 & -y_6 & -y_5 & y_4 & y_3 & -y_2 & y_1
\end{array}\right|$$

que podemos abreviar con la siguiente notación:

$$Y_i = \begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} \\ -y_{i+1} & y_i \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

y observando que $E\,Y_i = Y'_i\,E$, $E\,Y'_i = Y_i\,E$, donde $Y'_i$ indica la matriz transpuesta de $Y_i$. La multiplicación anterior queda expresada por:

$$(3.1) \qquad x \cdot y = x \begin{vmatrix} Y_1 & Y_3 & Y_5 & E\,Y_7 \\ -Y'_3 & Y'_1 & -E\,Y_7 & Y_5 \\ -Y'_5 & E\,Y_7 & Y'_1 & -Y_3 \\ -E\,Y_7 & -Y'_5 & Y'_3 & Y_1 \end{vmatrix}$$

El conjugado de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_8)$ se define por $\bar{x} = (x_1, -x_2, \ldots, -x_8)$.

Además del conmutador $[x, y] = x\,y - y\,x$, se puede definir un "conmutador fuerte" por $\{x, y\} = x\,y - \bar{x}\,\bar{y} = x\,y - \overline{\bar{y}\,\bar{x}}$.

*Lema 3.2.* — Para $x \neq 0$, $y \neq 0$ se tiene que $\{x, y\} = 0$ si y sólo si $x = \lambda\,\bar{y}$, donde $\lambda$ es un número real, o bien, $x, y$ son ambos imaginarios puros ($i \cdot e \cdot x_1 = y_1 = 0$).

Es obvio que $x = \lambda\,\bar{y}$ implica $\{x, y\} = \{\lambda\,\bar{y}, y\} = \lambda\,(\bar{y}\,y - \overline{\bar{y}\,y}) = \lambda\,(\bar{y}\,y - \bar{y}\,y) = 0$, análogamente si $x_1 = y_1 = 0$, se tiene $\bar{x} = -x$, $\bar{y} = -y$, y el resultado es inmediato.

Supongamos ahora que $\{x, y\} = 0$.

De (3.1) deducimos el producto $x \cdot \bar{y}$, cambiando de signo todas las componentes de $y$ menos la primera, cuyo efecto en la matriz es:

$$(3.3) \qquad x \cdot \bar{y} = x \begin{vmatrix} Y'_1 & -Y_3 & -Y_5 & -E\,Y_7 \\ Y'_3 & Y_1 & E\,Y_7 & -Y_5 \\ Y'_5 & -E\,Y_7 & Y_1 & Y'_3 \\ E\,Y_7 & Y'_5 & -Y'_3 & Y'_1 \end{vmatrix}$$

Para calcular ahora $\bar{x} \cdot \bar{y}$, lo hacemos a partir de (3.3) multiplicando todas las filas de la matriz en las $Y_i$ por $-1$, excepto la primera, y dicha operación da por resultado:

$$(3.4) \qquad \bar{x} \cdot \bar{y} = x \begin{vmatrix} E\,Y_1 & -E\,Y_3 & -E\,Y_5 & -E^2\,Y_7 \\ -Y'_3 & -Y_1 & -E\,Y_7 & Y_5 \\ -Y'_5 & E\,Y_7 & -Y_1 & Y'_3 \\ -E\,Y_7 & -Y'_5 & Y'_3 & -Y'_1 \end{vmatrix}$$

Ahora, de (3.1) y (3.4) deducimos:

$$
(3.5) \qquad \bar{x}\;\bar{y} - x \cdot y = x \begin{vmatrix} Y_1\,(E - I & -(E+I)\,Y_3 & -(E+I)\,Y_5 & -(I+E)\,Y_7 \\ 0 & -Y_1 - Y'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_1 - Y'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Y'_1 - Y_1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= -2\,(0,\; x_1\,y_2 + x_2\,y_1,\; \ldots,\; x_1\,y_8 + x_8\,y_1) = 0
$$

implica $x_1 = y_1 = 0$, o bien, $x_i/x_1 = y_i/y_1$ para $i = 2, \ldots, 8$, y el lema queda demostrado.

Escribamos ahora el número de Cayley como una pareja $(x_r, x_c)$, donde $x_r$ es un número real y $x_c$ es un elemento de R. Entonces, se tiene el siguiente resultado:

*Lema 3.6.* — Sea $y$ tal que $y_c \neq 0$, entonces $[x, y] = 0$ si y sólo si $x_c = \lambda\, y_c$.

En efecto, $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x = x \cdot Y - x \cdot Y^*$, donde $Y^*$ se calcula con la condición $y \cdot X = x \cdot Y^*$. Para $Y^*$ obtenemos la siguiente matriz:

$$
Y^* = \begin{vmatrix} Y_1 & E\,Y_3 & E\,Y_5 & Y_7 \\ -Y'_3\,E & Y_1 & E\,Y_7 & -Y_5 \\ -Y'_5\,E & -E\,Y_7 & Y_1 & Y_3 \\ -Y'_7 & Y'_5 & -Y'_3 & Y'_1 \end{vmatrix}
$$

de donde se obtiene:

$$
[x, y] = x \cdot (Y - Y^*) = x \begin{vmatrix} 0 & (E - I)\,Y_3 & (E - I)\,Y_5 & (I - E)\,Y_7 \\ -Y'_3\,(E - I) & Y_1 - Y'_1 & 2\,E\,Y_7 & -2\,Y_5 \\ -Y'_5\,(E - I) & -2\,E\,Y_7 & Y_1 - Y'_1 & 2\,Y_3 \\ -Y'_7\,(I - E) & 2\,Y'_5 & -2\,Y'_3 & Y'_1 - Y_1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= -x \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_4 & -y_3 & y_6 & -y_5 & -y_8 & y_7 \\ 0 & -y_4 & 0 & y_2 & y_7 & y_8 & -y_5 & -y_6 \\ 0 & y_3 & -y_2 & 0 & y_8 & -y_7 & y_6 & -y_5 \\ 0 & -y_6 & -y_7 & -y_8 & 0 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & y_5 & -y_8 & y_7 & -y_2 & 0 & -y_4 & y_3 \\ 0 & y_6 & y_5 & -y_6 & -y_3 & y_4 & 0 & -y_2 \\ 0 & -y_7 & y_6 & y_5 & -y_4 & -y_3 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = 0
$$

Vemos, en primer lugar, que el conmutador es imaginario puro, pues su primera componente es siempre cero. Suprimiendo la primera fila y primera columna de la matriz en la $y_i$, obtenemos una matriz antisimétrica $7 \times 7$ $A(y)$, cuyo determinante es, por tanto, igual a cero. Es decir, el sistema homogéneo en las $x_2, \ldots, x_8$ tiene siempre solución diferente de la trivial; y si demostramos que el rango de la matriz en las $y_i$ es igual a 6, quedará probado que hay una sola solución linealmente independiente que nos proporcione un número de Cayley que conmuta con $y$, y como todo número de Cayley conmuta consigo mismo, se sigue que $x_c = \lambda\, y_c$.

Para demostrar que la matriz en las $y_i$ es de rango 6, aplicaremos el resultado encontrado en la sección 2 para una matriz antisimétrica $6 \times 6$. Demostrando que las menores principales $A_{ii}(y)$ de $A(y)$, obtenidos suprimiendo la fila $i$ y la columna $i$, tienen por determinante la expresión:

$$|A_{ii}(y)| = y^2_{i+1} \left( \sum_{j=2}^{8} y^2_j \right)$$

para $i = 1, \ldots, 7$. Por tanto, serán todos iguales a cero si y sólo si $y_2 = y_3 = \ldots = y_8 = 0$, es decir, si el número de Cayley $y = (y_r, y_c)$ es real, lo cual no sucede por la hipótesis del lema. El desarrollo de determinante bastará hacerlo para $A_{11}(y)$, pues los demás se obtienen renumerando las variables. Para calcular $A_{11}(y)$ hacemos las siguientes identificaciones:

$$\begin{array}{lllll}
y_2 = x_1, & y_7 = x_2, & y_8 = x_3, & -y_5 = x_4, & -y_6 = x_5 \\
x_6 = x_3, & x_7 = -x_3, & x_8 = -x_5, & x_9 = x_4, & \\
x_{10} = x_1, & y_3 = x_{11}, & y_4 = x_{12}, & & \\
x_{13} = -x_{12}; & x_{14} = x_{11}, & & & \\
x_{15} = -x_1, & & & &
\end{array}$$

y aplicamos la fórmula para el desarrollo de la matriz antisimétrica $6 \times 6$:

$$[-x^3_1 - x_1 x^2_{11} - x_1 x^2_{12} - x_2(-x_2)(-x_1) + x_2(-x_5) x_{11} - x_2 x_4(-x_{12}) + x^2_3(-x_1) - x_3(-x_5) x_{12} +$$
$$+ x_3 x_4 x_{11} - x_4 x_3 x_{11} + x_4(-x_2) x_{12} - x_5(-x_2) x_{11} + x_5(-x_5) x_1 - x^2_4 x_1 + x_5 x_3(-x_{12})]^2 =$$
$$= [-x_1(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 + x^2_5 + x^2_{11} + x^2_{12})]^2 = y^2_2 \left( \sum_{i=2}^{8} y^2_i \right)^2$$

*Teorema 3.7.* — El centro del álgebra de Cayley es isomorfo al campo de los reales.

Según el lema anterior, los únicos elementos que conmutan con $e_i$ son los de la forma $e_1 + \lambda e_i$. Donde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con la componente $i$-ésima un 1, y las demás, cero. Como todo elemento en el centro debe conmutar con todo $e_i$ ($i = 1, \ldots, 8$), se concluye que los únicos elementos en el centro son los de la forma $\lambda e_1$, que forman un subespacio isomorfo a los reales.

## REFERENCIAS


1. J. REY PASTOR: "Elementos de análisis algebraico", octava edición. Madrid, 1944. Martín-Industria Gráfica.

2. CHARLES W. CURTIS: "The four and eight square problem and division algebras, MAA Studies in Mathematics". Volume 2. Studies in modern algebra, 1963. Distributed by Prentice-Hall, Inc.

3. ERWIN KLEINFELD: "A Characterization of the Cayley number. MAA Studies in Mathematics". Mismo volumen que el anterior.

4. I. CANALS y J. ORTIZ: "La base mínima de un campo de números algebraicos". Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, vol. 15, núm. 1, abril 1970.