

FLEXION SIMPLE. CALCULO EN ROTURA (*)

31-14
6 mejor 3152112
Por RAMON DEL CUVILLO

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

na 2

La finalidad de estas notas es ofrecer una tabla, lo más reducida posible dentro de un margen de error aceptable, para el cálculo en flexión simple, en rotura, de secciones rectangulares.

La obtención y desarrollo de las simples fórmulas que se emplean para la confección de dicha tabla se basan en las hipótesis establecidas en la Instrucción Española E.H.68. Como recordatorio y explicación se enumeran dichas hipótesis con la mayor brevedad posible. A continuación se establecen las ecuaciones generales de equilibrio y aplicándolas a la sección rectangular se deduce la llamada fórmula exacta del dimensionamiento de armadura a tracción y se plantean las fórmulas basadas de la tabla. Se consideran a continuación los casos límites de aplicación de las fórmulas generales que dan lugar a cuatro casos diferentes: Cuantía mínima, fórmula para cuantías pequeñas, cuantías a calcular según la tabla y caso de necesidad de armadura en compresión.

Después de hacer unas consideraciones sobre la armadura en compresión, se comentan las limitaciones que pueden presentarse en las tensiones del acero, tanto en compresión como en tracción, por compatibilidad de deformaciones.

Por último, se resume el proceso a seguir para el empleo de la tabla, en la que se han particularizado valores para los tipos de acero de mayor uso.

El uso generalizado de las teorías de cálculo en rotura para secciones de hormigón armado y su inclusión en las más recientes Instrucciones y Normas induce a la realización de tablas y ábacos que faciliten el empleo de las fórmulas deducidas de dichas teorías.

El empleo de tablas, siempre que sean lo suficientemente reducidas, resulta cómodo y presenta entre otras ventajas la de poder determinar el intervalo de valores según el grado de error admisible.

La teoría del "momento tope" adoptada en la Instrucción Española E.H.68 y su aplicación en los casos de flexión simple, permite obtener fórmulas sencillas para el dimensionamiento de secciones. Pero el empleo de tablas puede resultar aún más rápido, sobre todo en los casos en que se trate de un gran número de vigas con idéntica sección, pues entonces el número de operaciones se reduce al mínimo.

El desarrollo de las fórmulas que más adelante vamos a comentar se basan en las hipótesis generales que figuran en la citada Instrucción y que resumimos a continuación:

1. Bernouilli o de deformaciones planas.
2. Adopción de diagramas tensiones deformaciones para hormigón y acero. El acortamiento unitario en rotura del hormigón se fija en 0,0035.
3. El hormigón no resiste a tracción.
4. Fenómeno de cansancio del hormigón. Este efecto se tiene en cuenta por medio del "momento tope".
5. Establecimiento de las ecuaciones de equilibrio.

Además se fijan los correspondientes coeficientes de seguridad (mayoración para sollicitación y minoración para resistencias características de los materiales). Las resistencias minoradas constituyen las resistencias de cálculo.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de mayo de 1971.

Con estas hipótesis se deducen fórmulas sencillas de dimensionamiento, excepto en los casos en que el acero (de tracción o compresión) no alcance la resistencia de cálculo habiendo llegado el hormigón a rotura. Dicho de otra forma, el hormigón llega al acortamiento de rotura sin que el acero llegue a la deformación correspondiente a su resistencia de cálculo (límite elástico minorado). En estos casos es necesario hacer uso de los diagramas tensión-deformación del acero y hacer compatible la deformación del acero con la del hormigón.

En el caso de sección rectangular estos casos son poco frecuentes y su posibilidad para el acero en tracción se elimina limitando superiormente el uso de altos valores de límite elástico del acero. Para el acero en compresión se considera un valor máximo de resistencia de cálculo según la máxima deformación posible, lo que reduce la posibilidad de los casos en que "trabaje" a resistencias inferiores y sea necesario el uso de las ecuaciones de compatibilidad, pero puede suceder para recubrimientos relativos demasiado grandes.

Siguiendo la instrucción de la E.H.68 pasamos a desarrollar las fórmulas base de la tabla.

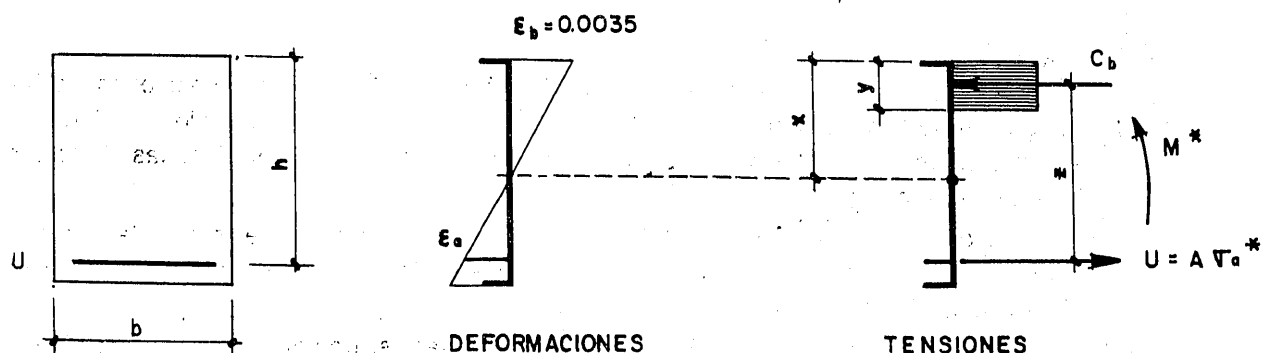


Figura 1.

Consideramos que $\epsilon_a \geq \frac{\sigma_a^*}{E_a}$ siendo $\sigma_a^* = \frac{\sigma_{ak}}{1.1}$

Las ecuaciones de equilibrio para una sección cualquiera son:

$$U = C_b \quad M^* = C_b \cdot Z$$

Para sección rectangular:

$$U = b y \sigma_b^* \quad (1)$$

$$M^* = b y \sigma_b^* \left(h - \frac{y}{2} \right) \quad (2)$$

Entendemos que $U = A \sigma_a^*$. En general podríamos decir:

$$U_a = A \sigma_a$$

siendo:

$$\sigma_a < \sigma_a^*$$

la ecuación (1) sería:

$$U_a = b \cdot \sigma_b^*$$

El valor de σ_a se deduciría por la ecuación de compatibilidad de deformaciones.

Si sustituimos el valor de y de (1) en (2) y resolvemos la ecuación de segundo grado en U resultante, obtenemos la llamada fórmula exacta de la instrucción.

$$U = V \left\{ 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{M^*}{V h}} \right\} \text{ con } V = \sigma_b^* b h$$

La ecuación (2) podemos ponerla en la forma siguiente:

$$\frac{M^*}{V h} = \frac{y}{h} \left\{ 1 - \frac{y}{2 h} \right\} \quad (3)$$

y análogamente con la ecuación (1).

$$U = \frac{y}{h} V \quad (4)$$

La ecuación (3) es la empleada para confeccionar la tabla con error menor del 5 por 100.

Observamos que para valores pequeños de $\frac{y}{h}$, lo contenido entre paréntesis en la ecuación (3) se acerca a la unidad. Podemos entonces decir:

$$\frac{M^*}{V h} \approx \frac{y}{h} \text{ y por tanto } U \approx \frac{M^*}{h}$$

aunque siempre se verifica que:

$$U > \frac{M^*}{h}$$

con el error admisible supuesto y cortando por un valor sencillo adoptamos:

$$\text{Si } \frac{M^*}{V h} \leq 0,10 \quad U = 1,05 \frac{M^*}{V h} V \quad (5)$$

La expresión de estas fórmulas (5) la damos así por facilidad de operaciones.

Existe una cuantía mínima inferior fijada por la instrucción. Corresponde al menor valor de las dos siguientes:

$$0,04 V \quad \text{y} \quad \frac{4}{3} U$$

Salvo en los casos en que la cuantía correspondiente a $0,04 V$ resulte excesiva y pueda resultar muy económico el uso del segundo mínimo, creemos puede usarse $0,04 V$ sin que frecuentemente resulte gravoso su empleo. En caso contrario se determinará U según la fórmula (5) adoptando la forma:

$$U = 1,4 \frac{M^*}{V h} V \quad (6)$$

Al valor $U = 0,04 V$ corresponde $\frac{M^*}{Vh} = 0,0392$, que será el valor límite inferior para disponer la cuantía mínima. Directamente, obtendríamos siempre el valor de $\frac{y}{h}$.

El límite superior de la ecuación (3) corresponde al valor del "momento tope", que en sección rectangular resulta igual a $0,35 V h$. Para valores superiores de M^* es necesario disponer de armadura en compresión si se quieren conservar las dimensiones de la sección.

Las ecuaciones de equilibrio se convierten en:

$$M^* = b y_t \sigma_b^* \left\{ h - \frac{y_t}{2} \right\} + U' h'$$

$$U = b y_t \sigma_b^* + U'$$

El valor de la profundidad tope y_t se deduce haciendo $M^* = M_t$ con $U' = 0$ en la primera ecuación, de donde se deduce $y_t = 0,452278 \dots h$.

Los valores mínimos y, por tanto, más económicos resultan:

$$\left. \begin{aligned} U' &= \frac{M^* - 0,35 V h}{h'} \\ U &= 0,45 V + U' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Un valor más exacto de U sería: $0,4523 V + U'$.

No es necesaria ni preceptiva armadura de compresión cuando $M^* \leq M_t$. Aparte de la consideración de disponer en este caso una cierta armadura longitudinal para ejecución de la ferralla, parece podría utilizarse una cierta cuantía, sobre todo cuando la profundidad del rectángulo de compresiones sea grande. Como valores prácticos se tomarían para vigas normales:

$$U' = \frac{1}{8} \text{ a } \frac{1}{10} U \quad (8)$$

De esta forma siempre pondríamos una armadura, lo que da una "cierta calidad" al hormigón comprimido.

Queda por comentar brevemente las limitaciones en las resistencias de cálculo de acero.

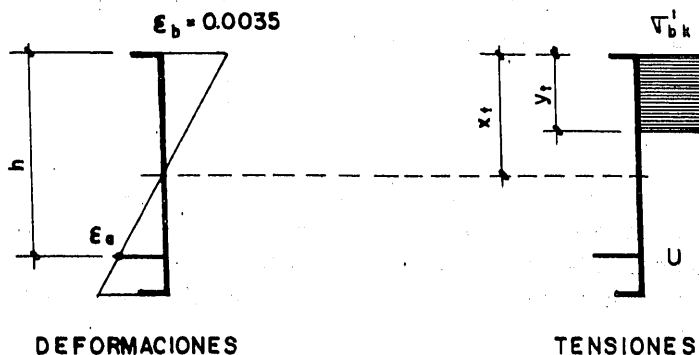


Figura 2.

Para el acero en tracción la situación más desfavorable, o sea, la de menor deformación, corresponde a un rectángulo de compresiones, con "profundidad tope" (figura 2).

Si $\frac{\sigma_{ak}}{E_a} > \epsilon_a$ el acero estará trabajando a $\sigma_a < \sigma_{ak}$.

Por compatibilidad de deformaciones tenemos:

$$\epsilon_a = \left\{ \frac{h}{X_t} - 1 \right\} \epsilon_b$$

y además:

$$X_t = \frac{4}{3} y_t \quad y_t = 0,4523 h \quad \epsilon_b = 0,0035$$

$$E_a = 2,1 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2$$

luego si:

$$\frac{\sigma_{ak}}{E_a} > \left\{ \frac{3}{4} \frac{1}{0,4523} - 1 \right\} \epsilon_b$$

o sea, $\sigma_{ak} > 4\,838 \text{ Kg./cm.}^2$.

Puede haber casos en que el acero trabaje a valor menor de su límite elástico. No se comete demasiado error ampliando el límite elástico hasta $\sigma_{ak} = 5\,000 \text{ Kg./cm.}^2$. En el caso de la armadura de compresión teóricamente hay mayor complicación. Prácticamente si sólo se dispone armadura cuando es necesario (aparte del mínimo que no se tiene en cuenta en el cálculo), o sea, si se dimensiona económicamente, tenemos un diagrama de deformaciones igual al anterior, es decir, el correspondiente a la "profundidad tope" (fig. 3).

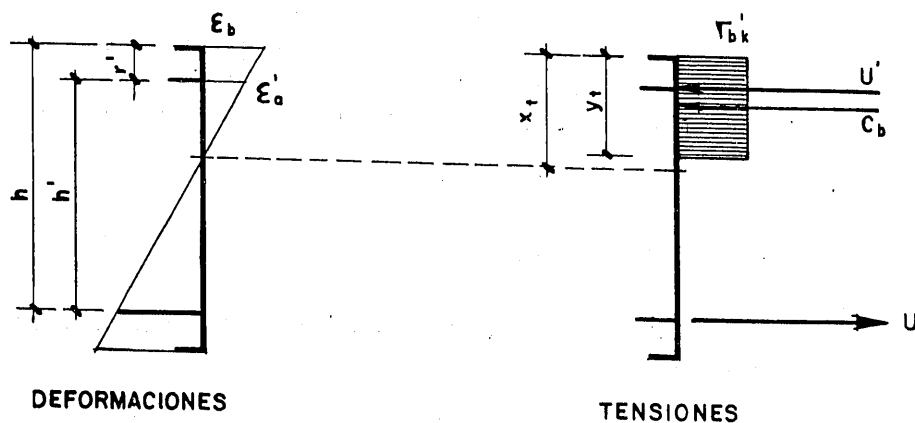


Figura 3.

Análogamente podemos decir que si $\frac{\sigma'_{ak}}{E_a} > \epsilon'_a$ el acero trabaja a $\sigma'_a < \sigma'_{ak}$.

Por compatibilidad de deformaciones tenemos:

$$\epsilon'_a = \left\{ 1 - \frac{r'}{x} \right\} \epsilon'_b$$

y además:

$$X_t = \frac{4}{3} y_t \quad y_t = 0,4523 h \quad \varepsilon_b \approx 0,0035$$

$$E_a = 2,1 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2 \quad \rho' = \frac{r'}{h}$$

luego si:

$$\rho' > \frac{4}{3} 0,452 \left\{ 1 - \frac{\sigma_{ak}}{E_a} \right\}$$

o sea, si:

$$\rho' > 0,6031 \left\{ 1 - \frac{\sigma_{ak}}{7350} \right\}$$

el acero trabaja a un valor menor de su límite elástico.

Los valores límites se expresan en esta tabla:

σ_{ak}	2400	4200	4600	4800	5000
$\rho' = \frac{r'}{h}$	0,406	0,258	0,226	0,209	0,193

Vemos que sólo en casos de recubrimiento relativos grandes al dimensionar se presentaría esta dificultad. Pero además, y con carácter general, se limitó por la instrucción el valor de cálculo de acero en compresión a 4 000 Kg./cm.², ya que en compresión simple y en algunos tipos de secciones el acortamiento en rotura del hormigón se acerca al valor 0,002, que corresponde en tensiones aproximadamente al valor indicado, por lo que la posibilidad indicada, si se dimensiona económicamente, es muy pequeña. El problema es muy distinto si se trata de la comprobación de una sección dada.

EMPLEO DE LA TABLA

Se han tomado como coeficientes de minoración los de la nueva instrucción E.H. 68:

$$\sigma_b^* = \frac{\sigma'_{bk}}{1.5} \quad \sigma_a^* = \frac{\sigma_{ak}}{1.1} \quad \sigma'_a = \frac{\sigma_{ak}}{1.1} > 4 \text{ Tm./cm.}^2$$

se supone que $\sigma_{ak} \leq 5 \text{ Tm./cm.}^2$.

M^* es el valor mayorado de la sollicitación a flexión.

Se calcula:

$$V = \sigma_b^* b h \quad \frac{M^*}{V h}$$

Con este último valor se entra en el primer recuadro, donde pueden distinguirse cuatro casos:

El primero exige cuantía mínima. Para valores de límite elástico normal se han tabulado los valores de $\frac{0,04}{\sigma_a^*}$. Si se desea afinar puede aplicarse la fórmula (6).

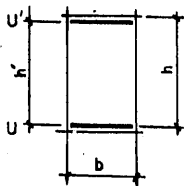
En el segundo caso se obtienen los valores directamente según la fórmula (5). También en este caso se han tabulado los valores de $\frac{1,05}{\sigma_a^*}$.

En el tercer caso es necesario el empleo de la tabla, donde también se han expresado para límites elásticos más usuales de los aceros los valores de $\frac{y}{h \sigma_a^*}$.

Por último, caso de necesitarse armadura de compresión, se emplean las fórmulas (7).

El programa y cálculo de los valores tabulados ha sido realizado por nuestro compañero Román Ferreras Fernández con computador IBM 1130.

$$V = \sigma_a' b h$$



$\frac{M^*}{Vh} \leq 0,039$	$U = 0,04 V$	$A = \frac{0,04}{\sigma_a'} V$
$0,039 < \frac{M^*}{Vh} \leq 0,10$	$U = 1,05 \frac{M^*}{Vh} V$	$A = \frac{1,05}{\sigma_a'} \frac{M^*}{Vh} V$
$0,10 < \frac{M^*}{Vh} \leq 0,35$	$U = \frac{y}{h} V$ (TABLA)	$A = \frac{y}{h \sigma_a'} V$
$0,35 < \frac{M^*}{Vh}$	$\begin{cases} U' = \frac{M^* - 0,35 Vh}{h} \\ U = 0,45 V + U' \end{cases}$	$\begin{cases} A' = \frac{U'}{\sigma_a'} \\ A = \frac{U}{\sigma_a'} \end{cases}$

σ_{ak}	2.400	4.200	4.600	4.800	5.000
$\frac{0,04}{\sigma_a'}$	0,0183	0,0105	0,0095	0,0092	0,0088
$\frac{1,05}{\sigma_a'}$	0,4813	0,2750	0,2511	0,2406	0,2310

$$\sigma_b' \text{ (t/m}^2\text{)}$$

$$b h \text{ (m.)}$$

$$\sigma_a' \text{ (t/cm}^2\text{)}$$

$$V \text{ (t.)}$$

$$A \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\sigma_b' = \frac{\sigma_a' h}{1,5}$$

$$\sigma_a' = \frac{\sigma_{ak}}{1,1}$$

$$\sigma_a' = \frac{\sigma_{ak}}{1,1} \geq 4$$

$A = V \frac{y}{h \sigma_a'}$		VALORES DE $\frac{y}{h \sigma_a'}$ SEGUN σ_{ak}					$\frac{M^*}{Vh}$
$\frac{M^*}{Vh}$	$\frac{y}{h}$	2.400	4.200	4.600	4.800	5.000	
0,104	0,110	0,050	0,028	0,026	0,025	0,024	0,104
0,108	0,115	0,052	0,030	0,027	0,026	0,025	0,108
0,113	0,120	0,054	0,031	0,028	0,027	0,026	0,113
0,117	0,125	0,057	0,032	0,029	0,028	0,027	0,117
0,121	0,130	0,059	0,034	0,031	0,029	0,028	0,121
0,126	0,135	0,061	0,035	0,032	0,030	0,029	0,126
0,130	0,140	0,064	0,036	0,033	0,032	0,030	0,130
0,134	0,145	0,066	0,037	0,034	0,033	0,031	0,134
0,139	0,150	0,068	0,039	0,035	0,034	0,033	0,139
0,143	0,155	0,071	0,040	0,037	0,035	0,034	0,143
0,147	0,160	0,073	0,041	0,038	0,036	0,035	0,147
0,151	0,165	0,075	0,043	0,039	0,037	0,036	0,151
0,155	0,170	0,077	0,044	0,040	0,038	0,037	0,155
0,160	0,175	0,080	0,045	0,041	0,040	0,038	0,160
0,164	0,180	0,082	0,047	0,043	0,041	0,039	0,164
0,168	0,185	0,084	0,048	0,044	0,042	0,040	0,168
0,172	0,190	0,087	0,049	0,045	0,043	0,041	0,172
0,176	0,195	0,089	0,051	0,046	0,044	0,042	0,176
0,180	0,200	0,091	0,052	0,047	0,045	0,044	0,180
0,188	0,210	0,096	0,055	0,050	0,048	0,046	0,188
0,196	0,220	0,100	0,057	0,052	0,050	0,048	0,196
0,203	0,230	0,105	0,060	0,054	0,052	0,050	0,203
0,211	0,240	0,109	0,062	0,057	0,054	0,052	0,211
0,219	0,250	0,114	0,065	0,059	0,057	0,055	0,219
0,226	0,260	0,119	0,068	0,062	0,059	0,057	0,226
0,233	0,270	0,123	0,070	0,064	0,061	0,059	0,233
0,241	0,280	0,128	0,073	0,066	0,064	0,061	0,241
0,248	0,290	0,132	0,075	0,069	0,066	0,063	0,248
0,255	0,300	0,137	0,078	0,071	0,068	0,066	0,255
0,265	0,315	0,144	0,082	0,075	0,072	0,069	0,265
0,275	0,330	0,151	0,086	0,078	0,075	0,072	0,275
0,285	0,345	0,158	0,090	0,082	0,079	0,075	0,285
0,295	0,360	0,164	0,094	0,086	0,082	0,079	0,295
0,305	0,375	0,171	0,098	0,089	0,085	0,082	0,305
0,314	0,390	0,178	0,102	0,093	0,089	0,085	0,314
0,320	0,400	0,183	0,104	0,095	0,091	0,088	0,320
0,332	0,420	0,192	0,110	0,100	0,096	0,092	0,332
0,343	0,440	0,201	0,115	0,105	0,100	0,096	0,343
0,350	0,452	0,207	0,118	0,108	0,104	0,100	0,350