EL METODO DE SIMULACION Y LA RESISTENCIA CARACTERISTICA DEL HORMIGON (*)

Por VALENTIN MARTIN JADRAQUE
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

(Continuación)

4. CURVAS DE EFICACIA

Para finalizar este estudio se aborda a continuación el estudio de las curvas de eficacia, es decir, el cálculo de las probabilidades de aceptar o rechazar hormigones aceptables o no aceptables (riesgo del comprador y vendedor).

Para ello, llamaremos σ'_{bk} a la resistencia nominal característica, es decir, la especificada en el proyecto.

A) *Caso de hormigones no aceptables (rechazables).*

Teóricamente, un hormigón, con distribución de resistencia, x, a rotura por compresión $N(\mu, \sigma)$, deberá ser *no aceptable* cuando su resistencia característica $R'_{bk} = \mu - 1{,}645 \cdot \sigma$, sea menor que σ'_{bk} $(R'_{bk} < \sigma'_{bk})$.

Sea, por tanto, $R'_{bk} = \frac{p}{100} \cdot \sigma'_{bk}$ $(0 < p < 100)$.

A.1. *Probabilidad ω_1 de aceptar un hormigón rechazable.*

Dada la muestra de extensión $2 \cdot N$:

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots \leqq x_{N-1} \leqq x_N \leqq \cdots \leqq x_{2N}$$

y siendo:

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N) = 2 \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1}}{N-1} \right) - x_N$$

el estimador de la resistencia característica R'_{bk}, la probabilidad de aceptar un hormigón rechazable viene dada por el área ω_1 sombreada en la figura:

$$\omega_1 = \text{Prob}\,(R \geqq \sigma'_{bk}) = \text{Prob}\,(2 \cdot R_{N-1} - x_N \geqq \sigma'_{bk}) = \text{Prob}\,[\sigma \cdot (2 \cdot R^*_{N-1} - z_N) + \mu \geqq \sigma'_{bk}] =$$
$$= \text{Prob}\,(\sigma \cdot R^* + \mu \geqq \sigma'_{bk})$$

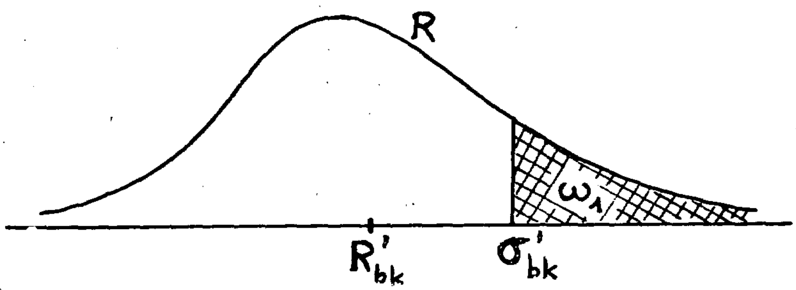


Figura 2.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de septiembre de 1971.

CUADRO 8.

Valores de ω_1 = *Probabilidad de aceptar hormigones rechazables* ($R'_{bk} < \sigma'_{bk}$).

$$\omega_1 = 1 - F^* \left[\frac{100 - p}{p \cdot V} + \frac{164{,}5}{p} \right]$$

Tamaño de la muestra $2 . N$	Coeficiente de variación V	$p = \frac{100 . R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$							
		100	95	90	85	80	75	70	60
6	0,10	0,51	0,29	0,11	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,15	0,51	0,38	0,24	0,12	0,04	0,01	0,00	0,00
	0,20	0,51	0,42	0,32	0,22	0,13	0,06	0,02	0,00
	0,25	0,51	0,44	0,38	0,30	0,22	0,15	0,09	0,01
12	0,10	0,51	0,20	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,15	0,51	0,31	0,24	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00
	0,20	0,51	0,38	0,15	0,13	0,06	0,01	0,00	0,00
	0,25	0,51	0,42	0,32	0,22	0,13	0,06	0,02	0,00
18	0,10	0,53	0,15	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,15	0,53	0,28	0,10	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,20	0,53	0,35	0,20	0,08	0,02	0,00	0,00	0,00
	0,25	0,53	0,41	0,28	0,18	0,08	0,03	0,01	0,00

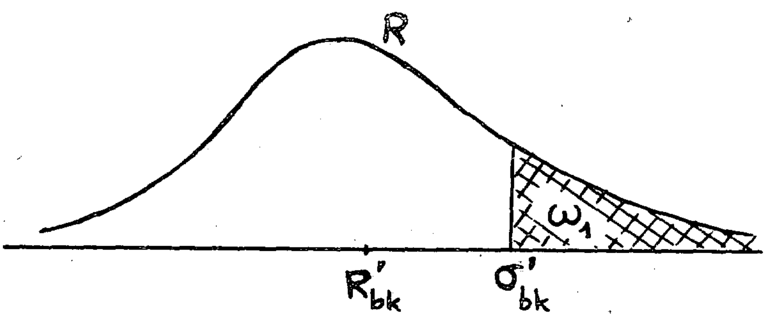


Figura 3.

siendo:

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$$R^*_{N-1} = 2 \cdot \left(\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_{N-1}}{N-1} \right)$$

$$R^* = 2 \cdot R^*_{N-1} - z_N$$

$$\omega_1 = \text{Prob}\left(\sigma \cdot R^* + \mu \geqq \frac{100}{p} \cdot R'_{bk}\right) = \text{Prob}\left(\sigma \cdot R^* + \mu \geqq \frac{100}{p} \cdot (\mu - 1{,}645 \cdot \sigma)\right)$$

$$\omega_1 = \text{Prob}\left[R^* \geqq \frac{100}{p} \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma} - 1{,}645\right) - \frac{\mu}{\sigma}\right]$$

Llamando $V = \frac{\sigma}{\mu}$ al coeficiente de variación se tiene:

$$\omega_1 = \text{Prob}\left[R^* \geqq \frac{100}{p} \cdot \left(\frac{1}{V} - 1{,}645\right) - \frac{1}{V}\right]$$

$$\omega_1 = 1 - F^*\left[\frac{100}{p} \cdot \left(\frac{1}{V} - 1{,}645\right) - \frac{1}{V}\right] = 1 - F^*\left[\frac{100 - p}{p \cdot V} - \frac{164{,}5}{p}\right]$$

siendo $F^*(z)$ la función de distribución del estimador R^* y que se halla tabulada en el cuadro 4 para $2N = 6$, 12 y 18.

En el cuadro 8 se tabula esta probabilidad ω_1 de aceptar hormigones rechazables para diferentes tamaños de muestra, diferentes p y diferentes coeficientes de variación V.

A.2. *Probabilidad ω'_1 de rechazar un hormigón rechazable.*

Será sencillamente $\omega'_1 = 1 - \omega_1$.

B) *Caso de hormigones aceptables.*

Un hormigón con distribución de resistencias, x, a rotura por compresión $N(\mu, \sigma)$, será *aceptable* cuando su resistencia característica $R'_{bk} = \mu - 1{,}645 \cdot \sigma$ sea mayor o igual que $\sigma'_{bk} \cdot (R'_{bk} \geqq \sigma'_{bk})$.

Sea, por tanto, $R'_{bk} = \frac{p'}{100} \cdot \sigma'_{bk}$ $(p' \geqq 100)$.

B.1. *Probabilidad ω_2 de rechazar un hormigón aceptable.*

Dada la muestra de extensión $2N$:

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{N-1} \leqq x_N \leqq \ldots \leqq x_{2N}$$

y siendo:

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N) = 2 \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{N-1}}{N-1}\right) - x_N$$

CUADRO 9.

Valores de ω_2 = *Probabilidad de rechazar hormigones aceptables* ($R'_{bk} \geqq \sigma'_{bk}$).

$$\omega_2 = F^* \left[- \left(\frac{p' - 100}{p' \cdot V} + \frac{164{,}5}{p'} \right) \right]$$

Tamaño de la muestra 2 N	Coeficiente de variación V	$p' = \dfrac{100 \cdot R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$							
		100	105	110	115	120	125	130	140
6	0,10	0,49	0,31	0,19	0,12	0,07	0,04	0,03	0,01
	0,15	0,49	0,38	0,29	0,22	0,17	0,13	0,10	0,06
	0,20	0,49	0,42	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,14
	0,25	0,49	0,44	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,22
12	0,10	0,49	0,22	0,09	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00
	0,15	0,49	0,31	0,20	0,12	0,07	0,04	0,02	0,01
	0,20	0,49	0,37	0,28	0,20	0,15	0,11	0,08	0,05
	0,25	0,49	0,41	0,34	0,28	0,23	0,19	0,16	0,11
18	0,10	0,47	0,16	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,15	0,47	0,27	0,14	0,07	0,03	0,02	0,01	0,00
	0,20	0,47	0,33	0,22	0,15	0,09	0,06	0,04	0,02
	0,25	0,47	0,37	0,29	0,22	0,17	0,13	0,10	0,06

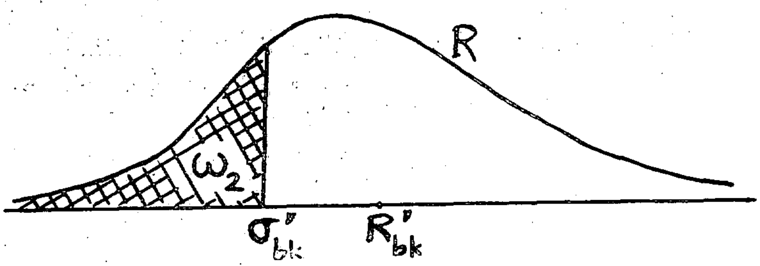


Figura 4.

el estimador de la resistencia característica R'_{bk}, la probabilidad de rechazar un hormigón aceptable viene dada por el área ω_2 sombreada en la figura.

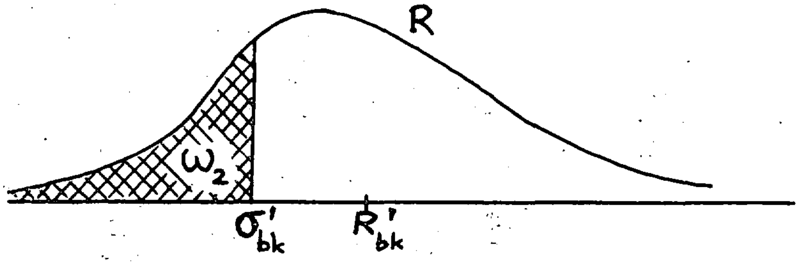


Figura 5.

$$\omega_2 = \text{Prob}\,(R \leq \sigma'_{bk}) = \text{Prob}\,(\sigma \cdot R^* + \mu \leq \sigma'_{bk})$$

$$\omega_2 = \text{Prob}\left(\sigma \cdot R^* + \mu \leq \frac{100}{p'} \cdot R'_{bk}\right) = \text{Prob}\left[\sigma \cdot R^* + \mu \leq \frac{100}{p'} \cdot (\mu - 1{,}645 \cdot \sigma)\right]$$

$$\omega_2 = \text{Prob}\left[R^* \leq \frac{100}{p'} \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma} - 1{,}645\right) - \frac{\mu}{\sigma}\right]$$

Llamando $V = \dfrac{\sigma}{\mu}$ al coeficiente de variación se tiene:

$$\omega_2 = \text{Prob}\left[R^* \leq \frac{100}{p'} \cdot \left(\frac{1}{V} - 1{,}645\right) - \frac{1}{V}\right]$$

$$\omega_2 = F^*\left[\frac{100}{p'} \cdot \left(\frac{1}{V} - 1{,}645\right) - \frac{1}{V}\right] = F^*\left[-\left(\frac{p' - 100}{p' \cdot V} + \frac{164{,}5}{p'}\right)\right]$$

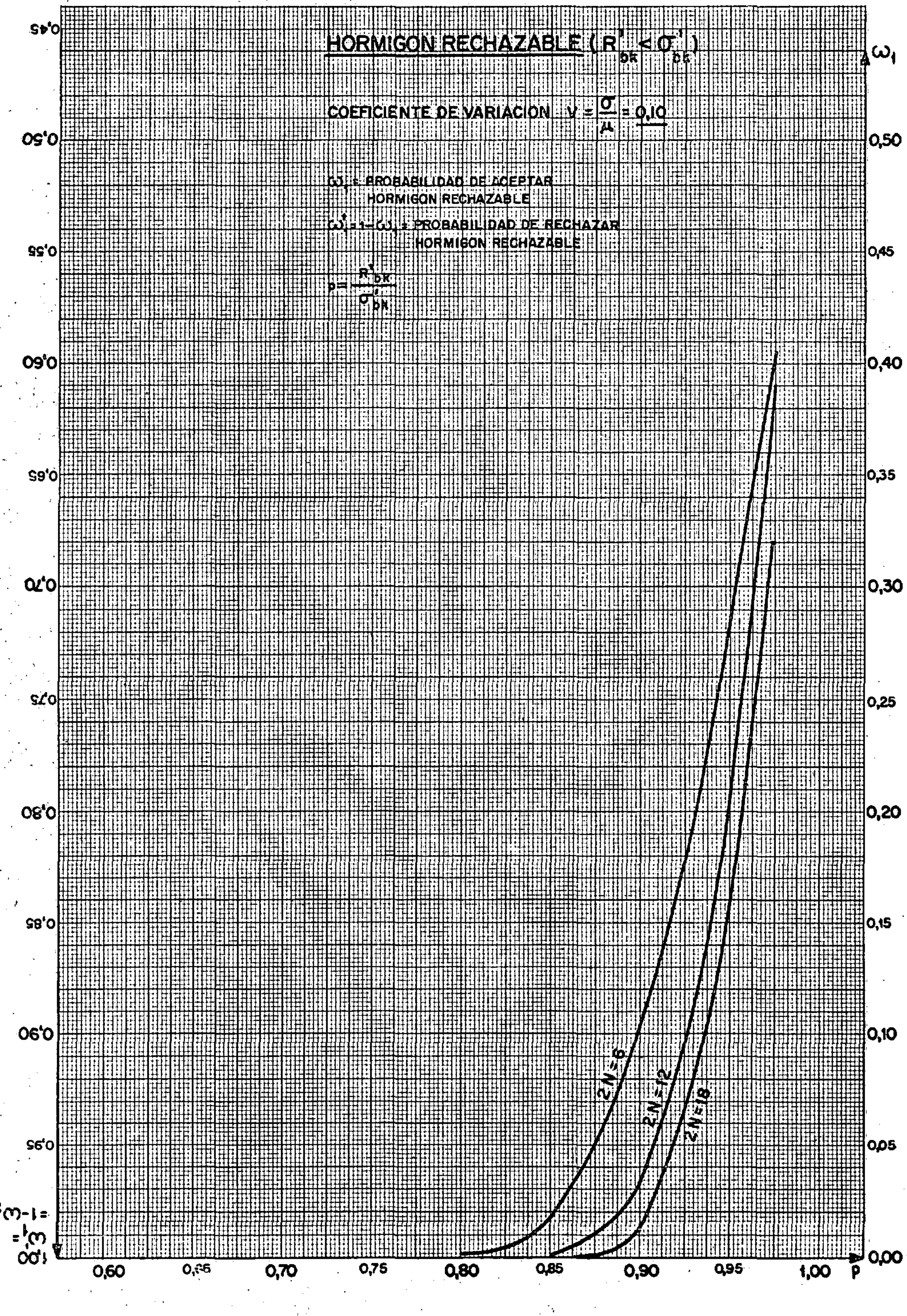
siendo $F^*(z)$ la función de distribución del estimador R^* y que está tabulada en el cuadro 4 para $2N = 6$, 12 y 18.

En el cuadro 9 se tabula esta probabilidad ω_2 de rechazar un hormigón aceptable, para diferentes tamaños de la muestra, diferentes p' y diferentes coeficientes de variación V.

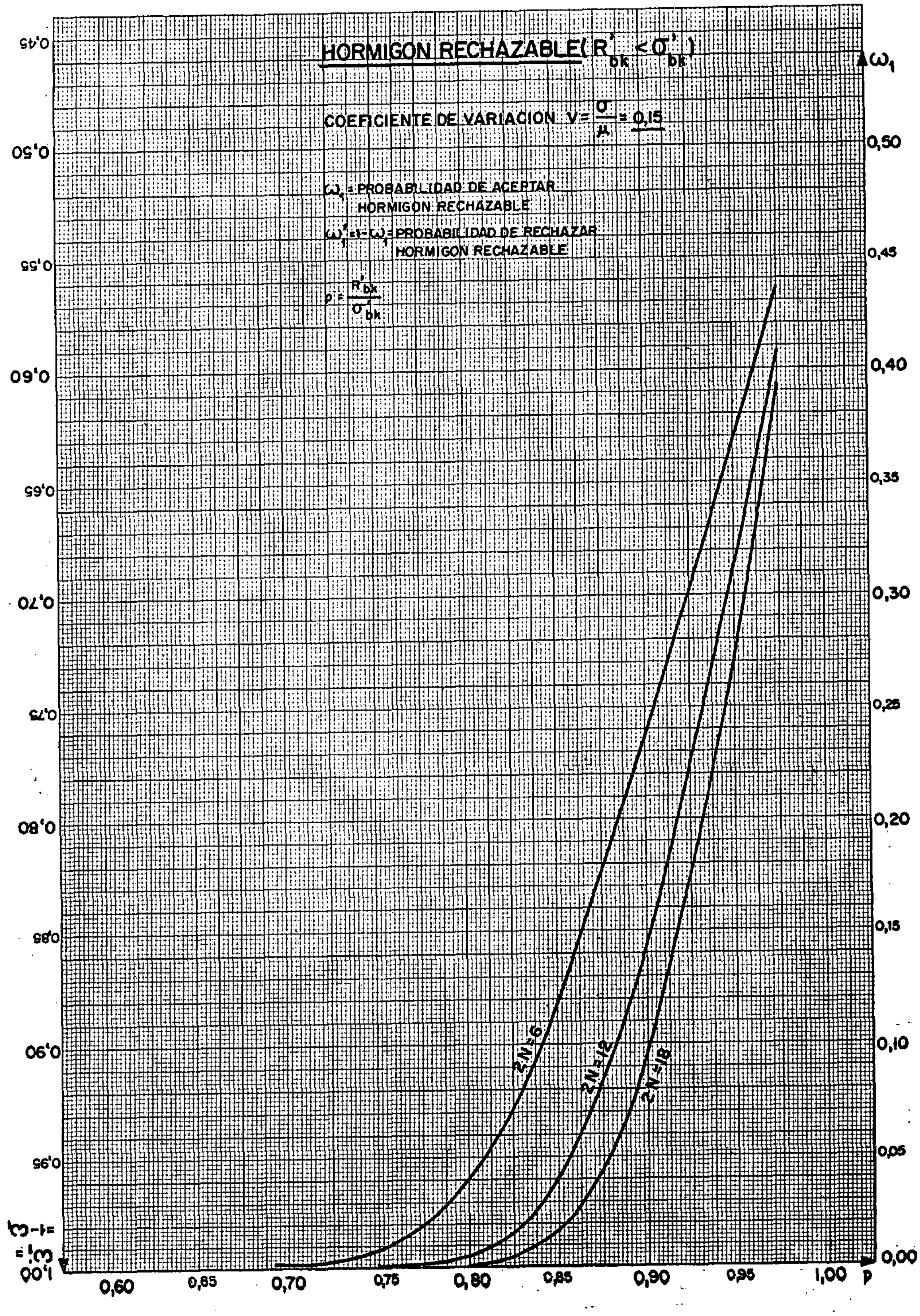
B.2. *Probabilidad ω'_2 de aceptar un hormigón aceptable.*

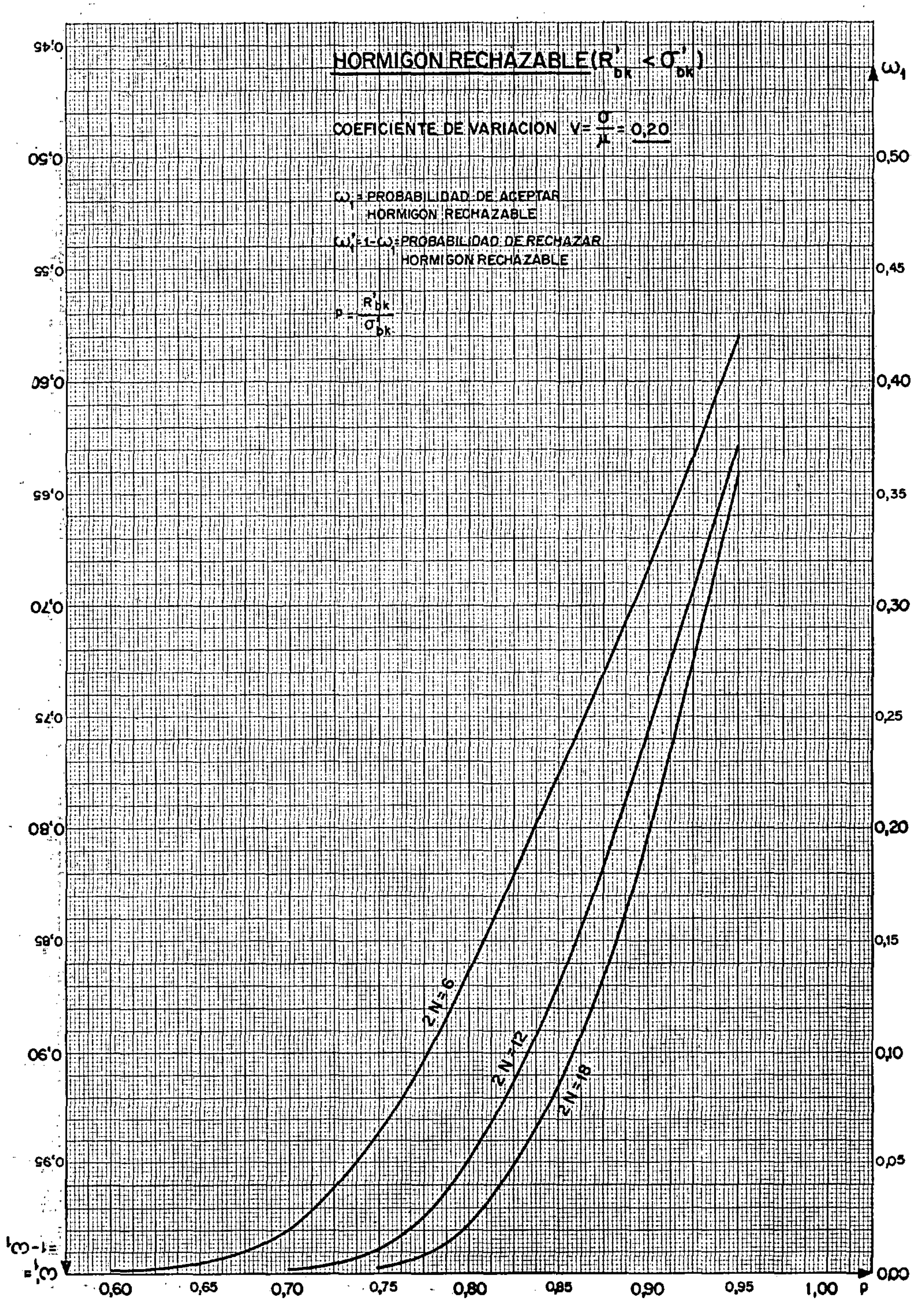
Será sencillamente $\omega'_2 = 1 - \omega_2$.

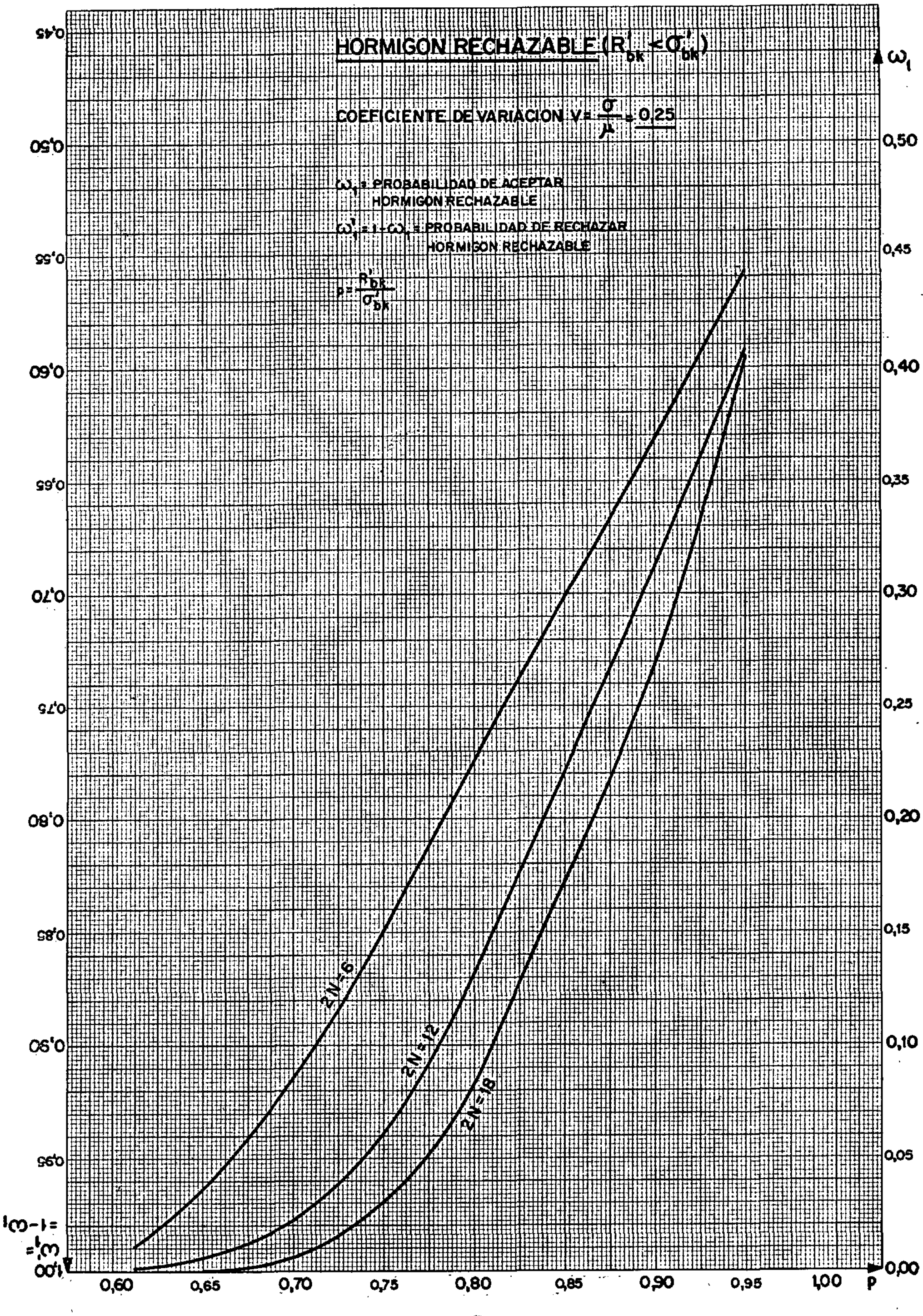
En las figuras adjuntas se representan las curvas de eficacia correspondientes a los cuadros 8 y 9.



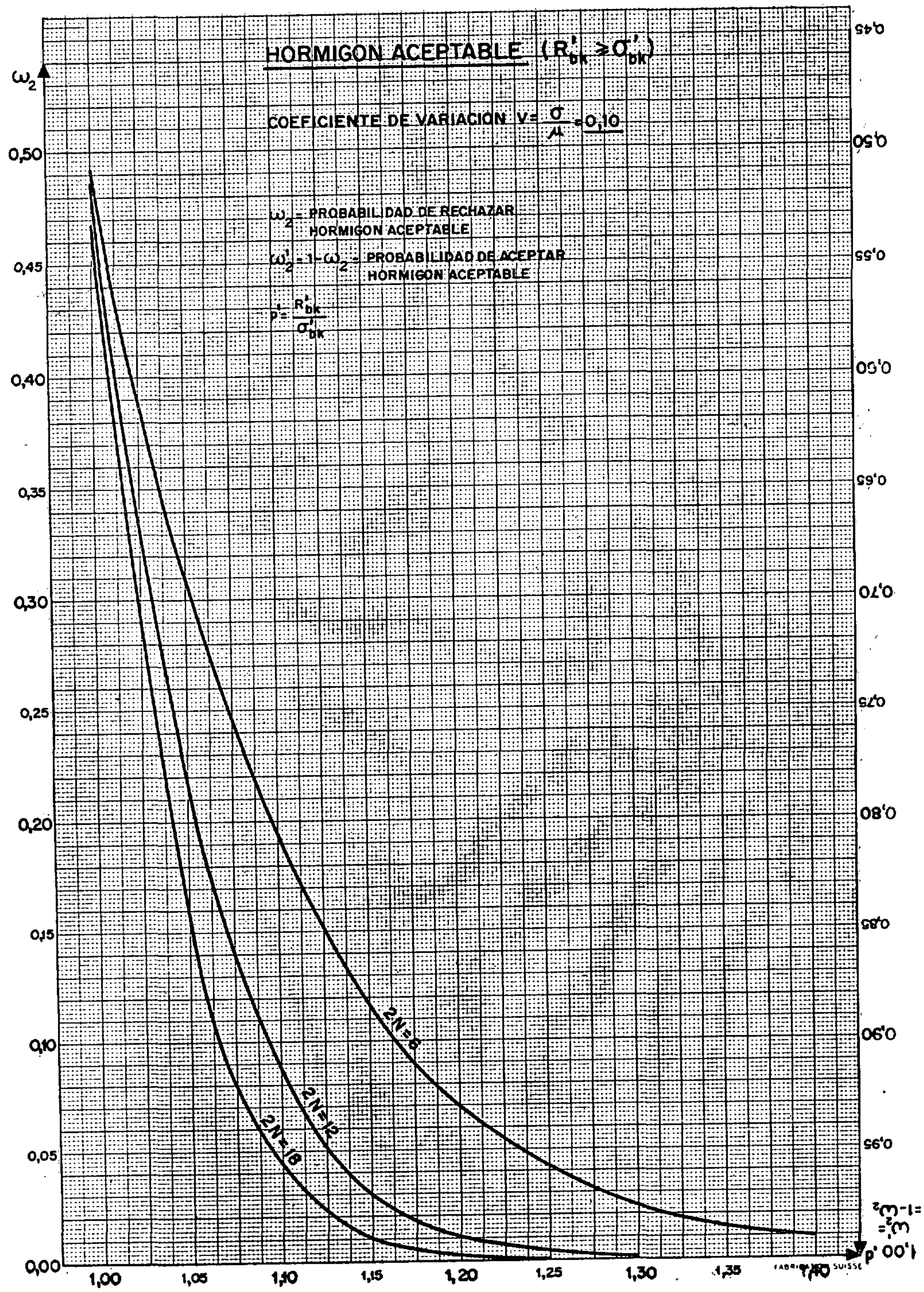
HORMIGON RECHAZABLE (R'bk < σ'bk)
COEFICIENTE DE VARIACION V = σ/μ = 0,10
ω1 = PROBABILIDAD DE ACEPTAR HORMIGON RECHAZABLE
ω'1 = 1 − ω1 = PROBABILIDAD DE RECHAZAR HORMIGON RECHAZABLE
p = R'bk / σ'bk
2N = 6
2N = 12
2N = 18
ω1
ω'1 = 1−ω1
p
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
0,00
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
0,40
0,45
0,50


HORMIGON RECHAZABLE ($R'_{bk} < \sigma'_{bk}$)
COEFICIENTE DE VARIACION $V = \frac{\sigma}{\mu} = 0,15$
ω_1 = PROBABILIDAD DE ACEPTAR HORMIGON RECHAZABLE
$\omega'_1 = 1 - \omega_1$ = PROBABILIDAD DE RECHAZAR HORMIGON RECHAZABLE
$p = \frac{R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$
2N=6
2N=12
2N=18
ω_1
0,00
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
0,40
0,45
0,50
$\omega'_1 = 1 - \omega_1$
1,00
0,95
0,90
0,85
0,80
0,75
0,70
0,65
0,60
0,55
0,50
0,45
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
p

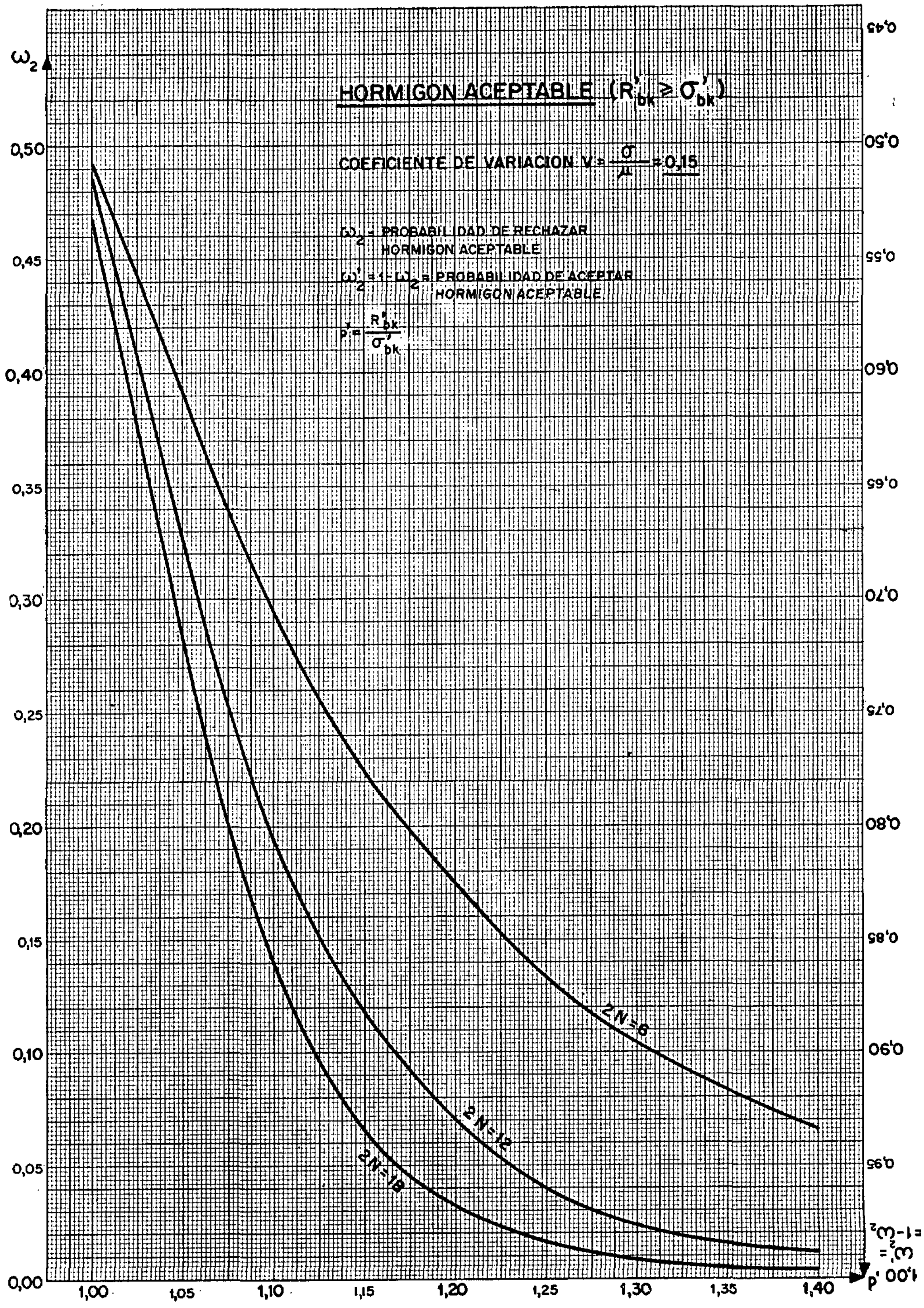

HORMIGON RECHAZABLE ($R'_{bk} < \sigma'_{bk}$)
COEFICIENTE DE VARIACION $V = \frac{\sigma}{\mu} = 0,20$
ω_1 = PROBABILIDAD DE ACEPTAR HORMIGON RECHAZABLE
$\omega'_1 = 1 - \omega_1$ = PROBABILIDAD DE RECHAZAR HORMIGON RECHAZABLE
$p = \frac{R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$
2 N=6
2 N=12
2 N=18
ω_1
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
0,45
0,50
0,55
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
$\omega'_1 = 1 - \omega_1$
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
p

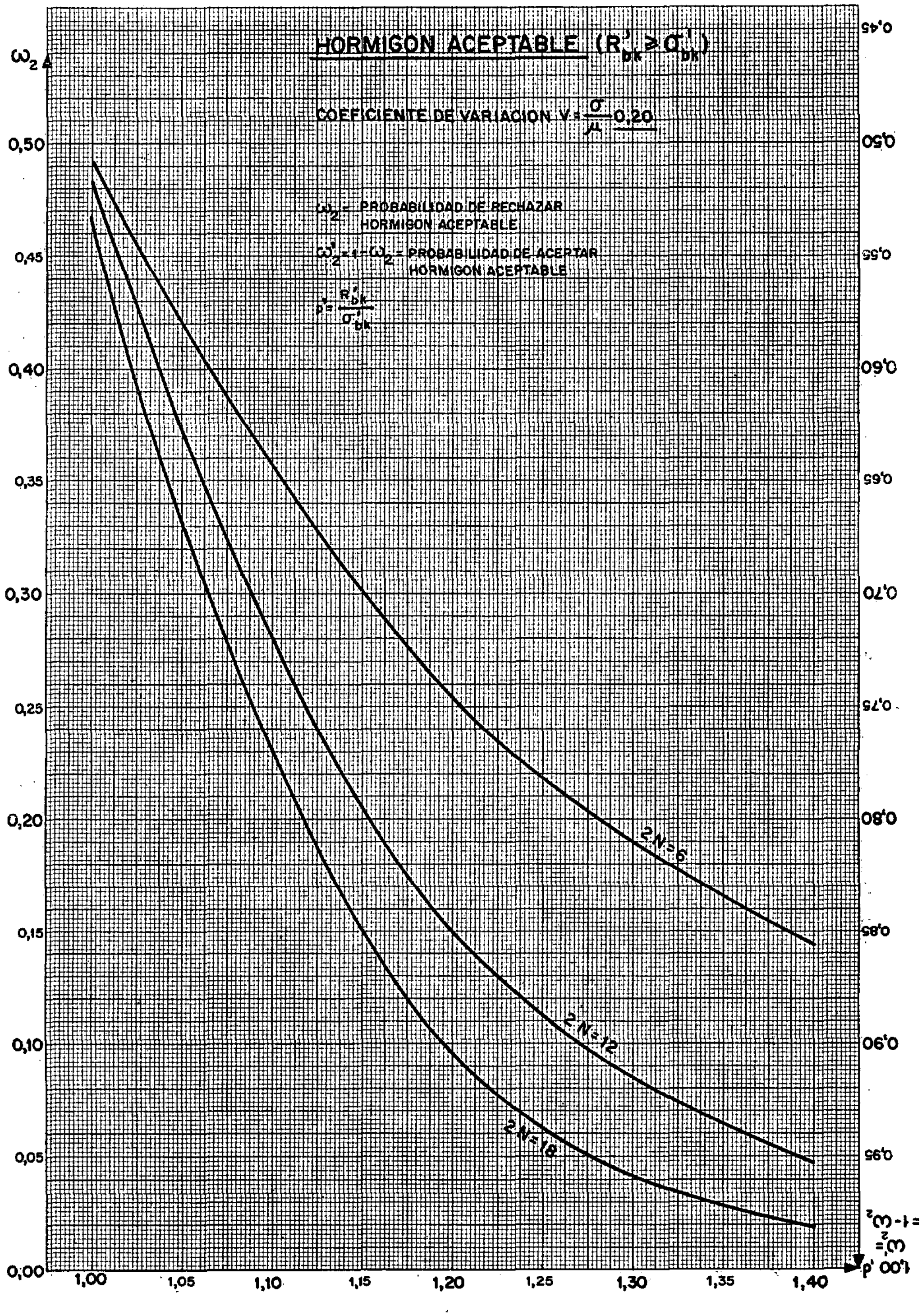


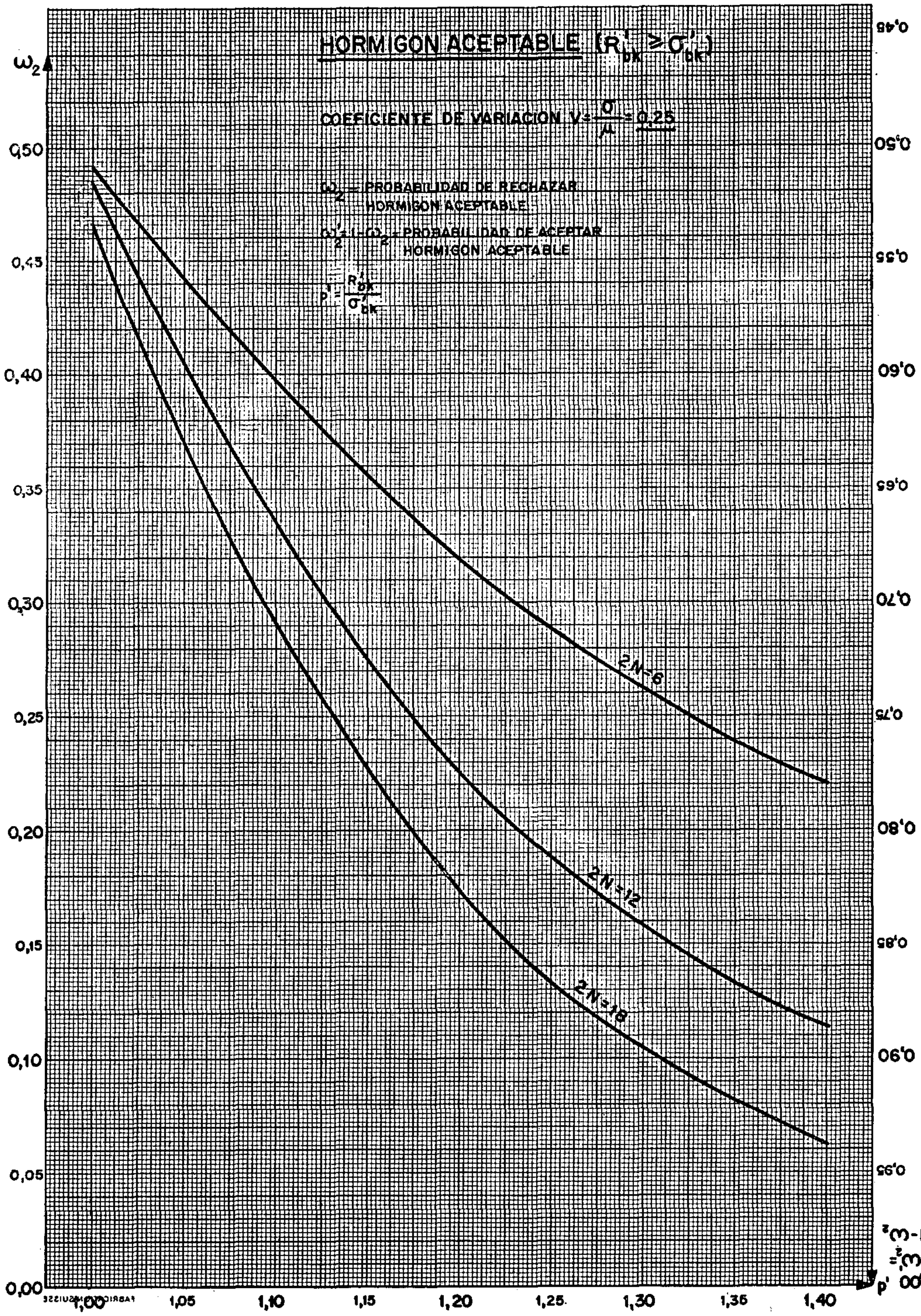
HORMIGON RECHAZABLE ($R'_{bk} < \sigma'_{bk}$)
COEFICIENTE DE VARIACION $V = \frac{\sigma}{\mu} = 0{,}25$
ω_1 = PROBABILIDAD DE ACEPTAR HORMIGON RECHAZABLE
$\omega'_1 = 1 - \omega_1$ = PROBABILIDAD DE RECHAZAR HORMIGON RECHAZABLE
$p = \frac{R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$
ω_1
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
0,45
0,50
0,55
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
$\omega'_1 = 1-\omega_1$
2N=6
2N=12
2N=18
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
p



HORMIGON ACEPTABLE $(R'_{bk} \geq \sigma'_{bk})$
COEFICIENTE DE VARIACION $V = \frac{\sigma}{\mu} = 0,10$
ω_2 = PROBABILIDAD DE RECHAZAR HORMIGON ACEPTABLE
$\omega'_2 = 1 - \omega_2$ = PROBABILIDAD DE ACEPTAR HORMIGON ACEPTABLE
$\rho' = \frac{R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$
ω_2
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
1,00
1,05
1,10
1,15
1,20
1,25
1,30
1,35
1,40
ρ'
2N=6
2N=12
2N=18
$\omega'_2 = 1 - \omega_2$


HORMIGON ACEPTABLE ($R'_{bk} \geq \sigma'_{bk}$)
COEFICIENTE DE VARIACION $V = \frac{\sigma}{\mu} = 0,15$
ω_2 = PROBABILIDAD DE RECHAZAR HORMIGON ACEPTABLE
$\omega'_2 = 1 - \omega_2$ = PROBABILIDAD DE ACEPTAR HORMIGON ACEPTABLE
$p' = \frac{R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$
ω_2
p'
$\omega'_2 = 1 - \omega_2$
2N=6
2N=12
2N=18
0,00
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
0,40
0,45
0,50
1,00
1,05
1,10
1,15
1,20
1,25
1,30
1,35
1,40
0,45
0,50
0,55
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00


HORMIGON ACEPTABLE $(R'_{bk} \geq \sigma'_{bk})$
COEFICIENTE DE VARIACION $V = \frac{\sigma}{\mu} = 0{,}20$
ω_2 = PROBABILIDAD DE RECHAZAR HORMIGON ACEPTABLE
$\omega'_2 = 1 - \omega_2$ = PROBABILIDAD DE ACEPTAR HORMIGON ACEPTABLE
$\rho' = \frac{R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$
ω_2
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
1,00
1,05
1,10
1,15
1,20
1,25
1,30
1,35
1,40
ρ'
2 N = 6
2 N = 12
2 N = 18
0,45
0,50
0,55
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
$\omega'_2 = 1 - \omega_2$


HORMIGON ACEPTABLE $(R'_{bk} \geq \sigma'_{bk})$
COEFICIENTE DE VARIACION $V = \frac{\sigma}{\mu} = 0,25$
ω_2 = PROBABILIDAD DE RECHAZAR HORMIGON ACEPTABLE
$\omega'_2 = 1 - \omega_2$ = PROBABILIDAD DE ACEPTAR HORMIGON ACEPTABLE
$p' = \frac{R'_{bk}}{\sigma'_{bk}}$
ω_2
0,00
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
0,40
0,45
0,50
1,00
1,05
1,10
1,15
1,20
1,25
1,30
1,35
1,40
p'
2N=6
2N=12
2N=18
0,45
0,50
0,55
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
$\omega'_2 = 1 - \omega_2$

5. OTRO ESTIMADOR DE LA RESISTENCIA CARACTERISTICA

Supuesto que la distribución de resistencias, x, de rotura por compresión es una variable aleatoria $N(\mu, \sigma)$, hemos visto en el estimador anterior cómo la resistencia característica $R'_{bk} = \mu - 1{,}645 \cdot \sigma$ era prácticamente la media y la mediana del estimador. ($F(R'_{bk}) \approx 0{,}5$).

Supuesta una muestra de extensión n $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vamos a definir un estimador $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la resistencia característica $R'_{bk} = \mu - 1{,}645 \cdot \sigma$ de la siguiente forma:

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_n \cdot x_{\min}$$

siendo:

$$x_{\text{mín}} = \text{mínimo de } (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

y con la condición de que:

$$\text{Prob}\,(R \geqq R'_{b\,k}) = \text{Prob}\,(k_n \cdot x_{\text{mín}} \geqq \mu - 1{,}645 \cdot \sigma) = 0{,}5$$

$$0{,}5 = \text{Prob}\,(k_n \cdot x_{\text{mín}} \geqq \mu - 1{,}645 \cdot \sigma) = \text{Prob}\left(x_{\min} \geqq \frac{\mu - 1{,}645 \cdot \sigma}{k_n}\right) =$$

$$= \text{Prob}\left(x_1 \geqq \frac{\mu - 1{,}645 \cdot \sigma}{k_n}\right) \cdot \text{Prob}\left(x_2 \geqq \frac{\mu - 1{,}645 \cdot \sigma}{k_n}\right) \ldots \text{Prob}\left(x_n \geqq \frac{\mu - 1{,}645 \cdot \sigma}{k_n}\right)$$

$$0{,}5 = \left[1 - \Phi_1\left(\frac{\mu - 1{,}645 \cdot \sigma}{k_n}\right)\right]^n$$

siendo $\Phi_1(y)$ la función de distribución de la normal $N(\mu, \sigma)$:

$$\Phi_1\left(\frac{\mu - 1{,}645 \cdot \sigma}{k_n}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

$$\Phi_1\left(\frac{\mu - 1{,}645 \cdot \sigma}{k_n}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - 1{,}645 \cdot \sigma}{k_n \cdot \sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right)$$

siendo $\Phi(t)$ la función de distribución de la $N(0{,}1)$.

Por tanto, si llamamos $V = \frac{\sigma}{\mu}$ al coeficiente de variación tenemos:

$$\Phi\left(\frac{\frac{1}{V} - 1{,}645}{k_n} - \frac{1}{V}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

$$\Phi\left[\frac{1}{V} \cdot \left(\frac{1 - 1{,}645 \cdot V}{k_n} - 1\right)\right] = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

En el cuadro 10 se especifican los diferentes valores de k_n según la extensión n de la muestra para los diferentes valores V del coeficiente de variación.

CUADRO 10.

Valores de k_n

Extensión de la muestra n	Coeficiente de variación V			
	0,10	0,15	0,20	0,25
2	0,884	0,820	0,753	0,682
3	0,910	0,859	0,803	0,741
4	0,928	0,886	0,838	0,784
5	0,942	0,907	0,867	0,820
6	0,953	0,924	0,890	0,850
7	0,962	0,938	0,910	0,877
8	0,970	0,951	0,928	0,900
10	0,983	0,972	0,958	0,942
12	0,993	0,989	0,984	0,976
14	1,002	1,004	1,005	1,008
16	1,009	1,016	1,024	1,035
18	1,016	1,027	1,041	1,059