

RESOLUCION GEOMETRICA DEL TRAZADO MAS ECONOMICO DE LINEAS ELECTRICAS Y CONDUCCIONES EN GENERAL (*)

Por ANTONIO ANGULO ALVAREZ

Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos

Se desarrolla un procedimiento razonado para lograr el trazado más económico de líneas eléctricas que hayan de enlazar entre sí más de dos puntos. Estudia el caso general siendo distintos los costes kilométricos de las diversas líneas, que luego particulariza para costes iguales. También resuelve el caso de alimentación de dos puntos, desde una línea, sin que esté fijado el punto de derivación. La aplicación del procedimiento descrito, puede extenderse a cualquier clase de conducciones y vías de comunicación.

Objeto.

El enlace más corto entre dos puntos, desde el punto de vista geométrico, es evidentemente la recta que los une. En otros aspectos, la solución puede ser otra. Hay quien dice que, en ciudades importantes, el camino más corto entre dos puntos es el que traspone menos semáforos.

Cuando se trata de enlazar tres puntos, lo más económico es hallar un cuarto punto, intermedio, en el que confluyan las líneas procedentes de los tres puntos que han servido de base, cuyo punto debe ser el que dé lugar a un coste total mínimo.

Se expone seguidamente el criterio que se ha obtenido, en este caso de enlazar tres puntos mediante líneas eléctricas.

Por supuesto, puede aplicarse también para toda clase de conducciones y vías de comunicación.

Disculpas.

El problema resuelto es, pues, solamente geométrico, destacando tal hecho por ser sabido que hay otras muchas circunstancias que imponen los trazados; fincas a ocupar, dificultad material de construir la conducción en ciertos terrenos, facilidades posibles de expropiación, etcétera.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de octubre de 1970.

También debe destacarse que quizá el problema esté ya resuelto, bien empleando las matemáticas clásicas o las modernas, que no han sido cultivadas por el autor.

Se expone, pues, la solución obtenida, por desconocer que se haya logrado anteriormente, y destacando que los razonamientos matemáticos utilizados son los aprendidos allá por los lejanos años 20, para acometer el ingreso en nuestra querida Escuela.

Fundamento.

En la figura 1 se ha representado el triedro clásico de tres dimensiones, situando en el plano x y la planta de las líneas a construir, que

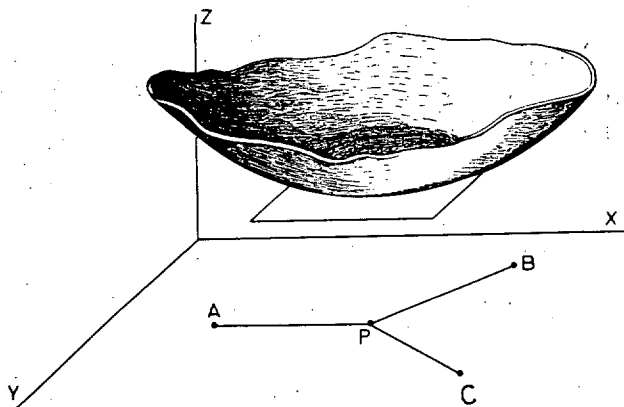


Figura 1.

enlacen el punto A con los B y C, mediante un punto intermedio P.

Para cada punto P del plano resulta un coste

(en pesetas) total de las líneas que lo enlacen con los puntos dados. Este importe define la "cota" correspondiente a dicho punto.

El conjunto de puntos correspondientes a los P , definirá una superficie cóncava hacia la parte superior.

El punto concreto P que da lugar a un *mínimo* de cota será el buscado. Si se dispusiese de la superficie, bastaría encontrar el punto de contacto con un plano horizontal, que fuera elevándose hasta establecer el citado contacto.

La condición de mínimo obliga a que no exista variación en la cota (que es el coste total), para variaciones diferenciales del punto P , en dos direcciones distintas.

Se hace referencia a la figura 2, en la que se han definido los ángulos que forman entre sí las líneas que confluyen en el punto P .

En el caso general los costes unitarios (por kilómetro) de las líneas se estima que sean desiguales. El cociente de dividir el coste kilométrico de la línea PC , más barata, por el correspondiente a la AP , más costosa, evidentemente será menor que la unidad y lo designaremos por n . El que resulte de dividir el coste kilométrico de la línea intermedia PB por el propio de la línea AP , más cara, lo designaremos por m , y también ha de ser menor que la unidad.

Por tanto,

$$n \leq m \leq 1. \quad [1]$$

Según la figura 2, se designa por β al ángulo que forma la línea PB , de precio intermedio, con la prolongación de la línea AP , más

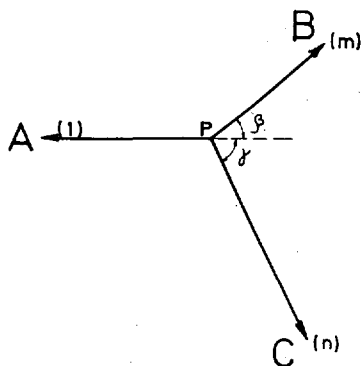


Figura 2.

costosa, y por γ al que forma la misma prolongación con la línea PC , menos costosa.

Se hace coincidir una dirección para la obtención del mínimo, con la de la línea AP , más costosa. Otra dirección que se adopta para imponer la condición de mínimo, será la perpendicular a la anterior. Así se tienen dos direcciones, a las que se ha de imponer la condición de que no varíe el coste total de la conducción.

Se desplaza la posición del punto P al P' , infinitamente próximo, y se produce un acortamiento en la longitud de la línea AP , más costosa, que es proporcional a la magnitud dx de dicho desplazamiento (fig. 3).

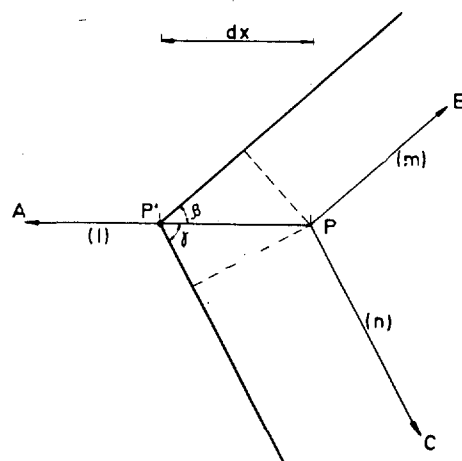


Figura 3.

Por el contrario, la línea PB , de coste intermedio, aumenta de longitud:

$$dx \cdot \cos \beta,$$

y la PC , de coste mínimo, aumenta:

$$dx \cdot \cos \gamma.$$

La condición para que no se altere el coste total, será:

$$-dx + m \cdot dx \cdot \cos \beta + n dx \cdot \cos \gamma = 0,$$

o sea:

$$m \cos \beta + n \cos \gamma = 1. \quad [2]$$

Se impone la misma condición con un desplazamiento $PP'' = d$ y (fig. 4) perpendicular a la dirección de la línea AP , más costosa.

La longitud de la línea PB , de coste intermedio, disminuye en $d \gamma \times \sin \beta$, y la PC , de menor coste, aumenta su longitud en $d \gamma \times \sin \gamma$, según se deduce fácilmente de la figura 4.

La condición de mínimo obliga a que la reducción de coste total, al ser más corta la línea PB , sea igual al aumento motivado por que la línea PC tenga mayor longitud, ya que no se ha alterado la longitud de la línea AP .

Dicha condición se expresa como sigue:

$$m \cdot \sin \beta = n \sin \gamma. \quad [3]$$

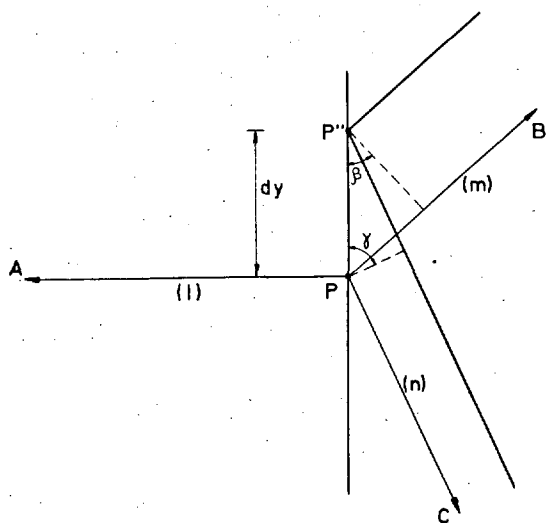


Figura 4.

Se tienen, pues, dos ecuaciones, [2] y [3], con dos incógnitas (β y γ) y dos datos (m y n), cuya resolución resulta laboriosa analíticamente, pero puede resolverse con gran facilidad del modo gráfico señalado en la figura 5.

Se toma una longitud unidad, y con centro en cada extremo, se trazan sendas circunferencias de radios m y n . La intersección de estos dos arcos define los ángulos β y γ buscados, comprobándose inmediatamente que cumplen las ecuaciones [2] y [3].

Se han resuelto varios casos concretos, para distintos valores de m y de n , resumiéndose en

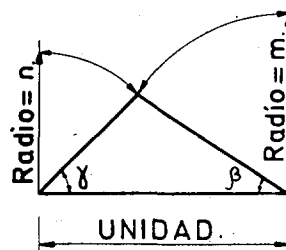


Figura 5.

la figura 6 los valores de los ángulos β y γ en función de m (abscisas) y de n (ordenadas), bastando fijar sobre tal gráfico el punto correspon-

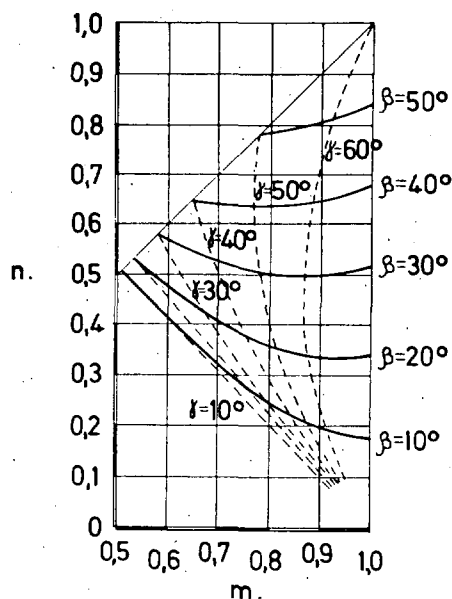


Figura 6.

diente a cada caso, para obtener directamente los ángulos β y γ .

Es destacable que la zona utilizable es la comprendida entre las rectas:

$$n = 1 - m,$$

y

$$n = m.$$

La primera de estas condiciones resulta de la ecuación [2] y la segunda de la [1].

La solución es, pues, la siguiente: El punto

intermedio P ha de definir rectas PA , PB y PC que formen entre sí los ángulos siguientes:

$$\widehat{APB} = \pi - \beta,$$

$$\widehat{APC} = \pi - \gamma.$$

Aplicaciones.

Los datos de cada caso serán las posiciones en planta de los puntos A , B y C , y los valores auxiliares.

$$m = \frac{\text{coste kilométrico de la línea } PB}{\text{coste kilométrico de la línea } PA};$$

$$n = \frac{\text{coste kilométrico de la línea } PC}{\text{coste kilométrico de la línea } PA}.$$

En función de estos valores auxiliares se obtienen los ángulos β y γ mediante la construcción de la figura 5, ó el gráfico de la figura 6, y utilizando la construcción clásica de arcos capaces, se obtiene la situación del punto P . Un ejemplo está reflejado en la figura 7.

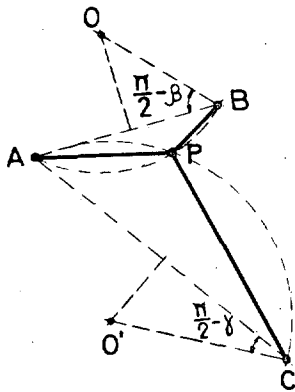


Figura 7.

Limitaciones.

El punto P debe estar situado en el interior del triángulo ABC , pues en el caso de que así no fuese, es más económico unir directamente los puntos A , B y C , sin confluir las líneas en un punto intermedio.

Este concepto se aprecia fácilmente en las figuras 8 y 9, cuyos puntos P_1 y P_2 no tienen utilización.

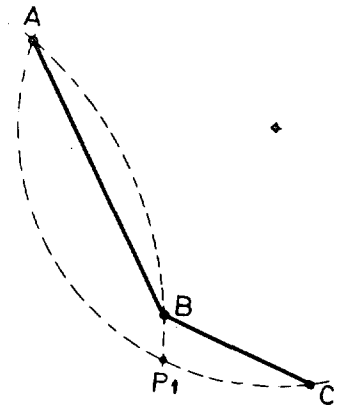


Figura 8.

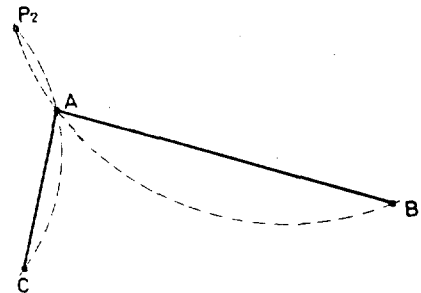


Figura 9.

Casos particulares.

Pudiera ocurrir que las dos líneas de menor coste kilométrico fuesen de igual coste. Entonces:

$$m = n.$$

De la ecuación [3] resulta que

$$\beta = \gamma,$$

y de la [2]:

$$\cos \beta = \frac{1}{2m}.$$

Otro caso particular es que fuesen iguales los costes kilométricos de las tres líneas que confluyen en P , resultando entonces que, además de ser iguales, los ángulos β y γ valen precisamente 60° .

Derivación de una línea en un punto inconcreto de ella.

Si en vez de conocer el punto A del que haya de partir la línea de alimentación, se conociese la situación de una línea (que puede ser ya existente) de la que se puede derivar la energía en cualquier punto de la misma, el desarrollo del problema ha de ser el siguiente (fig. 10).

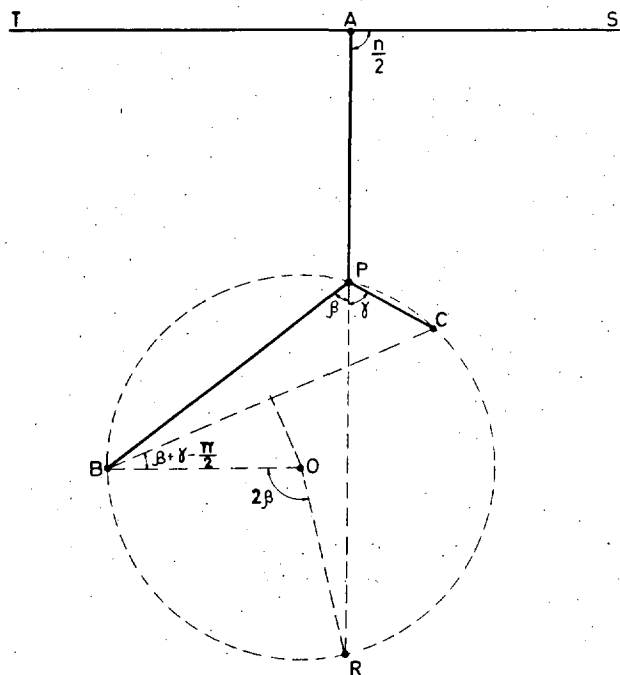


Figura 10.

1.º Se obtienen los valores β y γ por el mismo sistema que el caso antes estudiado, en función de m y de n .

2.º Por los puntos B y C se hace pasar el arco capaz del ángulo $(\beta + \gamma)$, con auxilio del centro O , situado en su mediatriz y tal que el ángulo:

$$\widehat{CBO} = \widehat{BCO} = \beta + \gamma - \frac{\pi}{2}.$$

3.º En el segmento restante, del mismo círculo, se busca el punto R , tal que:

$$\widehat{BOR} = 2\beta.$$

4.º Por este punto R se traza la perpendicular a la línea TS , de la que se ha de derivar la energía. Esta recta define el punto A , en donde ha de establecerse la derivación, y por su intersección con el arco capaz, el punto P , donde han de confluir las líneas.

La razón de esta construcción es que, en el punto P se verifican las condiciones precisas de los ángulos β y γ para que el coste total sea mínimo y además la línea AP , por ser perpendicular a TS , da lugar a la longitud mínima.

Extensión del método al caso de más de tres puntos a unir.

El mismo criterio se puede utilizar sucesivamente, aplicándolo primero a tres puntos, y a partir de uno de ellos, continuar hacia otros dos. A su vez alguno de éstos puede servir de partida para otros dos siguientes, continuando de modo sucesivo. En otras ocasiones hacen falta diversos puntos intermedios enlazados entre sí.

Uno de estos casos se ha resuelto en la figura 11, en la cual se resuelve el caso de lograr la conducción más económica para alimentar los puntos B , C , D y E partiendo del punto A .

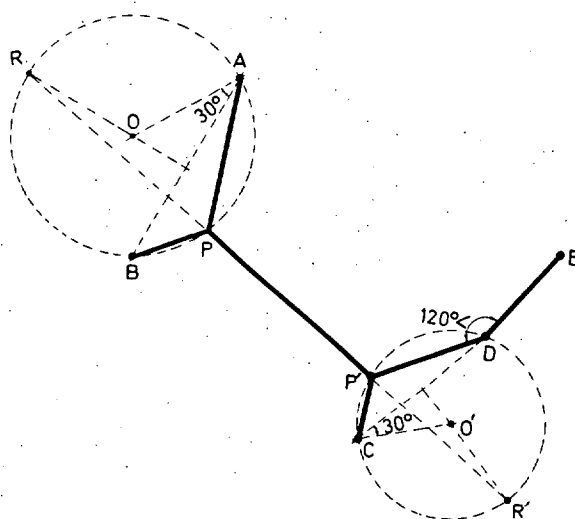


Figura 11.

Para que el ejemplo resulte más sencillo, se ha supuesto que el coste kilométrico de todas las líneas es el mismo ($\beta = \gamma = 60^\circ$).

Se sitúa el centro O del arco capaz sobre A y B , del ángulo $2\beta = 120^\circ$ y el punto R , situado en el mismo círculo y en la mediatriz de AB .

De modo análogo se traza el arco capaz del mismo ángulo sobre los puntos C y D , con centro en O' , y se sitúa el punto R' , sobre el mismo círculo y en la mediatriz de CD .

Uniendo con una recta los puntos R y R' se obtienen los puntos intermedios P y P' , que uni-

dos con los A , B , C y D establecen el trazado, hasta el punto D .

Para alcanzar el punto E no resulta preciso ningún otro punto intermedio, puesto que el ángulo $\widehat{P'DE}$ es mayor que $\pi - \beta$, que en el caso concreto de que sea igual el coste kilométrico de todas las líneas $\pi - \beta = 120^\circ$.

En el caso de que fuesen distintos los costes kilométricos de las distintas líneas, el criterio para marcar los puntos R sería el mismo empleado en la figura 10.