

ASPECTO TEORICO DE LA RECARGA ARTIFICIAL-APLICACION A LA LUCHA DE LA INTRUSION SALINA(*)

Por CEFERINO ALVAREZ FERNANDEZ

Dr. Ingeniero Civil

La utilización de las formaciones permeables del subsuelo, que constituyen a veces unos verdaderos depósitos subterráneos, se plantea, en la actualidad, en los problemas de planificación de recursos hidráulicos.

Una utilización original de estos acuíferos es la de recarga artificial, que consiste en almacenar en ellos un cierto volumen de agua que puede ser aprovechado en época posterior.

Los objetivos de esta recarga artificial pueden ser varios. Uno de ellos es el salvaguardar la calidad del agua subterránea en los acuíferos costeros, realizando una barrera hidráulica que impida la penetración del agua de mar.

Dejando de lado los aspectos técnicos de la cuestión, se examina, de forma teórica, cómo se desarrolla el fenómeno de la recarga por medio de estanques o pozos.

Para esto se parte de la ley general de conservación de masa y se llega, en el caso de estanque, a las ecuaciones:

$$\nabla^2 h^2 + \frac{2w}{K} = \frac{1}{T/S} \frac{\partial h^2}{\partial t}$$

ó

$$\nabla^2 H^2 + \frac{2w}{k \cdot \delta (1 + \delta)} = \frac{1}{\frac{k \cdot H}{S} \cdot \delta} \frac{\partial h^2}{\partial t}$$

según que la recarga se haga en un acuífero de agua dulce o de agua salada.

La resolución de estas ecuaciones es de la forma:

$$h^2 = \frac{w}{2K} \frac{T}{S} \cdot t \{S_1^* + S_2^* + S_3^* + S_4^*\}$$

$$H^2 = \frac{W}{2k\delta(1+\delta)} \cdot \frac{T}{S} \cdot t \{S_1^* + S_2^* + S_3^* + S_4^*\}$$

Si la recarga se hace mediante pozos, la solución está dada por:

$$h^2 = \frac{Q}{2\pi K} F(u)$$

$$H^2 = \frac{Q}{2\pi K \delta (1 + \delta)} \cdot F(u)$$

Para la utilización de estas soluciones se da unas tablas de los valores de las funciones S^* y $F(u)$. De esta forma se halla, para un instante dado t , la situación de la piezometría. Claro está, el cálculo manual es pesado y es conveniente utilizar unos ordenadores.

Con estas soluciones se pretende orientar, en una zona dada, el examen de si la recarga artificial es viable o no y de qué forma lo es.

1. INTRODUCCION

Cuando se comparan los recursos hidráulicos que ofrecen la hidrología subterránea y la hidrología de superficie, pueden hacerse dos observaciones.

- Existe una gran disparidad entre los caudales que circulan subterráneamente (podemos fijar un máximo del orden de 1 m.³/seg.) y en superficie (superiores a 100 m.³/seg. en general).

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de marzo de 1971.

- Las irregularidades de la hidrología de superficie, hacen que una gran cantidad de agua vaya a parar directamente al mar sin ser aprovechada en absoluto.

Sin embargo, estas formaciones permeables del subsuelo constituyen, a veces, unos verdaderos depósitos subterráneos que no se pueden ignorar si queremos planificar los recursos hidráulicos. Se plantea entonces su utilización, almacenando en ellos el excedente del agua de superficie en épocas particulares, para ser utilizada más tarde.

Es el problema de la recarga artificial.

No obstante, esta recarga artificial puede tener objetivos múltiples. En particular puede servir para salvaguardar la calidad de ese agua almacenada, evitando su polución por agua salada. Es lo que ocurre en los acuíferos costeros. La recarga artificial permite realizar una barrera hidráulica a la vez que se almacena agua.

En lo que sigue vamos a examinar el aspecto teórico de tal fenómeno enfocando la cuestión desde el punto de vista cuantitativo, dejando de lado el punto de vista cualitativo de calidad de las aguas, así como el tecnológico de realización de plantas de recarga artificial.

Ese aspecto teórico será desarrollado de forma muy general, no teniendo en cuenta problemas tales como la zona de dispersión, la circulación en terrenos no saturados, etc.

2. RECARGA POR MEDIO DE ESTANQUES

2.1. Fundamentos teóricos.

La ley de conservación de masa relativa a un elemento se escribe:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

con:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b V_x dz + V_x(a) \frac{\partial a}{\partial x} - V_x(b) \frac{\partial b}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b V_y dz + V_y(a) \frac{\partial a}{\partial y} - V_y(b) \frac{\partial b}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = V_z(b) - V_z(a)$$

Por otra parte tenemos:

$$V_x = S \frac{dx}{dt} \quad (S: \text{porosidad o coeficiente de almacenamiento})$$

y:

$$y \cdot \frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial a}{\partial t}$$

La ecuación (1) puede entonces escribirse:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b V_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b V_y dz + V_z(b) - V_z(a) = 0$$

La derivación bajo el signo $\int$ nos da:

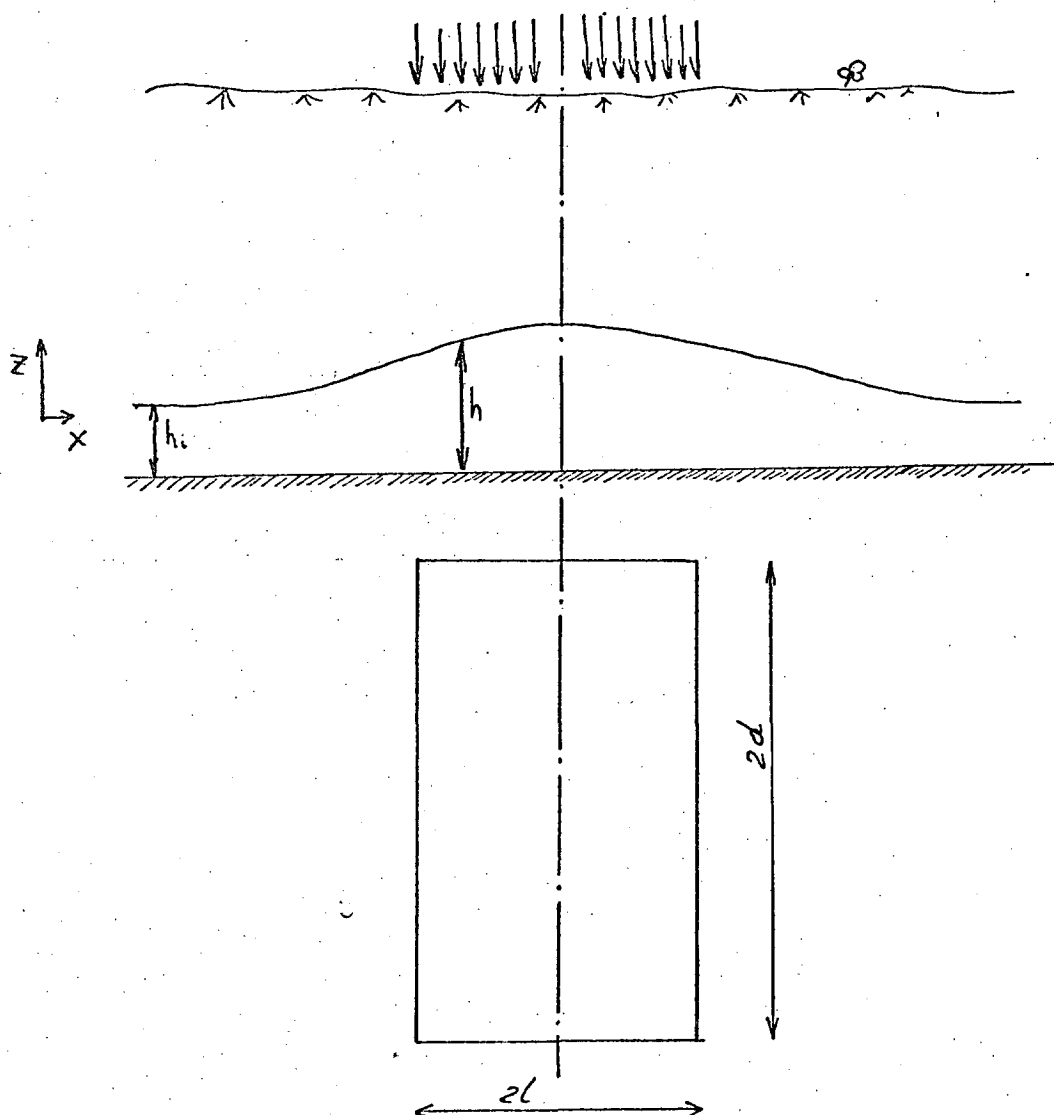
$$\int_a^b V_x dz = \int_a^b -K \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \varphi dz + \varphi(a) \cdot \frac{\partial a}{\partial x} - \varphi(b) \frac{\partial b}{\partial y} \right]$$

Finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \int_a^b \varphi dz + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(a) \frac{\partial a}{\partial x} - \varphi(b) \frac{\partial b}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(a) \frac{\partial a}{\partial y} - \right. \\ \left. - \varphi(b) \frac{\partial b}{\partial y} \right] = \frac{1}{K} [V_z(b) - V_z(a)] \end{aligned} \quad (5)$$

2.1.1. Recarga artificial en un acuífero de agua dulce.

La recarga artificial se efectúa utilizando un estanque de realimentación de dimensiones $2d$ y $2l$.



La ecuación (5) se escribe entonces:

$$\int_a^b \varphi dz = h^2$$

$$\varphi(a) \frac{\partial a}{\partial x} - \varphi(b) \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}$$

$$\varphi(a) \frac{\partial a}{\partial y} - \varphi(b) \frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y}$$

$$V_z(a) = 0$$

$$V_z(b) = -W + S \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \left(h^2 - \frac{1}{2} h^2 \right) = -\frac{W}{K} + \frac{S}{K} \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\nabla^2 h^2 = -\frac{2W}{K} + 2 \frac{S \cdot h}{K h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

O sea:

$$\nabla^2 h^2 + \frac{2W}{K} = \frac{1}{T/S} \frac{\partial h^2}{\partial t}$$

Si anteriormente a la recarga teníamos en el acuífero un flujo que nos daba una piezometría h_i , ésta obedece a la ecuación:

$$\nabla^2 h_i^2 = \frac{1}{T/S} \frac{\partial h_i^2}{\partial t}$$

Si en el momento t_0 se efectúa la recarga, tenemos pues:

$$\nabla^2 (h^2 - h_i^2) + \frac{2W}{K} = \frac{1}{T/S} \frac{\partial (h^2 - h_i^2)}{\partial t} \quad (6)$$

Si

$$\frac{2W}{K} = A$$

$$\frac{T}{S} = B$$

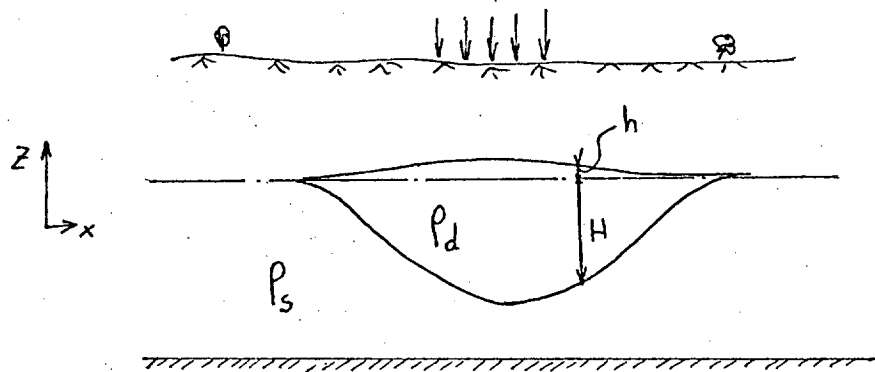
$$h^2 - h_i^2 = Z$$

Se escribe la ecuación general:

$$\nabla^2 Z + A = \frac{1}{B} \frac{dZ}{dt} \quad (7)$$

2.1.2. Recarga artificial en un acuífero de agua salada.

En este caso tenemos el esquema siguiente:



Podemos escribir entonces:

$$\varphi(x, y, h, t) = h$$

En el interfacio tenemos:

$$\varphi(x, y, -H, t) \cdot \rho_s = [\varphi(x, y, h, t) + \varphi(x, y, -H, t)] \rho_d$$

es decir:

$$\varphi(x, y, -H, t) = \frac{\rho_d}{\rho_s - \rho_d} \cdot h = \delta H$$

La ecuación (5) se escribe entonces:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi dz &= \int_{-H}^h \varphi dz = h(h+H) \\ \varphi(a) \frac{\partial a}{\partial x} - \varphi(b) \frac{\partial b}{\partial x} &= -\delta H \frac{\partial H}{\partial x} - h \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta H^2 + h^2) \\ \varphi(a) \frac{\partial a}{\partial y} - \varphi(b) \frac{\partial b}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta H^2 + h^2) \\ Vz(b) &= -W + S \frac{\partial h}{\partial t} \\ Vz(a) &= -S \frac{\partial H}{\partial t} \\ \nabla^2 \left[(h(h+H) - \frac{1}{2} (\delta H^2 + h^2)) \right] &= \frac{1}{k} \left(-W + S \frac{\partial (H+h)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

o:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(H^2 \delta (1+\delta) \cdot \frac{1}{2} \right) &= -\frac{W}{K} + \frac{S}{2K \cdot H} (1+\delta) \frac{\partial H^2}{\partial t} \\ \nabla^2 H^2 + \frac{2W}{K \cdot \delta (1+\delta)} &= \frac{S}{K \cdot H \cdot \delta} \cdot \frac{\partial H^2}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

si:

$$\begin{aligned}\frac{2W}{K \cdot \delta (1 + \delta)} &= A' \\ \frac{K \cdot H}{S} \cdot \delta &= B' \\ H^2 &= Z'\end{aligned}$$

la ecuación general es:

$$\nabla^2 Z' + A' = \frac{1}{B'} \cdot \frac{dZ}{dt} \quad (9)$$

La ecuación (9) es idéntica a la ecuación (7).

2.2. Resolución del problema.

La resolución de las ecuaciones (7) ó (9) se halla mediante la transformación de Laplace. Erdelyi nos da entonces la solución:

$$\begin{aligned}Z = \frac{A}{4} \cdot B \cdot t \left\{ S^* \left(\frac{l+x}{\sqrt{4Bt}}, \frac{d+y}{\sqrt{4Bt}} \right) + S^* \left(\frac{l+x}{\sqrt{4Bt}}, \frac{d-y}{\sqrt{4Bt}} \right) + \right. \\ \left. + S^* \left(\frac{l-x}{\sqrt{4Bt}}, \frac{d+y}{\sqrt{4Bt}} \right) + S^* \left(\frac{l-x}{\sqrt{4Bt}}, \frac{d-y}{\sqrt{4Bt}} \right) \right\}\end{aligned}$$

S^* es una función definida por:

$$S^* (\alpha, \beta) = \int_0^1 \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\tau}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\tau}} \right) d\tau$$

Damos en el anexo II los valores de S^* en función de α y β .

2.2.1. Recarga artificial en un acuífero de agua dulce.

En este caso la solución es:

$$h^2 - h_i^2 = \frac{W}{2K} \cdot T/S \cdot t \{ S_1^* + S_2^* + S_3^* + S_4^* \}$$

El valor máximo del nivel piezométrico es:

$$h_M^2 - h_i^2 = \frac{2W}{K} \cdot T/S \cdot t S^* \left(\frac{1}{\sqrt{4Bt}}, \frac{a}{\sqrt{4Bt}} \right)$$

Si a partir del instante t_0 se para la recarga, el teorema de superposición nos dará:

$$h^2 - h_i^2 = Z(x, y, t) - Z(x, y, t - t_0)$$

Si en vez de tener un estanque tenemos una zanja de longitud infinita ($d \rightarrow \infty$) tenemos, habida cuenta del anexo II:

$$h^2 - h_i^2 = \frac{W}{2K} T/S \cdot t \{ 2 \cdot S^*(\alpha, \infty) + 2 S^*(-\alpha, \infty) \}$$

$$h^2 - h_i^2 = \frac{W}{K} T/S \cdot t \left\{ 2 - 4i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{1-x}{\sqrt{4Bt}} \right) - 4i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{1+x}{\sqrt{4Bt}} \right) \right\}$$

para $x < 1$, y:

$$h^2 - h_i^2 = \frac{W}{K} T/S \cdot t \left\{ 4i^2 \operatorname{erfc} \frac{x-1}{\sqrt{4Bt}} - 4i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{1+x}{\sqrt{4Bt}} \right) \right\}$$

para $x > 1$.

2.2.2. Recarga artificial en un acuífero de agua salada.

En este caso la solución está dada por:

$$H^2 = \frac{W}{2K \cdot \delta \cdot (1 + \delta)} T/S \cdot t \cdot \{ S_1^* + S_2^* + S_3^* + S_4^* \}$$

Obtenemos de esta forma la configuración del interfaz agua-dulce-agua salada. El valor del nivel piezométrico del agua dulce puede hallarse utilizando la relación anteriormente establecida, es decir:

$$h = \delta H$$

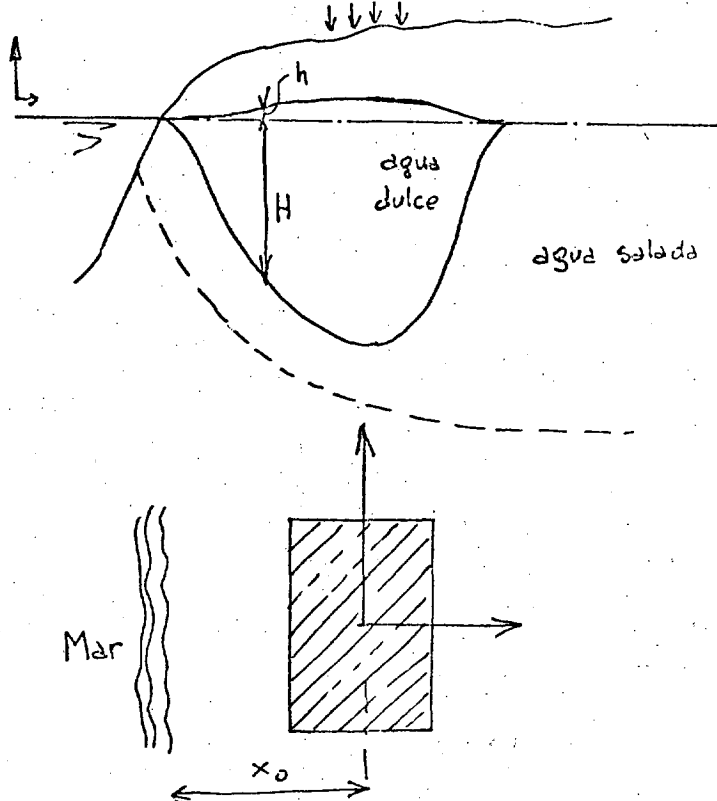
El valor máximo de H o, por consiguiente de h , será dado por:

$$H^2_M = \frac{2W}{K \cdot \delta \cdot (1 + \delta)} \cdot \frac{T}{S} \delta t \cdot S^* \left(\frac{l}{\sqrt{4Bt}}, \frac{d}{\sqrt{4Bt}} \right)$$

Si la recarga artificial tiene, además, como objetivo el de hacer una barrera hidráulica a la intrusión de agua salada, tendremos el adjunto esquema:

En este caso se halla la solución utilizando el teorema de las imágenes, considerando una recarga ficticia simétrica de la real referente al mar:

$$H^2 = Z(x, y, t) - Z(2x_0 + x, y, t)$$



A partir de un momento, una parte del caudal inyectado se pierde directamente en el mar. Este caudal tiene por valor:

$$q = -K \int_{-H}^h \frac{\partial d}{\partial x} \cdot dz$$

$$q = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^h \varphi dz - \delta H \frac{\partial H}{\partial x} - h \frac{\partial h}{\partial x} \right]$$

$$q = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} h (h + H) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta H^2 + h^2) \right]$$

es decir:

$$q = -\frac{K}{2} \cdot \delta (1 + \delta) \frac{\partial H^2}{\partial x}$$

La resolución de esta ecuación nos da, según Hantush:

$$Q_p = 2 \cdot d \cdot W \cdot \sqrt{4 B' t} \{ \operatorname{erfc} [(x_0 - l) / \sqrt{4 B' t}] - \operatorname{erfc} [(x_0 + l) / \sqrt{4 B' t}] \}$$

El volumen de agua así perdido durante el tiempo t_i es:

$$V_p = 8 d W t_i \sqrt{4 B' t_i} \{ \operatorname{erfc} [(x_0 - l) / \sqrt{4 B' t_i}] - \operatorname{erfc} [(x_0 + l) / \sqrt{4 B' t_i}] \}$$

3. RECARGA POR MEDIO DE POZOS

En este caso las ecuaciones (7) y (9) se reducen a:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{1}{B} \frac{\partial Z}{\partial t}$$

siendo:

$$Z(r, 0) = h_i^2$$

$$Z(\infty, t) = h_i^2$$

$$\left(r \frac{\partial Z}{\partial r} \right)_{r \rightarrow 0} = \frac{-Q}{\pi K}$$

en el caso de recarga en un acuífero de agua dulce, y siendo:

$$Z(r, 0) = 0$$

$$Z(\infty, t) = 0$$

$$\left(r \frac{\partial Z}{\partial r} \right)_{r \rightarrow 0} = \frac{-Q}{\pi (1 + \delta) \cdot \delta \cdot K}$$

en el caso de recarga en un acuífero de agua salada.

3.1. Recarga artificial en un acuífero de agua dulce.

Si el acuífero es libre, la solución es:

$$h^2 - h_i^2 = \frac{Q}{2\pi K} F(u)$$

$$u = \frac{4 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S}$$

$$y \quad F(u) = \int_0^u \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u} \cdot du$$

función tabulada en el anexo III.

Si tenemos un acuífero cautivo, la solución es:

$$h - h_i = \frac{Q}{4\pi t} F(u)$$

es decir, la ecuación de Theis.

3.2. Recarga artificial en un acuífero de agua salada.

Tenemos entonces la solución:

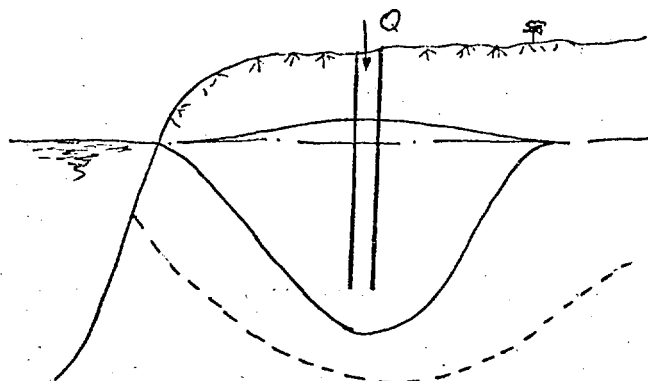
$$H^2 = \frac{Q}{2\pi(1+\delta)\delta \cdot K} F(u)$$

Si el acuífero es costero, el principio de las imágenes nos da:

$$H^2 = \frac{Q}{2\pi(1+\delta)\delta \cdot K} [F(u) - F(u')]$$

con:

$$u' = \frac{4 \cdot T \cdot t}{r'^2 \cdot S} \quad y \quad r'^2 = (2x_0 + x)^2 + y^2$$



La profundidad máxima, es decir, para $t \rightarrow \infty$ es:

$$H_M^{\infty} = 2,3 \frac{Q}{\pi(1+\delta)\delta \cdot K} \log \frac{r'}{r}$$

El caudal que se pierde en el mar es:

$$Q_p = Q \operatorname{erfc} \left(x_0 / \sqrt{4 B' t} \right)$$

y el volumen durante el tiempo t_i es:

$$V_p = 4 Q t_i i^2 \operatorname{erfc} \left(x_0 / \sqrt{4 B' t_i} \right)$$

4. CONCLUSIONES

La recarga artificial de acuíferos subterráneos constituye una solución, en muchos casos viable, de utilización máxima de los recursos hidráulicos. En rasgos generales, existen dos posibilidades: una consiste en utilizar unos estanques, otra por medio de pozos. Las dos tienen ventajas e inconvenientes; diremos que uno de ellos es el del espacio disponible para realizar tal recarga. En este caso es necesario tener unas ideas generales de la evolución de la piezometría, es decir, del nivel freático.

Damos una ecuación que permite trazarla. Subrayaremos que la resolución de tal ecuación será facilitada empleando ordenadores, ya que la resolución manual es larga y fácilmente pueden introducirse errores.

El aspecto de utilizar la recarga artificial como barrera hidráulica para evitar la penetración de las aguas del mar en los acuíferos de agua dulce es, a su vez, una solución elegante y económica, ya que se consigue un doble objetivo. Las ecuaciones dadas relativas a piezometría y volumen de agua perdida directamente al mar son de gran utilidad a la hora de examinar la viabilidad de las diversas soluciones al problema de los acuíferos costeros.

En resumen, diremos que la recarga artificial no puede plantearse sin tener unas ideas generales de cómo va a influenciar el medio ambiente, es decir, el embalse subterráneo, y que las ecuaciones expuestas permiten justamente dar solución a este problema.

ANEXO I. — La función error

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\varphi^2} d\varphi$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} 0 &= 0 \\ \operatorname{erf} \infty &= 1 \\ \operatorname{erf}(-x) &= -\operatorname{erf} x \end{aligned}$$

Se utiliza también la función:

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\varphi^2} d\varphi$$

Derivadas de $\operatorname{erf} x$:

$$\phi_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$$\phi_2(x) = \frac{-4}{\sqrt{\pi}} x \cdot e^{-x^2}$$

$$\phi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{erf} x$$

Integrales de $\operatorname{erfc} x$:

$$\int \operatorname{erfc} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x \operatorname{erfc} x$$

$$\int^2 \operatorname{erfc} x = \frac{1}{4} (\operatorname{erfc} x - 2x \int \operatorname{erfc} x)$$

$$2n \int^n \operatorname{erfc} x = \int^{n-2} \operatorname{erfc} x - 2x \int^{n-1} \operatorname{erfc} x$$

x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{erfc} x$	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$	$2 \int \operatorname{erfc} x$	$4 \int^2 \operatorname{erfc} x$	$e^{x^2} \operatorname{erfc} x$
0,0	0	1,0	1,1284	0	1,1284	1,0	1,0
0,05	0,05637	0,9436	1,1256	0,1126	1,0312	0,8921	0,9460
0,1	0,1124	0,8875	1,1172	0,2234	0,9396	0,7936	0,8965
0,15	0,1679	0,8320	1,1033	0,3310	0,8537	0,7040	0,8509
0,20	0,2227	0,7772	1,0841	0,4336	0,7732	0,6727	0,8090
0,25	0,2763	0,7236	1,0600	0,5300	0,6982	0,5491	0,7703
0,30	0,3286	0,6713	1,0313	0,6188	0,6284	0,4828	0,7346
0,35	0,3793	0,6206	0,9983	0,6988	0,5639	0,4233	0,7015
0,40	0,4283	0,5716	0,9615	0,7692	0,5043	0,3699	0,6708
0,45	0,4754	0,5245	0,9215	0,8294	0,4495	0,3223	0,6423
0,50	0,5205	0,4795	0,8788	0,8788	0,3993	0,2799	0,6157
0,55	0,5633	0,4366	0,8338	0,9172	0,3535	0,2423	0,5909
0,60	0,6038	0,3961	0,7872	0,9447	0,3119	0,2090	0,5678
0,65	0,6420	0,3579	0,7395	0,9614	0,2742	0,1798	0,5462
0,70	0,6778	0,3221	0,6913	0,9678	0,2402	0,1541	0,5259
0,75	0,7115	0,2888	0,6429	0,9644	0,2097	0,1316	0,5069
0,80	0,7421	0,2578	0,5950	0,9520	0,1823	0,1120	0,4891
0,85	0,7706	0,2293	0,5479	0,9314	0,1580	0,0950	0,4723
0,90	0,7969	0,2030	0,5020	0,9035	0,1364	0,0803	0,4565
0,95	0,8208	0,1791	0,4576	0,8695	0,1173	0,0677	0,4416
1,0	0,8427	0,1572	0,4151	0,8302	0,1005	0,0568	0,4276
1,1	0,8802	0,1197	0,3365	0,7403	0,0729	0,0396	0,4017
1,2	0,9103	0,0896	0,2673	0,6416	0,0521	0,0272	0,3785
1,3	0,9340	0,0659	0,2082	0,5413	0,0366	0,0184	0,3576
1,4	0,9522	0,0477	0,1589	0,4450	0,0253	0,0122	0,3387
1,5	0,9660	0,0338	0,1189	0,3568	0,0172	0,0080	0,3216
1,6	0,9763	0,0236	0,0872	0,2791	0,0115	0,0052	0,3060
1,7	0,9837	0,01621	0,0627	0,2132	0,0076	0,0033	0,2917
1,8	0,9890	0,01090	0,0442	0,1591	0,0049	0,0021	0,2786
1,9	0,9927	0,00721	0,0305	0,1160	0,0031	0,0013	0,2665
2,0	0,9953	0,00467	0,0207	0,0827	0,0020	0,0008	0,2554
2,2	0,9981	0,00186	0,0089	0,0393	0,0007	0,0003	0,2356
2,4	0,9993	0,00068	0,0036	0,0171	0,0002	0,0001	0,2185
2,6	0,9997	0,00023	0,0013	0,0068	0,0001		0,2036

ANEXO II. — Función $S^*(\alpha, \beta)$:

$$S^*(\alpha, \beta) = \int_0^1 \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\tau}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\tau}}\right) d\tau$$

Propiedades:

$$S^*(-\alpha, \beta) = S^*(\alpha, -\beta) = -S^*(\alpha, \beta)$$

$$S^*(-\alpha, -\beta) = S^*(\alpha, \beta)$$

$$S^*(\alpha, \beta) = S^*(\beta, \alpha)$$

$$S^*(0, \beta) = S^*(\alpha, 0) = 0$$

$$S^*(\alpha, \beta) \simeq 1 - 4i^2 \operatorname{erfc}(\beta) \quad \text{si } \alpha \geq 3$$

$$S^*(\alpha, \beta) \simeq 1 - 4i^2 \operatorname{erfc}(\alpha) \quad \text{si } \beta \geq 3$$

$$S^*(\alpha, \beta) \simeq 1 \quad \text{si } \alpha \geq 3 \quad \text{y } \beta \geq 3$$

VALORES DE LA FUNCION

$\alpha \backslash \beta$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.14	0.18	0.22	0.26	0.30	0.34	0.38	0.42	0.46	0.50	0.54	0.58	0.62
0.02	0.0041	0.0073	0.0101	0.0125	0.0146	0.0184	0.0216	0.0243	0.0267	0.0288	0.0306	0.0322	0.0337	0.0349	0.0361	0.0371	0.0380	0.0387
0.04	0.0073	0.0135	0.0188	0.0236	0.0278	0.0333	0.0416	0.0470	0.0518	0.0559	0.0596	0.0628	0.0657	0.0683	0.0705	0.0725	0.0743	0.0759
0.06	0.0101	0.0188	0.0266	0.0335	0.0398	0.0509	0.0602	0.0684	0.0754	0.0817	0.0871	0.0920	0.0963	0.1001	0.1035	0.1065	0.1091	0.1115
0.08	0.0125	0.0236	0.0335	0.0425	0.0508	0.0652	0.0776	0.0884	0.0978	0.1060	0.1133	0.1197	0.1254	0.1305	0.1350	0.1389	0.1425	0.1456
0.10	0.0146	0.0278	0.0398	0.0508	0.0608	0.0786	0.0939	0.1072	0.1188	0.1290	0.1381	0.1461	0.1532	0.1595	0.1650	0.1700	0.1744	0.1783
0.14	0.0184	0.0353	0.0509	0.0652	0.0786	0.1025	0.1232	0.1414	0.1573	0.1714	0.1839	0.1949	0.2048	0.2135	0.2212	0.2281	0.2343	0.2397
0.18	0.0216	0.0416	0.0602	0.0776	0.0939	0.1232	0.1490	0.1716	0.1916	0.2094	0.2251	0.2391	0.2515	0.2626	0.2724	0.2812	0.2890	0.2959
0.22	0.0243	0.0470	0.0684	0.0884	0.1072	0.1414	0.1716	0.1984	0.2222	0.2433	0.2621	0.2789	0.2938	0.3071	0.3189	0.3295	0.3389	0.3472
0.26	0.0267	0.0518	0.0754	0.0978	0.1188	0.1573	0.1916	0.2222	0.2494	0.2737	0.2954	0.3147	0.3320	0.3474	0.3612	0.3735	0.3844	0.3941
0.30	0.0288	0.0559	0.0817	0.1060	0.1290	0.1714	0.2094	0.2433	0.2737	0.3009	0.3252	0.3470	0.3665	0.3839	0.3995	0.4134	0.4257	0.4368
0.34	0.0306	0.0596	0.0871	0.1133	0.1381	0.1839	0.2251	0.2621	0.2954	0.3252	0.3520	0.3761	0.3976	0.4169	0.4341	0.4495	0.4633	0.4756
0.38	0.0322	0.0628	0.0920	0.1197	0.1461	0.1949	0.2391	0.2789	0.3147	0.3470	0.3761	0.4022	0.4256	0.4466	0.4654	0.4823	0.4973	0.5108
0.42	0.0337	0.0657	0.0963	0.1254	0.1532	0.2048	0.2515	0.2938	0.3320	0.3665	0.3976	0.4256	0.4508	0.4734	0.4937	0.5119	0.5281	0.5427
0.46	0.0349	0.0683	0.1001	0.1305	0.1595	0.2135	0.2626	0.3071	0.3474	0.3839	0.4169	0.4466	0.4734	0.4975	0.5191	0.5385	0.5559	0.5715
0.50	0.0361	0.0705	0.1035	0.1350	0.1650	0.2212	0.2724	0.3189	0.3612	0.3995	0.4341	0.4654	0.4937	0.5191	0.5420	0.5626	0.5810	0.5975
0.54	0.0371	0.0725	0.1065	0.1389	0.1700	0.2281	0.2812	0.3295	0.3735	0.4134	0.4495	0.4823	0.5119	0.5385	0.5626	0.5842	0.6036	0.6209
0.58	0.0380	0.0743	0.1091	0.1425	0.1744	0.2343	0.2890	0.3389	0.3844	0.4257	0.4633	0.4973	0.5281	0.5559	0.5810	0.6036	0.6238	0.6420
0.62	0.0387	0.0759	0.1115	0.1456	0.1783	0.2397	0.2959	0.3472	0.3941	0.4368	0.4756	0.5108	0.5427	0.5715	0.5975	0.6209	0.6420	0.6609
0.66	0.0394	0.0773	0.1136	0.1484	0.1818	0.2445	0.3020	0.3547	0.4027	0.4466	0.4865	0.5227	0.5556	0.5854	0.6122	0.6364	0.6582	0.6778
0.70	0.0401	0.0785	0.1154	0.1509	0.1849	0.2488	0.3075	0.3612	0.4104	0.4553	0.4962	0.5334	0.5672	0.5977	0.6254	0.6503	0.6728	0.6929
0.74	0.0406	0.0796	0.1171	0.1531	0.1876	0.2526	0.3123	0.3671	0.4172	0.4630	0.5048	0.5429	0.5774	0.6087	0.6371	0.6627	0.6857	0.7064
0.78	0.0411	0.0806	0.1185	0.1550	0.1900	0.2559	0.3166	0.3722	0.4232	0.4699	0.5125	0.5513	0.5865	0.6185	0.6475	0.6736	0.6972	0.7184
0.82	0.0415	0.0814	0.1193	0.1567	0.1921	0.2589	0.3203	0.3768	0.4286	0.4760	0.5192	0.5587	0.5946	0.6272	0.6567	0.6834	0.7074	0.7291
0.86	0.0419	0.0822	0.1209	0.1582	0.1940	0.2615	0.3237	0.3808	0.4333	0.4813	0.5252	0.5653	0.6017	0.6348	0.6648	0.6920	0.7165	0.7386
0.90	0.0422	0.0828	0.1219	0.1595	0.1957	0.2638	0.3266	0.3844	0.4374	0.4860	0.5305	0.5711	0.6080	0.6416	0.6721	0.6996	0.7245	0.7469
0.94	0.0425	0.0834	0.1228	0.1607	0.1971	0.2658	0.3292	0.3875	0.4411	0.4902	0.5351	0.5762	0.6136	0.6476	0.6784	0.7063	0.7316	0.7543
0.98	0.0428	0.0839	0.1236	0.1617	0.1984	0.2676	0.3314	0.3902	0.4442	0.4938	0.5392	0.5807	0.6184	0.6528	0.6840	0.7123	0.7378	0.7605
1.00	0.0429	0.0842	0.1239	0.1622	0.1990	0.2684	0.3324	0.3914	0.4457	0.4955	0.5410	0.5827	0.6206	0.6552	0.6865	0.7150	0.7406	0.7638
1.20	0.0437	0.0858	0.1263	0.1654	0.2030	0.2740	0.3396	0.4001	0.4558	0.5070	0.5540	0.5969	0.6362	0.6719	0.7044	0.7339	0.7605	0.7846
1.40	0.0441	0.0866	0.1275	0.1669	0.2049	0.2767	0.3431	0.4043	0.4608	0.5127	0.5603	0.6039	0.6433	0.6801	0.7132	0.7432	0.7704	0.7949
1.80	0.0444	0.0891	0.1285	0.1680	0.2062	0.2785	0.3454	0.4071	0.4641	0.5165	0.5645	0.6086	0.6489	0.6866	0.7190	0.7494	0.7769	0.8018
2.00	0.0444	0.0871	0.1284	0.1681	0.2064	0.2787	0.3457	0.4075	0.4645	0.5169	0.5651	0.6092	0.6495	0.6865	0.7198	0.7502	0.7773	0.8027
2.20	0.0444	0.0872	0.1284	0.1682	0.2065	0.2788	0.3458	0.4076	0.4646	0.5171	0.5653	0.6094	0.6497	0.6865	0.7200	0.7505	0.7781	0.8030
2.50	0.0444	0.0872	0.1284	0.1682	0.2065	0.2788	0.3458	0.4077	0.4647	0.5172	0.5653	0.6095	0.6498	0.6867	0.7202	0.7506	0.7782	0.8032
3.00	0.0444	0.0872	0.1284	0.1682	0.2065	0.2789	0.3458	0.4077	0.4647	0.5172	0.5654	0.6095	0.6499	0.6867	0.7202	0.7506	0.7782	0.8032

VALORES DE LA FUNCION

$\frac{u}{v}$	0.62	0.65	0.70	0.74	0.78	0.82	0.86	0.90	0.94	0.98	1.00	1.20	1.40	1.60	2.00	2.20	2.50	3.00
0.02	0.0387	0.0394	0.0401	0.0406	0.0411	0.0415	0.0419	0.0422	0.0425	0.0428	0.0429	0.0437	0.0441	0.0444	0.0444	0.0444	0.0444	0.0444
0.04	0.0759	0.0773	0.0785	0.0796	0.0806	0.0814	0.0822	0.0828	0.0834	0.0839	0.0842	0.0858	0.0866	0.0871	0.0871	0.0872	0.0872	0.0872
0.06	0.1115	0.1136	0.1154	0.1171	0.1185	0.1198	0.1209	0.1219	0.1228	0.1235	0.1239	0.1263	0.1275	0.1283	0.1284	0.1284	0.1284	0.1284
0.08	0.1456	0.1484	0.1509	0.1531	0.1550	0.1567	0.1582	0.1595	0.1607	0.1617	0.1622	0.1654	0.1669	0.1680	0.1681	0.1682	0.1682	0.1682
0.10	0.1783	0.1816	0.1849	0.1876	0.1900	0.1921	0.1940	0.1957	0.1971	0.1984	0.1990	0.2030	0.2049	0.2062	0.2064	0.2065	0.2065	0.2065
0.14	0.2397	0.2445	0.2488	0.2526	0.2559	0.2589	0.2615	0.2638	0.2658	0.2676	0.2684	0.2740	0.2767	0.2785	0.2787	0.2788	0.2788	0.2789
0.18	0.2959	0.3020	0.3075	0.3123	0.3166	0.3203	0.3237	0.3266	0.3292	0.3314	0.3324	0.3395	0.3431	0.3454	0.3457	0.3458	0.3458	0.3458
0.22	0.3472	0.3547	0.3612	0.3671	0.3722	0.3768	0.3808	0.3844	0.3875	0.3902	0.3914	0.4001	0.4043	0.4071	0.4075	0.4076	0.4077	0.4077
0.26	0.3941	0.4027	0.4104	0.4172	0.4232	0.4286	0.4333	0.4374	0.4411	0.4442	0.4457	0.4558	0.4608	0.4641	0.4645	0.4646	0.4647	0.4647
0.30	0.4368	0.4466	0.4553	0.4630	0.4699	0.4760	0.4813	0.4860	0.4902	0.4933	0.4955	0.5070	0.5127	0.5165	0.5169	0.5171	0.5172	0.5172
0.34	0.4756	0.4865	0.4962	0.5048	0.5125	0.5192	0.5252	0.5305	0.5351	0.5392	0.5410	0.5540	0.5603	0.5645	0.5651	0.5653	0.5653	0.5654
0.38	0.5108	0.5227	0.5334	0.5429	0.5513	0.5587	0.5653	0.5711	0.5762	0.5807	0.5827	0.5969	0.6039	0.6085	0.6092	0.6094	0.6095	0.6095
0.42	0.5427	0.5556	0.5672	0.5774	0.5865	0.5946	0.6017	0.6080	0.6136	0.6184	0.6206	0.6362	0.6438	0.6489	0.6495	0.6497	0.6498	0.6499
0.46	0.5715	0.5854	0.5977	0.6087	0.6185	0.6272	0.6348	0.6416	0.6476	0.6528	0.6552	0.6719	0.6801	0.6856	0.6863	0.6865	0.6867	0.6867
0.50	0.5975	0.6122	0.6254	0.6371	0.6475	0.6567	0.6648	0.6721	0.6784	0.6840	0.6865	0.7044	0.7132	0.7190	0.7198	0.7200	0.7202	0.7202
0.54	0.6209	0.6364	0.6503	0.6627	0.6736	0.6834	0.6920	0.6996	0.7063	0.7123	0.7150	0.7339	0.7432	0.7494	0.7502	0.7505	0.7506	0.7506
0.58	0.6420	0.6582	0.6728	0.6857	0.6972	0.7074	0.7165	0.7245	0.7316	0.7378	0.7406	0.7605	0.7704	0.7769	0.7778	0.7781	0.7782	0.7782
0.62	0.6609	0.6778	0.6929	0.7064	0.7184	0.7291	0.7376	0.7449	0.7513	0.7568	0.7594	0.7804	0.7909	0.7974	0.7982	0.7984	0.7985	0.7985
0.66	0.6773	0.6953	0.7110	0.7250	0.7375	0.7486	0.7584	0.7671	0.7748	0.7816	0.7846	0.8064	0.8171	0.8243	0.8252	0.8255	0.8257	0.8257
0.70	0.6929	0.7110	0.7272	0.7417	0.7546	0.7660	0.7762	0.7852	0.7932	0.8002	0.8034	0.8259	0.8370	0.8445	0.8454	0.8458	0.8460	0.8460
0.74	0.7064	0.7250	0.7417	0.7566	0.7698	0.7816	0.7921	0.8014	0.8096	0.8168	0.8201	0.8434	0.8549	0.8627	0.8636	0.8640	0.8642	0.8642
0.78	0.7184	0.7375	0.7546	0.7698	0.7834	0.7956	0.8063	0.8159	0.8243	0.8317	0.8351	0.8591	0.8710	0.8789	0.8809	0.8813	0.8815	0.8815
0.82	0.7291	0.7486	0.7660	0.7816	0.7956	0.8080	0.8190	0.8288	0.8374	0.8450	0.8485	0.8731	0.8853	0.8935	0.8945	0.8949	0.8951	0.8951
0.86	0.7386	0.7584	0.7762	0.7921	0.8063	0.8190	0.8302	0.8402	0.8491	0.8569	0.8604	0.8855	0.8980	0.9065	0.9075	0.9079	0.9081	0.9081
0.90	0.7469	0.7671	0.7852	0.8014	0.8159	0.8288	0.8402	0.8504	0.8594	0.8674	0.8710	0.8966	0.9094	0.9180	0.9191	0.9195	0.9197	0.9197
0.94	0.7543	0.7748	0.7932	0.8096	0.8243	0.8374	0.8491	0.8594	0.8686	0.8767	0.8803	0.9064	0.9195	0.9282	0.9294	0.9298	0.9300	0.9300
0.98	0.7603	0.7816	0.8002	0.8168	0.8317	0.8450	0.8569	0.8674	0.8767	0.8849	0.8886	0.9151	0.9284	0.9373	0.9384	0.9389	0.9391	0.9391
1.00	0.7638	0.7846	0.8034	0.8201	0.8351	0.8485	0.8604	0.8710	0.8803	0.8886	0.8924	0.9191	0.9324	0.9414	0.9426	0.9430	0.9432	0.9433
1.20	0.7846	0.8064	0.8259	0.8434	0.8591	0.8731	0.8855	0.8966	0.9064	0.9151	0.9191	0.9472	0.9614	0.9709	0.9722	0.9726	0.9728	0.9729
1.40	0.7949	0.8171	0.8370	0.8549	0.8710	0.8853	0.8980	0.9094	0.9195	0.9284	0.9324	0.9614	0.9759	0.9853	0.9871	0.9875	0.9877	0.9878
1.60	0.8018	0.8243	0.8445	0.8627	0.8789	0.8935	0.9065	0.9180	0.9282	0.9373	0.9414	0.9709	0.9853	0.9959	0.9972	0.9977	0.9979	0.9980
1.80	0.8077	0.8296	0.8484	0.8666	0.8829	0.8975	0.9105	0.9219	0.9324	0.9414	0.9455	0.9759	0.9904	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
2.00	0.8103	0.8316	0.8496	0.8678	0.8841	0.8987	0.9117	0.9231	0.9336	0.9426	0.9467	0.9771	0.9916	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
2.20	0.8128	0.8336	0.8516	0.8698	0.8861	0.8997	0.9127	0.9241	0.9346	0.9436	0.9477	0.9781	0.9926	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
2.50	0.8153	0.8356	0.8536	0.8718	0.8881	0.9017	0.9147	0.9261	0.9366	0.9456	0.9497	0.9801	0.9946	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.00	0.8178	0.8376	0.8556	0.8738	0.8901	0.9037	0.9167	0.9281	0.9386	0.9476	0.9517	0.9821	0.9966	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

ANEXO III.
$$F(u) = \int_0^u \frac{e^{-v}}{v} - \frac{1}{v} dv$$

u	$u \times 10^{10}$	$u \times 10^9$	$u \times 10^8$	$u \times 10^7$	$u \times 10^6$	$u \times 10^5$	$u \times 10^4$	$u \times 10^3$	$u \times 10^2$	$u \times 10^1$	$u \times 10^0$	$u \times 10^{-1}$
10	24.7512	22.4486	20.1460	17.8435	15.5409	13.2383	10.9357	8.6332	6.3315	4.0379	1.8229	0.2194
7	24.3932	22.0906	19.7880	17.4854	15.1828	12.8802	10.5777	8.2752	5.9940	3.6841	1.5055	0.1111
5	24.0581	21.7555	19.4529	17.1503	14.8477	12.5451	10.2426	7.9402	5.6394	3.3547	1.2227	0.04890
4	23.8349	21.5323	19.2298	16.9272	14.6246	12.3220	10.0194	7.7172	5.4167	3.1365	1.0443	0.02491
3	23.5474	21.2448	18.9422	16.6396	14.3370	12.0343	9.7318	7.4295	5.1300	2.8572	0.8290	0.008590
2.5	23.3649	21.0623	18.7598	16.4572	14.1546	11.8520	9.5495	7.2472	4.9442	2.6813	0.7024	0.003779
2	23.1418	20.8392	18.5356	16.2340	13.9314	11.6289	9.3263	7.0242	4.7261	2.4679	0.5598	0.001148
1.5	22.8545	20.5520	18.2494	15.9468	13.6442	11.3416	9.0391	6.7371	4.4405	2.1968	0.3987	0.0001692
1.25	22.6718	20.3892	18.0666	15.7640	13.4614	11.1589	8.8563	6.5545	4.2591	2.0269	0.3106	0.00003767
1	22.4486	20.1460	17.8435	15.5409	13.2383	10.9357	8.6332	6.3315	4.0379	1.8229	0.2194	0.00004157

B I B L I O G R A F I A

- ROGER S. M. DEWIEST: "Artificial recharge through augmented bank storage". Aihis-Haifa, 1967.
- V. M. SHESTAKOU y I. P. KRAVCHENKO: "A contribution to the technique for evaluation of natural and workable resources of near-canal fresh-water-lenses". Aihis-Haifa, 1967.
- M. S. HANTUSH: "Growth and decay of Ground water-Mounds in Response fo uniform percolation". Water Ressources Research, vol. 3, núm. 1, 1967.
- M. S. HANTUSH: "Unsteady movement of fresh water in thick unconfined saline aquifers".
- N. COLOMBUS: "Viscous model study of sea water intrusion in water table aquifers". Water Ressources Research, vol. 1, núm. 2, 1965.
- M. MUSKAT: "The flow of homogeneous fluids through porous media". J. W. Edwards, 1946.