

LA PROGRAMACION DINAMICA Y LA PLANIFICACION DE RECURSOS HIDRAULICOS (*)

Por LUIS LOPEZ GARCIA

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
M. S. Colorado State University

La necesidad de construir sistemas hidráulicos complejos derivada del continuo aumento de la demanda de agua, ha traído consigo el intento de desarrollo de técnicas matemáticas que permitan manejar el amplio número de factores implicados en el problema. Una de estas técnicas es la programación dinámica, de cuya base matemática se hace una breve descripción para después comentar sus aplicaciones a los recursos hidráulicos. Para ello se enumera una serie de problemas resueltos en la literatura que puede dar una idea del potencial de este método. Por último, se resuelve un problema de regulación de un embalse, de forma muy simplificada, para mostrar la sencillez de aplicación de la programación dinámica.

1. INTRODUCCION

La planificación de los recursos hidráulicos se ha complicado considerablemente en los últimos años. Al aumentar la demanda de agua, permaneciendo constantes los recursos disponibles, se hace necesario aprovechar al máximo las posibilidades de cada zona. Para ello hay que considerar un sistema complejo de unidades de almacenamiento, transporte y distribución, constituyentes del "sistema" de recursos hidráulicos de la región, que convenientemente combinadas den lugar a su aprovechamiento óptimo. Este óptimo puede enfocarse desde distintos puntos de vista, sea un óptimo económico de máximo beneficio o mínimo coste, sea un óptimo hidrológico de máximo volumen de agua aprovechada o mínimo volumen de pérdidas, o incluso un óptimo menos cuantificable como ocurriría en el caso de plantearse un objetivo social o político. La labor de hallar el óptimo ha dado en llamarse "optimación" del sistema.

La optimación de sistemas sencillos no suele presentar problemas. Unos cálculos someros combinados con un buen porcentaje de experiencia proporcionarán una solución que aun no siendo el óptimo matemático será aceptable a efectos prácticos. En el caso de sistemas complejos, el número de variables y factores implicados puede sobrepasar fácilmente la capacidad personal de análisis. Para resolver este problema los métodos convencionales han recurrido a la utilización de simplificaciones que reducen la complejidad de cálculo del sistema. Con el fin de reducir al mínimo estas simplificaciones se ha intentado desarrollar una serie de métodos que permitirán trabajar con un número elevado de variables. Los que han respondido mejor a estas condiciones han sido los métodos de la investigación operativa, tales como programación lineal, no lineal, dinámica y entera, teoría de grafos o teoría de colas. Estos métodos se reúnen bajo el nombre de "técnicas de optimación".

Una de las técnicas comenzadas a emplear más recientemente es la programación dinámica, cuya teoría fue enunciada por Bellman (1957). A continuación se tratará sobre sus posibilidades de aplicación en el campo de los recursos hidráulicos.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de agosto de 1971.

2. TEORIA BASICA DE LA PROGRAMACION DINAMICA

La programación dinámica se puede definir como un planteamiento matemático que permite determinar el conjunto de decisiones que dan lugar a la solución óptima de un proceso secuencial. Se basa en el uso de una fórmula recurrente de optimización que permite reducir sustancialmente la dimensión del problema.

Hay dos puntos destacables en la definición. El primero es "planteamiento matemático", ya que la programación dinámica, al contrario que la lineal, no consiste en una técnica de solución tal que aplicada al problema da lugar al óptimo de forma inmediata. Por el contrario, consiste en una forma especial de ver el problema, de modo que es difícil disponer de subrutinas, donde bastaría introducir los datos para obtener la solución. El segundo punto es "proceso secuencial". Si el proceso no puede dividirse en intervalos, no puede resolverse por programación dinámica. Esto no supone una restricción fuerte, ya que estos intervalos no necesitan ser de tiempo, sino que pueden ser intervalos espaciales, tales como capacidades intermedias de un embalse o volúmenes bombeados de un acuífero.

Las variables implicadas en un problema de programación dinámica son de dos tipos. Las variables de estado son aquellas que definen la situación del sistema en cada momento. Las variables de decisión son las variables que hay que definir y que ocasionan el paso de un estado a otro. Las variables de decisión son controlables directamente, como desembalses o volúmenes bombeados. Las variables de estado son controladas indirectamente mediante las variables de decisión.

Una ventaja de la programación dinámica es que proporciona una solución funcional y no puntual como ocurre con la programación lineal. Sin embargo, presenta la desventaja de tener que limitarse a sistemas descritos por tres variables de estado, a menos que se utilicen técnicas especiales todavía no muy desarrolladas, como se comentará posteriormente.

Para una exposición más completa de la programación dinámica puede consultarse Bellman (1957).

3. APLICACION A LOS SISTEMAS DE RECURSOS HIDRAULICOS

Una vez repasado brevemente el concepto de la programación dinámica hay que examinar las posibilidades que ofrece para la resolución de sistemas de recursos hidráulicos. Como se dijo anteriormente, no deben intentar resolverse sistemas con más de tres variables de estado que darían lugar a grandes dificultades de cálculo y almacenamiento de datos. Esto supone que no se deben resolver sistemas con más de tres unidades de almacenamiento, embalses, acuíferos o depósitos, que son los elementos que, en general, definen el número de variables de estado. Puede objetarse que en este caso las posibilidades de utilización son escasas. Sin embargo, dado que se obtiene una solución funcional es posible dividir un sistema complejo en varios subsistemas y combinar la solución de cada uno de ellos aprovechando aquella propiedad.

Los problemas que se pueden resolver en un sistema de recursos hidráulicos son de dos tipos: problemas de dimensionamiento y problemas de estrategia de explotación. En los primeros se trata de definir la magnitud de los elementos de un sistema, mientras que en los segundos se intenta determinar la estrategia óptima de explotación de un sistema dado.

Ambos tipos pueden ser resueltos por programación dinámica.

3.1. Tipos de problemas resueltos.

Es difícil hacer una división absoluta de casos que se pueden resolver o no mediante programación dinámica. La mejor solución parece ser enumerar una serie de casos resueltos en la literatura.

3.1.1. Procesos dependientes del tiempo: Los intervalos del proceso secuencial son incrementos de tiempo. Ejemplos de este tipo son:

a) Planificación óptima de los períodos de riego: Se define la cantidad de agua a aplicar en cada intervalo de tiempo a las cosechas de una zona. Las variables de estado son el volumen de agua disponible, la humedad del suelo y una función geométrica del rendimiento de cada cosecha en cada intervalo, Hall y Dracup (1970).

b) Embalse único de finalidad múltiple: Considerando como variable de estado, el volumen almacenado en el embalse, se calculan los desembalses para abastecimiento, riegos, producción eléctrica, etc., Hall, Butcher y Esogbue (1968).

c) Centrales hidroeléctricas reversibles: Se definen los volúmenes bombeados y turbinados en función de los volúmenes almacenados en presa y contrapresa, Hall y Roefs (1966), López (1969).

d) Uso conjunto de embalses superficiales y subterráneos: Utilizando como variables de estado los volúmenes almacenados en un embalse superficial y uno subterráneo, y en una instalación de recarga artificial se pueden definir los volúmenes destinados a recarga, riego directo y riego por bombeo en cada período. Se puede hacer con un planteamiento determinístico, Buras (1962), estocástico explícito, Buras (1963) o estocástico implícito, López (1969).

e) Control de avenidas mediante embalses de regulación: Este problema no ha sido tratado individualmente. En general, se supone que en cada período del año debe reservarse un volumen de embalse con el fin de controlar la avenida. La determinación del volumen necesario se hace por métodos estadísticos.

f) Regulación de un sistema de embalses: Utilizando los volúmenes embalsados como variables de estado, se definen los desembalses para los distintos usos. Si son demasiados embalses se pueden agrupar en subsistemas que se pueden unir después para dar el óptimo global, bien por programación lineal o por programación dinámica, Hall y Dracup (1970).

3.1.2. Procesos no dependientes del tiempo: Se refieren, en general, al reparto óptimo de un recurso entre varios usuarios, ya sea tierra, agua o capacidad de embalse. La descomposición secuencial no se hace en intervalos de tiempo. Ejemplos de este tipo de problemas son:

a) Proyecto de un embalse de finalidad múltiple: Utilizando como intervalos los distintos usos del agua, se calcula la cantidad óptima utilizable para cada uno de ellos en un momento dado, Hall (1964).

b) Distribución de agua entre distintas áreas de una zona regable: Considerando cada área como un intervalo de cálculo, se halla el volumen óptimo a emplear en cada una en función del volumen disponible.

c) *Distribución de una aportación estocástica:* Se define el agua destinada a cada cosecha de una zona utilizando como variable de estado el agua disponible con cierta probabilidad. Los intervalos de cálculo son los distintos niveles de probabilidad, Hall y Dracup (1970).

d) *Capacidad óptima de un acueducto:* Dada la función de beneficio resultante de destinar distintas cantidades de agua a cada zona y el coste de construcción del acueducto para cada caudal, se calcula la capacidad óptima de cada tramo. La variable de estado es la cantidad de agua disponible al comienzo de cada tramo. Los tramos de acueducto constituyen los intervalos de cálculo. Hall y Dracup (1970).

e) *Escalonamiento de las obras de un sistema de recursos hidráulicos.* Dada una serie de proyectos destinados a cubrir la demanda a largo plazo de una zona, y la curva demanda-tiempo, se define el orden de construcción de los proyectos, que se consideran como intervalos de cálculo. Este método sirve también para comprobar la sensibilidad del sistema al variar la curva demanda tiempo. Butcher, Haim y Hall (1969).

Como puede verse, el campo de aplicación de la programación dinámica a los recursos hidráulicos es muy amplio. Esto se debe a que por tratarse de un método de optimación puede, en principio, aplicarse a cualquier problema de este tipo. Por otra parte, no se impone ninguna condición restrictiva a las funciones implicadas, lo cual hace que la posibilidad de aplicación dependa sólo del número de variables de estado, y aun este problema puede resolverse mediante la división en subsistemas. Un ejemplo es el modelo del "California Water Plan", que incluye una red de 22 embalses, de finalidad múltiple casi todos ellos, y la correspondiente red de distribución. Todo el sistema ha sido resuelto utilizando programación dinámica aplicada a los distintos subsistemas que después fueron unidos entre sí mediante programación lineal. Hall y Dracup (1970).

3.2. *Ejemplo de resolución por programación dinámica.*

Dado un embalse de 100 Hm^3 de capacidad, cuyo objeto es la producción de energía eléctrica, se desea conocer el volumen que se debe turbinar en cada mes de un período de cinco meses para obtener el máximo beneficio, con la condición de que el embalse contenga 60 Hm^3 al finalizar el período. Las aportaciones del río se suponen conocidas.

Si se turbinan $V \text{ Hm}^3$ con un salto $H \text{ m}$, el beneficio obtenido será:

$$B = K \times V \times H \text{ pts.}$$

siendo K una constante que incluye rendimientos de maquinaria, precio de venta de la energía y factores de conversión. El beneficio a lo largo de cinco meses que se desea maximizar es:

$$B = K \sum_{i=1}^5 V_i \times H_i \quad (1)$$

Dado que K es una constante, se puede eliminar de esta expresión y hallar el máximo de:

$$b = \sum_{i=1}^5 V_i \times H_i \quad (2)$$

Las restricciones impuestas por el embalse son:

$$S_{n-1} = S_n + A_n - V_n \quad (3)$$

$$100 \text{ Hm}^3 \geq S_n \geq 0 \quad (4)$$

donde:

S_n = volumen embalsado en el intervalo n ;

S_{n-1} = volumen embalsado en el intervalo $n-1$, posterior en el tiempo;

A_n = aportación durante el intervalo n .

La restricción impuesta a V_n , volumen turbinado, es la de ser menor que la capacidad máxima de las tuberías, supuesta de 30 Hm³/mes:

$$0 \leq V_n \leq 30 \text{ Hm}^3/\text{mes} \quad (5)$$

Los valores discretos de la curva embalse altura son los siguientes:

Embalse S (Hm ³) ...	0	20	40	60	80	100
Salto bruto H (m) ...	24	34	43	50	56	60

Las aportaciones supuestas en cada mes son:

Mes	Febrero	Märzo	Abril	Mayo	Junio
Intervalo n	5	4	3	2	1
Aportación (Hm ³) ...	15	22	36	8	2

La ecuación recurrente de optimación secuencial es:

$$f_n^*(S_n) = \max_{V_i} [f_n(S_n, V_i)] = \max_{V_i} [b_n(S_n, V_i) + f_{n-1}^*(S_{n-1})] \quad (6)$$

$f_n^*(S_n)$ = beneficio óptimo desde el intervalo n hasta el final del proceso, cuando el embalse contiene S_n Hm³;

$b_n(S_n, V_i)$ = beneficio del intervalo n cuando se desembalsan V_i Hm³ de un total de S_n .

Por lo indicado anteriormente, este último término será:

$$b_n(S_n, V_i) = V_i \times H_n \quad (7)$$

donde H_n es el salto bruto correspondiente a S_n . Podría hallarse el salto medio entre S_n y S_{n-1} , pero por simplicidad de cálculo se tomará el inicial.

Todas las funciones que aparecen en (6) deben cumplir las restricciones (3), (4) y (5). Además, para $n=1$, (6) se transforma en:

$$f_1^*(S_1) = \max_{V_i} b_1(S_1, V_i) \quad (8)$$

ya que el proceso está terminado y $f_0^*(S_0) = 0$.

Por el enunciado del problema, el embalse final debe cumplir:

$$S_0 = S_1 + A_1 - V_1 = 60 \text{ Hm}^3 \quad (9)$$

Con estos datos puede resolverse el problema, optimando recurrentemente intervalo por intervalo, según la ecuación (6).

Los cálculos se pueden representar en una serie de cuadros en los que se calcula el valor de la función $f_n(S_n, V_i)$ para cada combinación de S y V . En las columnas de la derecha se indican los valores óptimos de esta función y del volumen turbinado, representados por un asterisco, y el embalse que resulta de turbinar este valor. Con una raya se representan los estados que no cumplen las restricciones o que dan lugar a estados posteriores que no las cumplen.

Al determinar el estado en el intervalo $n - 1$ se ha seguido la norma de redondear sobre la mitad del intervalo. Por ejemplo, si se obtiene $S = 72$ se supone 80, pero si $S = 68$, se supone 60, valores discretos que están más cercanos al valor real calculado.

Mes, junio; $n = 1$; $A_1 = 2 \text{ Hm}^3$

$S_1 \backslash V_i$	$f_1(S_1, V_i)$				$f_1^*(S_1)$	V_1^*	S_0
	0	10	20	30			
0	—	—	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—	—	—
40	—	—	—	—	—	—	—
60	0	—	—	—	0	0	60
80	0	560	1120	—	1120	60	60
100	0	600	1200	1800	1800	30	60

Mes, mayo; $n = 2$; $A_2 = 8 \text{ Hm}^3$

$S_2 \backslash V_i$	$f_2(S_2, V_i)$				$f_2^*(S_2)$	V_2^*	S_1
	0	10	20	30			
0	—	—	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—	—	—
40	—	—	—	—	—	—	—
60	0	500	—	—	500	10	60
80	1120	1680	1120	—	1680	10	80
100	1800	2400	2320	2920	2920	30	80

Mes, abril; $n = 3$; $A_3 = 36 \text{ Hm}^3$

$S_3 \backslash V_i$	$f_3(S_3, V_i)$				$f_3^*(S_3)$	V_3^*	S_2
	0	10	20	30			
0	—	—	—	—	—	—	—
20	500	—	—	—	500	0	60
40	1680	930	1360	—	1680	0	80
60	2920	2180	2680	2000	2920	0	100
80	2920	3480	4040	3360	4040	20	100
100	2920	3520	4120	4720	4720	30	100

Mes, marzo; $n = 4$; $A_4 = 22 \text{ Hm}^3$

$S_4 \backslash V_i$	$f_4(S_4, V_i)$				$f_4^*(S_4)$	V_4^*	S_3
	0	10	20	30			
0	500	740	—	—	740	10	20
20	1680	2020	1180	1520	2020	10	40
40	2920	3350	2540	2970	3350	10	60
60	4040	4540	3920	4420	4540	10	80
80	4720	5280	5160	5720	5720	30	80
100	4720	5320	5920	6520	6520	30	100

Mes, febrero; $n = 5$; $A_5 = 15 \text{ Hm}^3$

$S_5 \backslash V_i$	$f_5(S_5, V_i)$				$f_5^*(S_5)$	V_5^*	S_4
	0	10	20	30			
0	2020	980	—	—	2020	0	20
20	3350	2360	2700	1760	3350	0	40
40	4540	3780	4210	3310	4540	0	60
60	5720	5040	5540	4850	5720	0	80
80	6520	6280	6840	6220	6840	20	80
100	6520	7120	7720	7520	7720	30	80

Estos cuadros expresan el volumen turbinable óptimo para cada estado del embalse en cada mes. Para obtener la estrategia óptima correspondiente a un determinado embalse inicial basta comenzar por el último cuadro con el valor inicial de S_5 deseado, y con el S_4 resultante indicado en la última columna, pasar al cuadro anterior. Así sucesivamente se llega al estado final del embalse. En este caso la estrategia correspondiente a cada estado S_5 es:

	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Embalse	0	20	40	80	80
Volumen turbinable	0	10	0	10	20
Embalse	20	40	60	100	80
Volumen turbinable	0	10	0	30	20
Embalse	40	60	80	100	80
Volumen turbinable	0	10	20	30	20
Embalse	60	80	80	100	80
Volumen turbinable	0	30	20	30	20
Embalse	80	80	80	100	80
Volumen turbinable	20	30	20	30	20
Embalse	100	80	80	100	80
Volumen turbinable	30	30	20	30	20

Es de destacar el hecho de que si en un determinado mes no se llegara al estado previsto, los volúmenes turbinables óptimos serían diferentes. Sin embargo, no sería preciso realizar cálculos adicionales ya que se puede definir el nuevo camino óptimo a partir de los cuadros de cálculo. Esto es consecuencia de la obtención de una solución funcional y no puntual. Utilizando programación lineal hubiera sido necesario un cálculo para cada valor inicial del embalse y para cada cambio en el camino óptimo.

Hubiera sido sencillo introducir pérdidas por evaporación, utilizar salto neto en lugar de salto bruto, o introducir un factor de actualización de beneficios. Ello, sin embargo, hubiera complicado algo los cálculos sin hacer variar la idea fundamental. En un caso real habría que introducir estas mejoras, y sería necesario también ampliar el número de valores discretos calculados.

Como se ve, estos cálculos para una variable de estado son perfectamente ejecutables a mano. En un ordenador, por pequeño que fuera, serían necesarios escasos segundos para realizarlos, sin olvidar la sencillez de su programación en FORTRAN.

3.3. Posibilidades futuras.

Se está investigando activamente en métodos para reducir el tiempo de cálculo y para reducir la dimensión de los problemas. Algunos de ellos se utilizan ya nor-

malmente, como la iteración en el espacio de estrategias, las aproximaciones sucesivas o la programación dinámico-lineal. Estos métodos permiten atacar problemas de mayor envergadura. Dada la intensidad de la investigación que se está realizando sobre este tema parece que sus posibilidades para el futuro son buenas. En cualquier caso muchos problemas reales están ya al alcance del conocimiento actual en este campo.

4. CONCLUSIONES

La programación dinámica parece presentar grandes posibilidades de aplicación a la resolución de sistemas de recursos hidráulicos. Presenta algunas limitaciones debidas a las exigencias de tiempo de cálculo y capacidad de memoria. Estas limitaciones pueden reducirse en un futuro próximo con el desarrollo de técnicas especiales, algunas de las cuales ya se utilizan en la actualidad. En cualquier caso, aún en el estado actual de la programación dinámica, se pueden resolver sistemas que no podrían atacarse con métodos clásicos sin realizar simplificaciones excesivas.

BIBLIOGRAFIA

1. BELLMAN, R. E.: "Dynamic programing". Princeton University Press. Princeton, Nueva Jersey, 1957.
2. BURAS, N.: "On the optimal operation of a dam and aquifer water resources system". Tesis de doctorado, University of California. Los Angeles, 1962.
3. BURAS, N.: "Conjunctive operation of a surface reservoir and a groundwater aquifer". Publicación número 63, International Association of Scientific Hydrology, Symposium of Surface Waters, páginas 492-501. Berkeley, 1963.
4. BUTCHER, W. S.; HAIMES, Y. Y.; HALL, W. A.: "Dynamic programing for the optimal sequencing of water supply projects". Water Resources Research, vol. 4, núm. 6, diciembre 1969.
5. HALL, W. A.: "Optimum design of a multipurpose reservoir". A.S.C.E.-H. Y., vol. 90, julio 1964.
6. HALL, W. A.; BUTCHER, W. S.; ESOGBUE, A.: "Optimization of the operation of a multipurpose reservoir by dynamic programing". Water Resources Research, vol. 4, núm. 3, junio 1968.
7. HALL, W. A.; DRACUP, J. S.: "Water resources systems engineering". McGraw-Hill Book Co. Nueva York, 1970.
8. HALL, W. A.; ROEFS, T. G.: "Hydropower project output optimización". A.S.C.E.-P. O., vol. 92, enero 1966.
9. LOPEZ, L.: "Dynamic programing in water resources". Tesis de M. S., Colorado State University, Fort Collins, Colorado, septiembre 1969.
10. LOPEZ, L.: "The daily operation of the Flatiron pumping and power plant". Trabajo para distribución limitada a los asistentes al Instituto de Recursos Hidráulicos celebrado en Colorado State University, junio 1969.