

CUBIERTAS LAMINARES DE TRASLACION

Por AVELINO SAMARTIN QUIROGA

Dr. Ing. de Caminos del Lab. Central de Materiales
Lic. en Ciencias Matemáticas

JOHN MUNRO

Bsc. PhD. Senior Lecturer en el Imperial College de Londres

Dentro de la teoría de las láminas rebajadas de Vlasov, se presenta una solución analítica compacta, correspondiente a la solución de M. Levy. Algunos resultados en las expresiones de los esfuerzos y desplazamientos, que suponen una cierta simplificación en el estudio del caso general con vigas de borde se exponen, probablemente por primera vez, en la literatura usual sobre el tema. Se resuelve mediante computador electrónico un ejemplo de aplicación.

1. INTRODUCCION.

La teoría de las láminas rebajadas de Vlasov ocupa un lugar muy destacado dentro de la teoría general de láminas, por el amplio campo de aplicación que ofrece.

El término "rebajadas" no exige necesariamente esta cualidad geométrica de la lámina, pues corresponde a un conjunto de adicionales hipótesis de tipo estático y cinemático, pero no geométricas.

El planteamiento del análisis de una estructura en el marco de esta teoría resulta extremadamente sencillo, y permite, por este motivo, el encuentro de soluciones analíticas con relativa facilidad.

Se ha introducido también en este estudio la simplificación de la "placa curvada", simplificación geométrica que exige un cierto rebajamiento o aproximación de la superficie media de la lámina con respecto a una superficie desarrollable.

La solución que se presenta aquí corresponde a una cubierta laminar sobre planta rectangular con dos bordes opuestos apoyados sobre "túmpanos", y los otros dos, con condiciones de borde muy generales, que pueden ser expresadas muchas de ellas en la realidad física de una viga.

2. HIPOTESIS Y ECUACIONES GENERALES.

2.1. Hipótesis y aproximaciones.

2.1.1. Hipótesis.

Las hipótesis que se consideran, son las correspondientes a una teoría elástica y lineal de láminas, que puede ser resumida como sigue:

a) Material elástico y hookiano.

b) Desplazamientos pequeños, es decir:

b-1). En el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio, la geometría de la lámina corresponde al estado anterior a la deformación.

b-2). En el estudio de las ecuaciones de compatibilidad, los productos de los desplazamientos entre sí o por sus derivadas de cualquier orden son despreciables frente a la unidad.

c) Lámina delgada, es decir, su comportamiento puede ser definido por un elemento bidimensional (superficie media) .

d) Hipótesis de Kirchhoff.

Con las hipótesis a) y b) se cumple la analogía estática-cinemática de Goldenweizer. (1).

2.1.2. Aproximaciones.

Se consideran, a continuación, el grupo de aproximaciones a la teoría anterior, denominado de la teoría de láminas rebajadas y placa curvada.

Por lámina rebajada se entiende, aquella en la que los productos de los esfuerzos de flexión por las curvaturas no deformadas, son despreciables en comparación con los esfuerzos directos o de membrana.

Por placa curvada se supone que existe un conjunto de líneas coordenadas ortogonales (α_1, α_2) , tal que la primera forma cuadrática fundamental de la superficie media de la lámina es:

$$ds^2 = A_{11}^2 d\alpha_1^2 + 2 A_{12} d\alpha_1 d\alpha_2 + A_{22}^2 d\alpha_2^2 \equiv d\alpha_1^2 + d\alpha_2^2$$

Para el caso especial de una lámina cuya superficie media posea una curvatura gaussiana nula, tal conjunto de líneas coordenadas existe. Para otros tipos de láminas, esta hipótesis es incorrecta.

La validez de la aproximación de la placa curvada para un conjunto dado de líneas coordenadas, puede ser medida por la pequeñez de ε comparado con la unidad, en donde ε está definido por la expresión:

$$\varepsilon = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} [(1 - A_{11}^2)^2 + (1 - A_{22}^2)^2 + 4 A_{12}^2] d\Omega$$

en donde A_{11}^2 , A_{22}^2 y A_{12} son los coeficientes de la primera forma cuadrática fundamental y Ω es el área total de la superficie media.

Para las láminas de traslación, se hace una simplificación característica: las líneas coordenadas se suponen son líneas de curvatura.

Las aproximaciones expuestas previamente, conducen a las siguientes relaciones:

a). Aproximaciones de lámina rebajada:

$$K_i M_{ij} \ll N_{ij}$$

Consistente con la anterior simplificación estática, existe una aproximación cinemática de la teoría de la lámina rebajada dada por:

$$K_i e_{ij} \ll k_{ij}$$

Este par de aproximaciones asegura la aplicación de la analogía estático-cinemática (1).

Otra formulación para la aproximación cinemática, puede ser considerada la siguiente:

$$h K_i \ll 1$$

b) Aproximaciones de la placa curvada.

Si las ecuaciones de la superficie media de la lámina son:

$$x_1 = x_1(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$x_2 = x_2(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$z = z(\alpha_1, \alpha_2)$$

entonces:

$$A_{11}^0 = x_{1,1} x_{1,1} + x_{2,1} x_{2,1} + z_{,1} z_{,1} \approx 1$$

$$A_{22}^0 = x_{1,2} x_{1,2} + x_{2,2} x_{2,2} + z_{,2} z_{,2} \approx 1$$

$$A_{12} = x_{1,1} x_{1,2} + x_{2,1} x_{2,2} + z_{,1} z_{,2} \approx 0$$

Y los coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental son:

$$L = K_1$$

$$M = 0 \quad (\text{lineas de curvatura})$$

$$N = K_2$$

En orden de aplicar un proceso de cálculo tipo Levy, se suponen K_1 y K_2 constantes.

2.2. Ecuaciones de equilibrio.

Con las anteriores hipótesis, las ecuaciones de equilibrio de un elemento diferencial de lámina se convierten en:

$$N_{11,1} + N_{21,2} + X_1 = 0 \quad (2.2-1)$$

$$N_{12,1} + N_{22,2} + X_2 = 0 \quad (2.2-2)$$

$$M_{11,1} + M_{21,2} - Q_1 = 0 \quad (2.2-3)$$

$$M_{12,1} + M_{22,2} - Q_2 = 0 \quad (2.2-4)$$

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + N_{11} K_1 + N_{22} K_2 + Z = 0 \quad (2.2-5)$$

El convenio de signos puede verse en la figura 1.

2.3. Relaciones fundamentales.

Con el fin de deducir las ecuaciones generales, se consideran las siguientes relaciones:

Deformaciones/Desplazamientos:

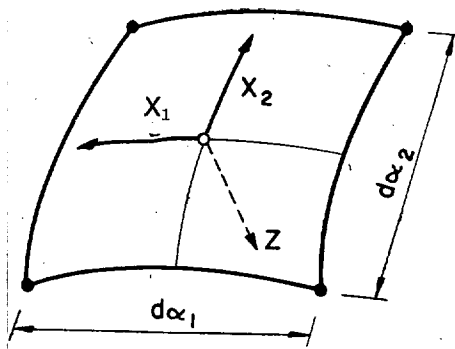
$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - 2 K_{ij} w)$$

$$k_{ij} = -w_{,ij}$$

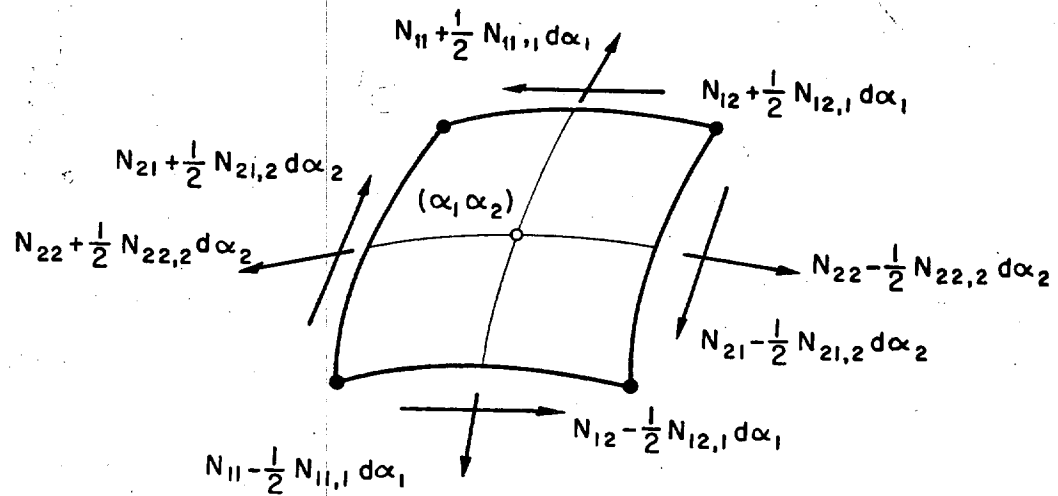
Siendo:

$$(i,j = 1, 2)$$

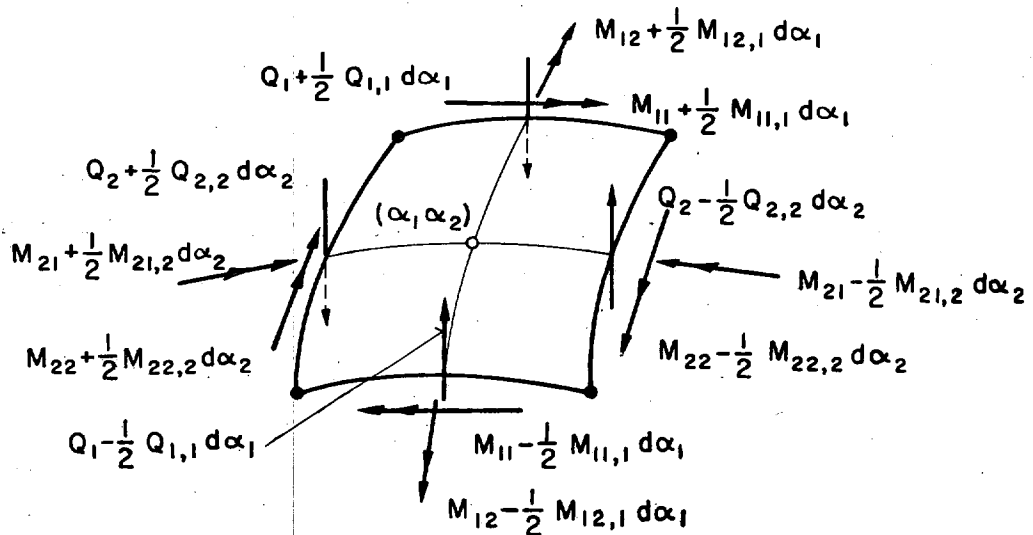
$$K_{ij} = K_i \quad \text{y} \quad K_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{pues las líneas} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{son de curvatura}$$



a - Acciones



b - Esfuerzos membrana



c - Esfuerzos de flexión

Figura 1.

Esfuerzos/Deformaciones:

$$N_{ij} = K [(1 - \nu) e_{ij} + \nu \delta_{ij} e_{rr}]$$

$$M_{ij} = D [(1 - \nu) k_{ij} + \nu \delta_{ij} k_{rr}]$$

$$K = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \quad \gg \quad D = \frac{Eh^3}{1 - \nu^2} \quad \text{y} \quad \delta_{ij} \text{ es la delta de Kronecker}$$

Se ha utilizado el convenio de sumación de Einstein ($r = 1, 2$).

Función de tensión. Definición.

Se define:

$$N_{ij} = (-1)^{i+j} \Phi_{,ij} - \delta_{ij} \int X_i d\alpha_i$$

Con la introducción de la función ϕ , las ecuaciones de equilibrio (2.2-1) y (2.2-2) se satisfacen idénticamente.

Esfuerzos/Desplazamientos:

$$M_{11} = -D (w_{,11} + \nu w_{,22})$$

$$M_{22} = -D (w_{,22} + \nu w_{,11})$$

$$M_{12} = -D (1 - \nu) w_{,12} = M_{21}$$

$$Q_1 = -D \nabla^2 w_{,1}$$

$$Q_2 = -D \nabla^2 w_{,2}$$

$$R_1 = Q_1 + M_{12,2} = -D [w_{,111} + (2 - \nu) w_{,122}]$$

$$R_2 = Q_2 + M_{21,1} = -D [w_{,222} + (2 - \nu) w_{,112}]$$

Las expresiones de Q_1 y Q_2 han sido deducidas de las ecuaciones de equilibrio (2.2-3) y (2.2-4).

2.4. Ecuaciones generales.

Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad, se deducen las ecuaciones generales. Las ecuaciones de compatibilidad se obtienen inmediatamente de las de equilibrio, utilizando la analogía estática-cinemática ya mencionada.

Las ecuaciones generales son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi + \nabla^2_K w &= \frac{1}{Eh} \left[\int X_{2,11} d\alpha_2 + \int X_{1,22} d\alpha_1 + \nu (X_{2,2} + X_{1,1}) \right] \\ D \nabla^4 w - \nabla^2_K \Phi &= -K_1 \int X_1 d\alpha_1 - K_2 \int X_2 d\alpha_2 + Z \end{aligned} \quad (2.4-1)$$

en donde ∇^2 es el operador de Laplace: $\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$ y $\nabla^2_K \equiv K_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + K_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$

3. DESCRIPCION DEL PROCESO TIPO LEVY.

3.1. Definición.

Se supone que el contorno de la lámina es rectangular de lados l_1 y l_2 .

La solución tipo Levy corresponde a las siguientes condiciones de borde a lo largo de $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_1 = l_1$.

$$N_{11} = 0 \quad \nu_2 = 0 \quad w = 0 \quad \text{y} \quad M_{11} = 0$$

que se suelen denominar tipo "tímpano".

La solución toma entonces la forma:

$$w(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m=1}^{\infty} w^{(m)}$$

$$\text{con } w^{(m)} = [w_p^{(m)}(\alpha_2) + w_c^{(m)}(\alpha_2)] \text{ sen } \lambda_m \alpha_1$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{l_1}$$

$w_p^{(m)}(\alpha_2)$ sen $\lambda_m \alpha_1$ se suele denominar solución particular, y $w_c^{(m)}(\alpha_2)$ sen $\lambda_m \alpha_1$, solución complementaria.

3.2. Solución particular.

Desarrollando en serie de Fourier las cargas exteriores se obtiene:

$$X_1 = \sum_{m=1}^{\infty} C_{1m} \cos \lambda_m \alpha_1$$

$$X_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} \text{ sen } \lambda_m \alpha_1$$

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} C_{3m} \text{ sen } \lambda_m \alpha_1$$

En general, C_{1m} , C_{2m} y C_{3m} son funciones de α_2 .

Si se considera, primeramente, el caso frecuente de que las cargas exteriores sean independientes de α_2 , entonces C_{1m} , C_{2m} y C_{3m} son constantes.

La solución particular puede ponerse en la forma:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(\alpha_2) \text{ sen } \lambda_m \alpha_1$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(\alpha_2) \text{ sen } \lambda_m \alpha_1$$

(3.2-1)

en donde $\Phi_m(\alpha_2)$ y $w_m(\alpha_2)$ son funciones de α_2 , tales que su derivada segunda es cero, es decir, $\Phi_{m,22} = w_{m,22} = 0$.

Introduciendo (3.2-1) en (2.4-1):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_m^4}{Eh} \Phi_m - K_2 \lambda_m^2 w_m &= \frac{1}{Eh} [-C_2 \lambda_m^2 \alpha_2 - \nu C_1 \lambda_m] \\ K_2 \lambda_m^2 \Phi_m + D \lambda_m^4 w_m &= -\frac{K_1}{\lambda_m} C_{1m} - K_2 C_{2m} \alpha_2 + C_{3m} \\ \Phi_m &= \frac{-\left[\frac{D}{Eh} \nu \lambda_m^3 + \frac{K_2 K_1}{\lambda_m}\right] C_{1m} - \left[\frac{D}{Eh} \lambda_m^4 + K_2^2\right] \alpha_2 C_{2m} + K_2 C_{3m}}{\frac{D}{Eh} \lambda_m^6 + K_2^2 \lambda_m^2} \\ w_m &= \frac{1}{Eh} \frac{(-K_1 + \nu K_2) \lambda_m C_{1m} + \lambda_m^2 C_{3m}}{\frac{D}{Eh} \lambda_m^6 + K_2^2 \lambda_m^2} \end{aligned}$$

Por facilidad de escritura se puede suprimir el índice m en todas las fórmulas que siguen sin riesgo de confusión. Entonces:

$$\begin{aligned} \Phi &= H_1 + H_2 \alpha_2 \\ w &= H_3 \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{-1}{\frac{D}{Eh} \lambda^6 + K_2^2 \lambda^2} \left[\left(\frac{D}{Eh} \nu \lambda^3 + \frac{K_2 K_1}{\lambda} \right) C_1 - K_2 C_3 \right] \\ H_2 &= \frac{-1}{\frac{D}{Eh} \lambda^6 + K_2^2 \lambda^2} \left[\frac{D}{Eh} \lambda^4 + K_2^2 \right] C_2 \\ H_3 &= \frac{1}{Eh \left(\frac{D}{Eh} \lambda^6 + K_2^2 \lambda^2 \right)} [(-K_1 + \nu K_2) \lambda C_1 + \lambda^2 C_3] \end{aligned}$$

Sea por definición el vector columna resultante R (15×1).

R = matriz columna (u_1 ; u_2 ; w ; $w_{,1}$; $-w_{,2}$; N_{11} ; N_{22} ; N_{12} ; M_{11} ; M_{22} ; M_{12} ; Q_1 ; Q_2 ; R_1 ; R_2), en donde cada elemento es función de α_2 y varía a lo largo de α_1 como $\sin \lambda \alpha_1$, excepto u_1 ; $w_{,1}$; N_{12} ; M_{12} ; Q_1 y R_1 , que varían como $\cos \lambda \alpha_1$.

Para la solución particular, R se designa por R_p y toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} R_p(1) &= \frac{H_3 K_1}{\lambda} - \frac{C_1}{\lambda^2} + \nu H_1 \lambda + \nu \left(H_2 \lambda + \frac{C_2}{\lambda} \right) \alpha_2 \\ R_p(2) &= \left(-H_1 \lambda^3 + \nu \frac{C_1}{\lambda} + H_3 K_2 \right) \alpha_2 - \frac{1}{2} (H_2 \lambda^2 + C_2) \alpha_2^2 \\ R_p(3) &= H_3 \\ R_p(4) &= \lambda H_3 \\ R_p(5) &= 0 \end{aligned}$$

$$R_p (6) = -\frac{C_1}{\lambda}$$

$$R_p (7) = -\lambda^2 H_1 - (H_2 \lambda^2 + C_2) \alpha_3$$

$$R_p (8) = -\lambda H_2$$

$$R_p (9) = D \lambda^2$$

$$R_p (10) = D \lambda^2$$

$$R_p (11) = 0$$

$$R_p (12) = D \lambda^3$$

$$R_p (13) = 0$$

$$R_p (14) = D \lambda^3$$

$$R_p (15) = 0$$

El vector desplazamiento se define por:

$$\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ w \\ -w_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p (1) \\ R_p (2) \\ R_p (3) \\ R_p (5) \end{bmatrix}$$

y el vector de esfuerzos:

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} N_{21} \\ N_{22} \\ R_2 \\ M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p (8) \\ R_p (7) \\ R_p (15) \\ R_p (10) \end{bmatrix}$$

En el caso general de que X_1 , X_2 y Z dependan de α_1 y α_2 , se puede utilizar como solución particular una tipo Navier es decir, se desarrollan las cargas exteriores en doble serie trigonométrica, de la forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{1mn} \cos \lambda_m \alpha_1 \sin \mu_n \alpha_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_{1m}(\alpha_2) \cos \lambda_m \alpha_1 \\ X_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2mn} \sin \lambda_m \alpha_1 \cos \mu_n \alpha_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m}(\alpha_2) \sin \lambda_m \alpha_1 \\ Z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{3mn} \sin \lambda_m \alpha_1 \sin \mu_n \alpha_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_{3m}(\alpha_2) \sin \lambda_m \alpha_1 \end{aligned}$$

siendo:

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{l_1} \quad \text{y} \quad \mu_n = \frac{n\pi}{l_2}$$

Y se supone que la solución es del tipo:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \sin \lambda_m \alpha_1 \sin \mu_n \alpha_2$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m \alpha_1 \sin \mu_n \alpha_2$$

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones generales, se deduce para el término m -ésimo:

$$\Phi_{mn} = \frac{A_{mn} D (\lambda_m^2 + \mu_n^2) + B_{mn} (K_2 \lambda_m^2 + K_1 \mu_n^2)}{\frac{D}{Eh} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 + (K_2 \lambda_m^2 + K_1 \mu_n^2)^2}$$

$$w_{mn} = - \frac{A_{mn} (K_2 \lambda_m^2 + K_1 \mu_n^2) + B_{mn} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 \frac{1}{Eh}}{\frac{D}{Eh} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 + (K_2 \lambda_m^2 + K_1 \mu_n^2)^2}$$

Siendo:

$$A_{mn} = - \frac{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)}{Eh} \left[\frac{C_{1mn}}{\lambda_m} + \frac{C_{2mn}}{\mu_n} \right]$$

$$B_{mn} = - \frac{K_1}{\lambda_m} C_{1mn} - \frac{K_2}{\mu_n} C_{2mn} + C_{3mn}$$

Se consideran las dos funciones:

$$\Phi_m(\alpha_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \sin \mu_n \alpha_2$$

$$w_m(\alpha_2) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \mu_n \alpha_2$$

Y el vector resultante R_p toma en este caso general la siguiente forma (el índice m es suprimido):

$$R_p(1) = - \frac{K_1}{\lambda} w(\alpha_2) + \frac{l}{Eh} \left[\lambda \Phi(\alpha_2) + \frac{l}{\lambda^2} C_1(\alpha_2) + \frac{\nu}{\lambda} \left(\Phi_{,22}(\alpha_2) - \int C_2(\alpha_2) d\alpha_2 \right) \right]$$

$$R_p(2) = K_2 \int w(\alpha_2) d\alpha_2 + \frac{l}{Eh} \left[\Phi_{,2}(\alpha_2) - \int \int C_2(\alpha_2) d\alpha_2 + \nu \lambda^2 \int \Phi(\alpha_2) d\alpha_2 + \frac{\nu}{\lambda} \int C_1(\alpha_2) d\alpha_2 \right]$$

$$R_p(3) = w(\alpha_2)$$

$$R_p(4) = \lambda w(\alpha_2)$$

$$R_p(5) = - w_{,2}(\alpha_2)$$

$$R_p(6) = - \lambda^2 \Phi(\alpha_2) - \frac{1}{\lambda} C_1(\alpha_2)$$

$$R_p(7) = \Phi_{,22}(\alpha_2) - \int C_2(\alpha_2) d\alpha_2$$

$$R_p(8) = -\lambda \Phi_{,2}(\alpha_2)$$

$$R_p(9) = D[\lambda^2 w(\alpha_2) - \nu w_{,22}(\alpha_2)]$$

$$R_p(10) = D[\nu \lambda^2 w(\alpha_2) - w_{,22}(\alpha_2)]$$

$$R_p(11) = -D(1-\nu)\lambda w_{,2}(\alpha_2)$$

$$R_p(12) = D[\lambda^3 w(\alpha_2) - \lambda w_{,22}(\alpha_2)]$$

$$R_p(13) = D[\lambda^3 w_{,2}(\alpha_2) - w_{,222}(\alpha_2)]$$

$$R_p(14) = D[\lambda^3 w(\alpha_2) - (2-\nu)\lambda w_{,22}(\alpha_2)]$$

$$R_p(15) = D[(2-\nu)\lambda^2 w_{,2}(\alpha_2) - w_{,222}(\alpha_2)]$$

Y de análoga manera al caso anterior, se definen d_p y x_p .

3.3. Solución complementaria.

La solución complementaria es la solución general de la ecuación homogénea (2.4-1), es decir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi + \nabla^2_K w &= 0 \\ D \nabla^4 w - \nabla^2_K \Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3-1)$$

Se introduce la función de Ambartsumyan W definida por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} w &= \nabla^4 W \\ \Phi &= -Eh \nabla^2_K W \end{aligned}$$

La primera ecuación de (3.3-1) se satisface idénticamente, y la segunda, se convierte en:

$$\nabla^4 W + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \nabla^2_K W = 0 \quad (3.3-2)$$

Desarrollando W en serie de Fourier, el término m -simo es $W = F(\alpha_2) \sin \lambda \alpha_1$, y sustituyendo en (3.3-2) se obtiene:

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha_2^2} - \lambda^2 \right]^4 F(\alpha_2) + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \left[K_1 \frac{d^2}{d\alpha_2^2} - K_2 \lambda^2 \right]^2 F(\alpha_2) = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria de coeficientes constantes cuya ecuación característica es:

$$(y^2 - \lambda^2)^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} [K_1 y^2 - K_2 \lambda^2]^2 = 0$$

Si se realiza la sustitución $y^2 - \lambda^2 = t$, se obtiene:

$$t^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} [K_1 t + (K_1 - K_2) \lambda^2]^2 = 0$$

o bien:

$$t^2 \pm 2i\mu [K, t + (K_1 - K_2) \lambda^2] = 0$$

con:

$$\mu = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{h} \quad y \quad i = \sqrt{-1}$$

es decir, dos ecuaciones de segundo grado cuyas raíces dan las ocho de la ecuación característica:

$$\begin{aligned} y_1 &= r_1 + i s_1 & y_5 &= r_2 + i s_2 \\ y_2 &= r_1 - i s_1 & y_6 &= r_2 - i s_2 \\ y_3 &= -r_1 + i s_1 & y_7 &= -r_2 + i s_2 \\ y_4 &= -r_1 - i s_1 & y_8 &= -r_2 - i s_2 \end{aligned}$$

en donde:

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{\frac{\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}{2}} \\ s_i &= \sqrt{\frac{-\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}{2}} \\ (i &= 1, 2). \end{aligned}$$

Si $K_1 < K_2$:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \lambda^2 - (-1)^i \mu \sqrt{-(K_1^2 + \Delta)/2} \\ \beta_i &= \mu [\sqrt{(K_1^2 + \Delta)/2} + (-1)^i \mu] \end{aligned}$$

Si $K_1 > K_2$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \lambda^2 - (-1)^i \mu \sqrt{-(K_1^2 + \Delta)/2} \\ \beta_i &= \mu [\sqrt{(K_1^2 + \Delta)/2} - (-1)^i \mu] \end{aligned}$$

Si $K_1 = K_2 = K_e$ (esfera), se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda^2 \\ \beta_1 &= 2\mu K_e \\ \alpha_2 &= \lambda^2 \\ \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Siendo en todos los casos:

$$\Delta = \sqrt{K_1^2 + 4(K_1 - K_2)^2 \lambda^4 / \mu^2}$$

Y la solución general es:

a) Si $K_1 \neq K_2$:

$$\begin{aligned} F(\alpha_2) &= e^{-r_1 \alpha_2} [A_1 \cos s_1 \alpha_2 + A_2 \sin s_1 \alpha_2] + e^{-r_2 \alpha_2} [A_3 \cos s_2 \alpha_2 + A_4 \sin s_2 \alpha_2] \\ &+ e^{-r_1 \beta_2} [A_5 \cos s_1 \beta_2 + A_6 \sin s_1 \beta_2] + e^{-r_2 \beta_2} [A_7 \cos s_2 \beta_2 + A_8 \sin s_2 \beta_2] \end{aligned} \quad (3.3-3)$$

en donde:

$$\beta_2 = I_2 - \alpha_2$$

b) Si $K_1 = K_2 = K_e$:

En este caso $r_2 = \lambda$ y $s_2 = 0$:

$$F(\alpha_2) = e^{-r_1 \alpha_2} [A_1 \cos s_1 \alpha_2 + A_2 \sin s_1 \alpha_2] + e^{-r_2 \alpha_2} [A_3 + A_4 \alpha_2] \\ + e^{-r_1 \beta_2} [A_5 \cos s_1 \beta_2 + A_6 \sin s_1 \beta_2] + e^{-r_2 \beta_2} [A_7 + A_8 \beta_2] \quad (3.3-4)$$

La ecuación (3.3-3) puede ponerse en la forma:

$$F(\alpha_2) = B^{(0)}_1 p_1(\alpha_2) A_{12} + B^{(0)}_2 p_2(\alpha_2) A_{34} + B^{(0)}_1 p_1(\beta_2) A_{56} + B^{(0)}_2 p_2(\beta_2) A_{78}$$

siendo:

$$B^{(0)}_i = (1, 0) \quad (1 \times 2)$$

$$p_i(\alpha_2) = \begin{bmatrix} e^{-r_i \alpha_2 \cos s_i \alpha_2} & e^{-r_i \alpha_2 \sin s_i \alpha_2} \\ -e^{-r_i \alpha_2 \sin s_i \alpha_2} & e^{-r_i \alpha_2 \cos s_i \alpha_2} \end{bmatrix} \quad (2 \times 2)$$

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} A_j \\ A_k \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2) \\ (j, k = 1, 2, 3, 4) \end{matrix}$$

Y de manera análoga la ecuación (3.3-4) se convierte:

$$F(\alpha_2) = B^{(0)}_1 p_1(\alpha_2) A_{12} + B^{(0)}_2 p'_2(\alpha_2) A_{34} + B^{(0)}_1 p_1(\beta_2) A_{56} + B^{(0)}_2 p'_2(\beta_2) A_{78}$$

con:

$$B^{(0)}_2 = [1, 0] \quad (1 \times 2)$$

$$p'_2(\alpha_2) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda \alpha_2} & \alpha_2 e^{-\lambda \alpha_2} \\ e^{\lambda \alpha_2} & \alpha_2 e^{\lambda \alpha_2} \end{bmatrix} \quad (2 \times 2)$$

Para determinar las sucesivas derivadas de $F(\alpha_2)$, se procede por recurrencia:

a) $K_1 \neq K_2$.

Sea:

$$\frac{d^j}{d\alpha_2^j} F(\alpha_2) = B^{(j)}_1 p_1(\alpha_2) A_{12} + B^{(j)}_2 p_2(\alpha_2) A_{34} + (-1)^j B^{(j)}_1 p_1(\beta_2) A_{56} + (-1)^j B^{(j)}_2 p_2(\beta_2) A_{78} \quad (3.3-5)$$

($j = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Si se deriva esta igualdad, considerando que:

$$\frac{d p_i(\alpha_2)}{d \alpha_2} = f_i p_i(\alpha_2)$$

con:

$$f_i = \begin{bmatrix} -r_i & s_i \\ -s_i & -r_i \end{bmatrix} \quad (2 \times 2) \quad (i = 1, 2)$$

se deduce:

$$\frac{d^{i+1} F(\alpha_2)}{d \alpha_2^{i+1}} = B^{(i)}_1 t_1 p_1(\alpha) A_{12} + B^{(i)}_2 t_2 p_2(\alpha_2) A_{34} + (-1)^{i+1} B^{(i)} t_1 p_1(\beta_2) A_{56} \\ + (-1)^{i+1} B^{(i)}_2 t_2 p_2(\beta_2) A_{78}$$

luego:

$$B^{(i+1)}_i = B^{(i)}_i t_i$$

Ecuación de recurrencia, cuya solución es:

$$B^{(i)}_i = B^{(0)}_i t_i^{(i)} = \left[(-1)^i (r^2_i + s^2_i)^{i/2} \cos \left(i \operatorname{arctg} \frac{s_i}{r_i} \right), (-1)^i (r^2_i + s^2_i)^{i/2} \sin \left(i \operatorname{arctg} \frac{s_i}{r_i} \right) \right]$$

La ecuación (3.3-5) puede ponerse en la forma más compacta:

$$\frac{d^i F(\alpha_2)}{d \alpha_2^i} = B^{(i)} P(\alpha_2) A_{1234} + (-1)^i B^{(i)} P(\beta_2) A_{5678}$$

siendo:

$$B^{(i)} = [B^{(i)}_1 ; B^{(i)}_2] \quad (1 \times 4)$$

$$P(\alpha_2) = \begin{bmatrix} p_1(\alpha_2) & 0 \\ 0 & p_2(\alpha_2) \end{bmatrix} \quad (4 \times 4)$$

$$A_{1234} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{34} \end{bmatrix} \quad (4 \times 1)$$

$$A_{5678} = \begin{bmatrix} A_{56} \\ A_{78} \end{bmatrix} \quad (4 \times 1)$$

b) $K_1 = K_2 = K_c$.

Procediendo de manera análoga al caso anterior, se llega a:

$$\frac{d^i F(\alpha_2)}{d \alpha_2^i} = B^{(i)} P(\alpha) A_{1234} + (-1)^i B^{(i)} P(\beta_2) A_{5678}$$

siendo:

$$B^{(i)} = [B^{(i)}_1 , B^{(i)}_2] \quad (1 \times 4)$$

$$P(\alpha_2) = \begin{bmatrix} p_1(\alpha_2) & 0 \\ 0 & p'_2(\alpha_2) \end{bmatrix} \quad (4 \times 4)$$

$$B^{(i)}_2 = [(-1)^i \lambda^i , (-1)^{i-1} \lambda^{i-1}] \quad (1 \times 2)$$

Las demás magnitudes tienen igual significado que en el caso a).

Tabla 1.— (Matriz G.)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-(K_1 + \nu K_2) \lambda^3$	$\cdot$	$-\frac{K_2 \lambda}{(2 + \nu) K_1 \lambda}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
2	$\cdot$	$\frac{K_1 \lambda^2}{(2 + \nu) K_2 \lambda^2}$	$\cdot$	$K_2 + \nu K_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
3	λ^4	$\cdot$	$-2\lambda^2$	$\cdot$	1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
4	λ^5	$\cdot$	$-2\lambda^3$	$\cdot$	λ	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
5	$\cdot$	λ^4	$\cdot$	$-2\lambda^2$	$\cdot$	1	$\cdot$	$\cdot$
6	$\cdot$	$\cdot$	$K^2 \lambda^2 E h$	$\cdot$	$-K_1 E h$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
7	$-K_2 \lambda^4 E h$	$\cdot$	$K_1 \lambda^2 E h$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
8	$\cdot$	$-K_2 \lambda^3 E h$	$\cdot$	$K_1 \lambda E h$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
9	$\lambda^0 D$	$\cdot$	$-(2 + \nu) \lambda^4 D$	$\cdot$	$(1 + 2\nu) \lambda^2 D$	$\cdot$	$-\nu D$	$\cdot$
10	$\nu \lambda^0 D$	$\cdot$	$-(1 + 2\nu) \lambda^4 D$	$\cdot$	$(2 + \nu) \lambda^2 D$	$\cdot$	$-D$	$\cdot$
11	$\cdot$	$-(1 - \nu) \lambda^0 D$	$\cdot$	$2(1 - \nu) \lambda^3 D$	$\cdot$	$-(1 - \nu) \lambda D$	$\cdot$	$\cdot$
12	$\lambda^2 D$	$\cdot$	$-3\lambda^5 D$	$\cdot$	$3\lambda^3 D$	$\cdot$	$-\lambda D$	$\cdot$
13	$\cdot$	$\lambda^0 D$	$\cdot$	$-3\lambda^4 D$	$\cdot$	$3\lambda^2 D$	$\cdot$	$-D$
14	$\lambda^2 D$	$\cdot$	$-(4 - \nu) \lambda^5 D$	$\cdot$	$(5 - 2\nu) \lambda^3 D$	$\cdot$	$-(2 - \nu) \lambda D$	$\cdot$
15	$\cdot$	$(2 - \nu) \lambda^0 D$	$\cdot$	$-(5 - 2\nu) \lambda^4 D$	$\cdot$	$(4 - \nu) \lambda^2 D$	$\cdot$	$-D$

La expresión de la matriz resultante R , que se denomina R_c por corresponder a la solución complementaria, es para los dos casos considerados:

$$R_c = G \{ B P(\alpha_2) A_{1234} + J_8 B P(\beta_2) A_{5678} \}$$

donde G se muestra en la tabla 1, y su dimensión es (15×8) .

$B = [B^{(j)}]$ ($j = 0, 1, 2, \dots, 7$), dimensión (8×4) , es decir, la $(j+1)$ — fila está formada por la matriz $B^{(j)}$ definida anteriormente.

J_8 = matriz diagonal $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$.

El producto $J_8 B$ se designará en lo sucesivo por C .

El vector desplazamiento es:

$$d_c = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \\ -w_{12} \end{bmatrix}_c = \begin{bmatrix} R_c(1) \\ R_c(2) \\ R_c(3) \\ R_c(5) \end{bmatrix} = G_d [B P(\alpha_2) A_{1234} + C P(\beta_2) A_{5678}]$$

El vector de esfuerzos es:

$$x_c = \begin{bmatrix} N_{21} \\ N_{22} \\ R_2 \\ M_{22} \end{bmatrix}_c = \begin{bmatrix} R_c(8) \\ R_c(7) \\ R_c(15) \\ R_c(10) \end{bmatrix} = G_x [B P(\alpha_2) A_{1234} + C P(\beta_2) A_{5678}]$$

siendo G_d y G_x las correspondientes submatrices de la matriz G .

3.4. Método de los desplazamientos. Solución inicial.

La solución inicial corresponde a condiciones homogéneas cinemáticas de contorno nulas, es decir:

$$d_0 = 0 \text{ a lo largo de } \alpha_2 = 0 \text{ y } \alpha_2 = l_2.$$

Si se indica con un subíndice 0 la solución inicial, se cumple:

$$R_0 = R_p + R_c.$$

con las condiciones:

$$d_0(0) = 0 = d_0(l_2)$$

o en forma más explícita estas condiciones pueden expresarse:

$$\begin{bmatrix} d_p(l_2) \\ d_p(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_d B P(l_2) & G_d C P(0) \\ G_d B P(0) & G_d C P(l_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1234} \\ A_{5678} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y como $P(0) = I$ (matriz unidad):

$$\begin{bmatrix} A_{1234} \\ A_{5678} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_d B P(l_2) & G_d C \\ G_d B & G_d C P(l_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_p(l_2) \\ d_p(0) \end{bmatrix} \quad (3.4-1)$$

Y de aquí la solución R_0 está determinada a partir de (3.4-1), puesto que:

$$R_0 = R_p + [G B P (\alpha_2) \quad G C P (\beta_2)] \begin{bmatrix} A_{1234} \\ A_{5678} \end{bmatrix}$$

y en particular se conocen los vectores esfuerzos $x_0(0)$ y $x_0(l_2)$ a lo largo de los bordes $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_2 = l_2$ de la lámina.

Para aplicar la técnica *standard* del método de los desplazamientos, es necesario conocer las matrices de rigidez de la lámina y de las vigas de borde.

3.5. Matriz de rigidez de la lámina en ejes locales.

Si se designa por comodidad de escritura:

$$d_1 = d_c(l_2) \quad x_1 = x_c(l_2)$$

$$d_0 = d_c(0) \quad x_0 = x_c(0)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1234} \\ A_{5678} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_d B \cdot P(l_2) & G_d C \\ G_d B & G_d C P(l_2) \end{bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x B P(l_2) & G_x C \\ G_x B & G_x C P(l_2) \end{bmatrix} A$$

Eliminando A entre las anteriores ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x B P(l_2) & G_x C \\ G_x B & G_x C P(l_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_d B P(l_2) & G_d C \\ G_d B & G_d C P(l_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{10} \\ k_{01} & k_{00} \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} \quad (3.5-1)$$

en donde k_s es la matriz de rigidez de la lámina en ejes locales.

3.6. Transformación de rotación.

Sea G el centroide de la viga de borde (ver fig. 2). Los ejes 2 y 3 son los principales de inercia de la sección normal de la viga.

φ es el ángulo entre el eje 2 y α_2 . Origen en el eje 2 y sentido positivo levógiro.

F_{r1} , F_{r2} , F_{r3} y M_{r1} son las fuerzas y momento actuando en D (punto de intersección del eje de la lámina con la viga) producidas por los esfuerzos x , y son acciones externas actuando sobre la viga a lo largo de su directriz.

Si:

$$\mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} F_1^r \\ F_2^r \\ F_3^r \\ M_1^r \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^r = \begin{bmatrix} U_1^r \\ U_2^r \\ U_3^r \\ \psi_1^r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \varphi & -\sin \varphi & \cdot \\ \cdot & \sin \varphi & \cos \varphi & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

se cumplen las siguientes relaciones estáticas en los bordes $\alpha_2 = l_2$ y $\alpha_2 = 0$, respectivamente:

$$\mathbf{F}_1^r = -\mathbf{O}_1 \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{F}_0^r = \mathbf{O}_0 \mathbf{x}_0$$

Y las análogas relaciones cinemáticas:

$$\mathbf{d}_1^r = \mathbf{O}_1^{-1} \mathbf{D}_1$$

$$\mathbf{d}_0^r = \mathbf{O}_0^{-1} \mathbf{D}_0$$

pues $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^t$ (matriz ortogonal).

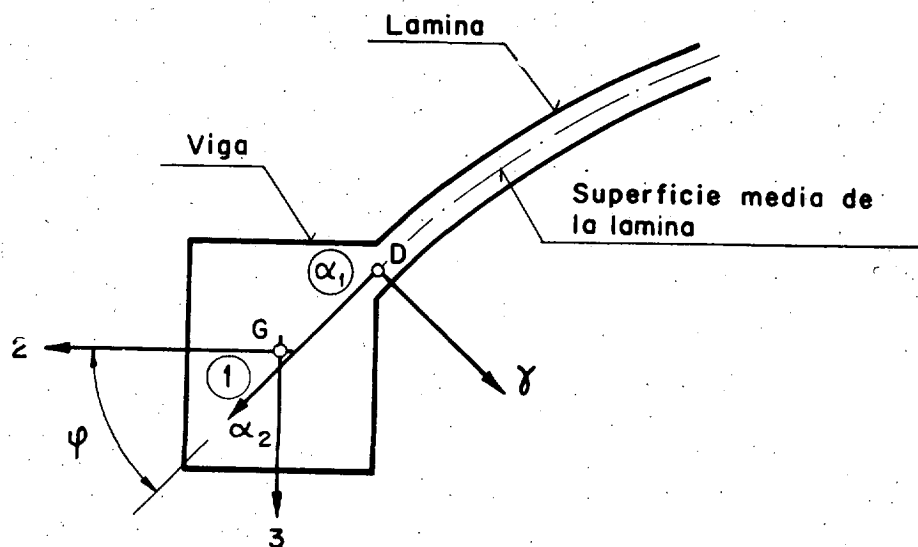


Figura 2.

3.7. Transformación de traslación.

Sean a y b las coordenadas de D respecto a los ejes principales de inercia (2 y 3) situados en el centroide de la viga.

Las ecuaciones de equilibrio de la viga son:

$$X_1 = F'_1$$

$$X_2 = F'_2$$

$$X_3 = F'_3$$

$$G_1 = F'_3 b - F'_1 a$$

$$G_2 = -F'_1 b$$

$$G_3 = F'_1 a$$

Introduciendo la notación:

$$F_1 = X_1 - \frac{G_3}{r_2} + \frac{G_2}{r_3} \approx X_1$$

$$F_2 = X_2 + G_{3,1}$$

$$F_3 = X_3 - G_{2,1}$$

$$M_1 = G_1$$

La aproximación en la ecuación de F_1 es consistente con la teoría de las láminas rebajadas, puesto que:

$$X_1 \gg \frac{G_3}{r_2} \quad \text{y} \quad X_1 \gg \frac{G_2}{r_3}$$

siendo r_2 y r_3 los radios de curvatura de las proyecciones de la directriz de la viga sobre los planos principales G 12 y G 13, respectivamente, es decir:

$$r_2 = -R_1 \sin \varphi = -\frac{1}{K_1} \sin \varphi$$

$$r_3 = R_1 \cos \varphi = \frac{1}{K_1} \cos \varphi$$

Entonces, se deduce:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a\lambda & 1 & \cdot & \cdot \\ -b\lambda & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & b & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ M'_1 \end{bmatrix}$$

o más compactamente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \mathbf{F}'$$

o bien:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}$$

con:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a\lambda & 1 & \cdot & \cdot \\ b\lambda & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -b & a & 1 \end{bmatrix}$$

Y las análogas relaciones cinemáticas son:

$$\begin{aligned} \underline{D} &= (\bar{T}^{-1})^t \underline{D} \\ \underline{D}' &= T^t \underline{D} \end{aligned}$$

Siendo el vector desplazamiento en el punto G:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \Theta \end{bmatrix}$$

Las relaciones anteriores referidas a lo largo de los bordes $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_2 = l_2$ toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} F_1 &= T_1 F'_1 \\ D'_1 &= T_1^t D_1 \\ F_0 &= T_0 F'_0 \\ D'_0 &= T_0^t D_0 \end{aligned}$$

3.8. Matriz de rigidez de la lámina. Ejes viga.

Las dos vigas de borde a lo largo de $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_2 = l_2$ se numeran por 0 y 1, respectivamente. Según los apartados 3.6 y 3.7 se obtiene:

$$\begin{aligned} x_0 &= O^{-1}_0 T^{-1}_0 F_0 = (T_0 O_0)^{-1} F_0 \\ x_1 &= -O^{-1}_1 T^{-1}_1 F_1 = -(T_1 O_1)^{-1} F_1 \\ d_0 &= O^{-1}_0 T^t_0 D_0 = (T_0 O_0)^t D_0 \\ d_1 &= O^{-1}_1 T^t_1 D_1 = (T_1 O_1)^t D_1 \end{aligned}$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (3.5-1), se llega:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_1 O_1 & . \\ . & T_0 O_0 \end{bmatrix} k_s \begin{bmatrix} (T_1 O_1)^t & . \\ . & (T_0 O_0)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_0 \end{bmatrix}$$

es decir, la matriz de rigidez de la lámina en ejes viga es:

$$K'_s = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{10} \\ K'_{01} & K'_{00} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} -(T_1 O_1) k_{11} (T_1 O_1)^t & -(T_1 O_1) k_{10} (T_0 O_0)^t \\ (T_0 O_0) k_{01} (T_1 O_1)^t & (T_0 O_0) k_{00} (T_0 O_0)^t \end{bmatrix}_s$$

o sea:

$$K'_{ij} = (-1)^i (T_j O_j) k_{ij} (T_j O_j)^t$$

3.9. Matriz de rigidez de la viga. Ejes locales.

El problema general es complejo y se suele introducir en su resolución algunas simplificaciones (ver, por ejemplo, la referencia 4).

Para la mayoría de las aplicaciones prácticas son válidos los resultados siguientes:

Matriz de rigidez de la viga, K_v :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{v1} & \cdot \\ \cdot & K_{v0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_0 \end{bmatrix} = K_v \begin{bmatrix} D_1 \\ D_0 \end{bmatrix}$$

en donde:

$$K_{v1} = \{a_{lm}\}_1 \quad y \quad K_{v0} = \{a_{lm}\}_0$$

y:

$$a_{11} = E \lambda^2 A$$

$$a_{12} = \frac{E \lambda}{r_2} A = a_{21}$$

$$a_{13} = \frac{E \lambda A}{r_3} = a_{31}$$

$$a_{14} = 0 = a_{41}$$

$$a_{22} = E \left[\lambda^4 I_3 \eta_2^2 + \frac{I_2}{r_2^2 r_3^2} + \frac{A}{r_2^2} + \frac{\lambda^2 I_t}{2 r_3^2 (1 + \nu)} \right]$$

$$a_{23} = E \left[\frac{-\lambda^2}{r_2 r_3} (I_2 \eta_3 + I_3 \eta_2) + \frac{A}{r_2 r_3} - \frac{\lambda^2 I_t}{2 r_2 r_3 (1 + \nu)} \right] = a_{32}$$

$$a_{24} = E \left[\frac{\lambda^2 I_3 \eta_2}{r_3} + \frac{I_2}{r_2^2 r_3} + \frac{\lambda^2 I_t}{2 r_3 (1 + \nu)} \right] = a_{42}$$

$$a_{33} = E \left[\lambda^4 I_2 \eta_3^2 + \frac{I_3}{r_2^2 r_3^2} + \frac{A}{r_3^2} + \frac{\lambda^2 I_t}{2 r_2^2 (1 + \nu)} \right]$$

$$a_{34} = E \left[\frac{-\lambda^2 I_2 \eta_3}{r_2} - \frac{I_3}{r_2^2 r_3} - \frac{\lambda^2 I_t}{2 r_2 (1 + \nu)} \right] = a_{43}$$

$$a_{44} = E \left[\frac{I_3}{r_3^2} + \frac{I_2}{r_2^2} + \frac{\lambda^2 I_t}{2 r_2 (1 + \nu)} \right]$$

siendo:

$$\eta_2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2 r_2^2}$$

$$\eta_3 = 1 - \frac{1}{\lambda^2 r_3^2}$$

A es el área de la sección transversal constante de la viga.

I_2 e I_3 son sus momentos principales de inercia.

I_t es el momento torsional de inercia.

Para la formación de la matriz de rigidez de una estructura compuesta de láminas y vigas, se utilizarán las técnicas *standard* de los métodos matriciales. El modelo de formación de la matriz de rigidez depende muy íntimamente de la ordenación topológica existente entre los distintos elementos estructurales.

4. EJEMPLO DE APLICACION. (*).

4.1. Datos

Se estudia una lámina de las siguientes características:

$$l_1 = 50,000 \text{ m.}$$

$$l_2 = 50,000 \text{ m.}$$

$$h = 0,3823 \text{ m.}$$

$$K_1 = -0,0050 \text{ m}^{-1}.$$

$$K_2 = 0,0100 \text{ m}^{-1}.$$

$$E = 1\,000\,000 \text{ t./m.}^2.$$

$$\nu = 0,25.$$

$$X_1 = 0,00$$

$$X_2 = 0,00.$$

$$Z = 78,54 \sin\left(\frac{\pi}{50} \alpha_1\right) \text{ t./m.}^2.$$

Número de armónicos que se consideran en la solución $N = 1$.

Las condiciones de borde homogéneas se definen por un vector $IBC(l)$ de ocho componentes. Las cuatro primeras se refieren al borde $\alpha_2 = 0$ y las restantes a él $\alpha_2 = l_2$.

$IBC(l) = 0$ significa que la condición cinemática $d(l)$ o $d(l-4)$, según el borde, se anula y $IBC(l) = 1$ indica que la condición estática $x(l)$ o $x(l-4)$, según el borde, se anula.

En el ejemplo que se presenta, se han supuesto los bordes $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_2 = l_2$ libres, es decir:

$$IBC = (1,1,1,1,1,1,1,1).$$

La salida de resultados son los valores del vector R , correspondientes a una malla de $N1$ puntos en la dirección α_1 , por $N2$ puntos en la dirección α_2 representada en la salida de resultados por x_1 y x_2 .

En este caso:

$$N1 = 11.$$

$$N2 = 11.$$

4.2. Resultados.

Se ha utilizado un ordenador electrónico IBM-7090, para el que se ha programado en lenguaje FORTRAN IV la resolución del ejemplo anterior, obteniéndose los resultados que se exponen a continuación.

(*) El ejemplo que se presenta ha sido estudiado utilizando un procedimiento indirecto de cálculo, por el Dr. D. Gunarekera en su tesis doctoral (1967) en la Universidad de Londres. Sus resultados no coinciden con los presentados en este artículo.

5. BIBLIOGRAFIA.

1. Goldenweizer, A. L.: "Theory of Elastic Thin Shells". Pergamon Press Oxford, 1961.
2. Vlasov, V. Z.: "General Theory of Shells and its Application in Engineering". N.A.S.A. TTF-99, 1964.
3. Munro, J.: "The Linear Analysis of thin Shallow Shells". *Journal of the Institution of Civil Engineers*. July 1961, Vol. 19.
4. Powell, G. H.: "Interaction of edges beams with doubly curved shells". *A.S.C.E. Structural Division*, June, 1966.

6. NOTACION UTILIZADA.

(x_1, x_2, z)	Ejes ortogonales cartesianos.
(α_1, α_2)	Líneas de coordenadas de la superficie media de la lámina.
γ	Vector unitario normal a la superficie media de la lámina.
K_1, K_2	Curvaturas principales.
h	Espesor de la lámina.
E	Módulo de elasticidad.
ν	Coeficiente de Poisson.
u_1, u_2, w	Desplazamientos de un punto de la superficie media de la lámina.
e_{11}, e_{12}, e_{22}	Deformaciones (grupo membrana).
k_{11}, k_{12}, k_{22}	Deformaciones (grupo flector).
N_{11}, N_{12}, N_{22}	Esfuerzos (grupo membrana).
M_{11}, M_{12}, M_{22}	Esfuerzos (grupo flector).
Q_1, Q_2	Esfuerzos cortantes.
R_1, R_2	Esfuerzos cortantes de Kirchhoff.
$, i$	Indica derivación respecto a α_1 .