

HACIA UNA GENERALIZACION DE LAS LEYES Y METODOS DE LA RELATIVIDAD AL CAMPO ELASTICO

"Todos los cuerpos de referencia, cualquiera que sea su estado de movimiento, son equivalentes para la descripción de la naturaleza."

ALBERTO EINSTEIN

Por MANUEL OSSET MORENO
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Las ecuaciones de la elasticidad plana:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y_1} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{y_1}}{\partial y_1} + Y_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

y las de las isostáticas:

$$\left(\frac{dy_1}{dx_1} \right)^2 + \frac{\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}}{\tau_{xy_1}} \frac{dy_1}{dx_1} - 1 = 0, \quad (2)$$

son invariantes si se someten las tensiones (σ_{x_1} , τ_{xy_1} , σ_{y_1}), las fuerzas másicas (X_1 , Y_1) y las coordenadas (x_1 , y_1) a las siguientes transformaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \mu \gamma (\sigma_x + \sigma_y - 2 \tau_{xy}) \\ \sigma_{y_1} &= \mu \gamma (\sigma_x + \sigma_y + 2 \tau_{xy}) \\ \tau_{x_1 y_1} &= \mu \gamma (\sigma_x - \sigma_y) \end{aligned} \right\} \mu, \gamma = \text{constantes o funciones elásticas del sistema analizado;} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \mu (X - Y) \\ Y_1 &= \mu (X + Y) \end{aligned} \right\} \quad (4) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \gamma (x - y) \\ y_1 &= \gamma (x + y) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En efecto, la comprobación es inmediata:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\gamma} (x_1 + y_1); & y &= \frac{1}{2\gamma} (-x_1 + y_1); \\ \frac{\partial x}{\partial x_1} &= \frac{1}{2\gamma}; & \frac{\partial x}{\partial y_1} &= \frac{1}{2\gamma}; & \frac{\partial y}{\partial x_1} &= -\frac{1}{2\gamma}; & \frac{\partial y}{\partial y_1} &= \frac{1}{2\gamma}, \end{aligned} \quad (6)$$

en virtud de (5).

Derivando en (3), resulta, teniendo en cuenta (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x_1}}{\partial x_1} &= \mu \gamma \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} - 2 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} + 2 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} \right); \\ \frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y_1} &= \mu \gamma \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} \right); \\ \frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial x_1} &= \mu \gamma \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} \right); \\ \frac{\partial \sigma_{y_1}}{\partial y_1} &= \mu \gamma \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} + 2 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{1}{2\gamma} + 2 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} \right). \end{aligned}$$

Sumando y recordando (4):

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y_1} + X_1 = \mu \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \mu (X - Y) = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y_1} + Y_1 = \mu \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \mu (X + Y) = 0.$$

Por último, mediante una nueva suma y resta, resulta después de dividir por 2μ :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + Y = 0,$$

ecuaciones del sistema referencial (x, y) exactamente de la misma estructura formal que las (1) del sistema (x_1, y_1) .

La invariancia de (2) se comprueba con ayuda del siguiente cálculo:

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= \gamma(dx + dy) \\ dx_1 &= \gamma(dx - dy) \end{aligned} \right\} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{1 - \frac{dy}{dx}};$$

$$\frac{\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}}{\tau_{xy_1}} = \frac{-4\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Sustituyendo en (2):

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^2}{\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^2} - \frac{4\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{1 - \frac{dy}{dx}} - 1 = 0,$$

y operando sucesivamente:

$$4 \frac{dy}{dx} - 4 \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} \frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

como queríamos demostrar.

BIBLIOGRAFIA

- Einstein, A.: *La relativité et le problème de l'espace*, Gauthier-Villars, París, 1956.
- Torroja, E.: *Elasticidad*, Dossat, S. A., Madrid, 1945.
- Broglier, Louis de: *Elements de théorie des quanta et de Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, París, 1959.
- Schrödinger, E.: *Expanding universes*, Cambridge, University Press, 1957.