

INTRODUCCION AL ESTUDIO TENSORIAL DE LA ELASTICIDAD Y SU APLICACION A LAMINAS

Por ALBERTO DOU MAS DE XEXAS

Ing. de Caminos, Canales y Puertos.

JOSE MANUEL ANTON CORRALES

Prof. Auxiliar de Prácticas.

Este artículo y su posible continuación son fruto del seminario de Elasticidad que tuvo lugar en el curso 1966-67 bajo la dirección del primero de los autores, con carácter de Curso Monográfico de Doctorado de la Facultad de Ciencias. Aparte de otras materias afines, trató este seminario de la deducción por Fritz John de unas ecuaciones diferenciales para las láminas usando funciones de dos variables independientes (coordenadas sobre la superficie media de la lámina). El autor parte de las ecuaciones de la Elasticidad tridimensional exactas, y llega a las de la lámina, estimando el orden de los términos despreciados. Es la primera vez que se hace esto último.

Al igual que el artículo que acabamos de citar, usaremos cálculo tensorial. Daremos la formulación tensorial de la Elasticidad tridimensional para un sólido homogéneo, isótropo y perfectamente elástico. Tenemos la intención de pasar de éstas a las de la lámina en posteriores artículos. En las referencias (2) y (3) aparecen obras conocidas que introducen al cálculo tensorial.

Dividiremos este artículo en cinco partes:

- A) Coordenadas y notaciones.
- B) Tensor de deformaciones.
- C) Tensor de tensiones.
- D) Relación entre las componentes de ambos en el caso de un cuerpo homogéneo, isótropo y perfectamente elástico, considerando la energía de deformación.
- E) Ecuaciones de la Elasticidad en tres dimensiones.

A) Coordenadas y notaciones.

El análisis tensorial se presta bien al estudio de las deformaciones y de los esfuerzos en cuerpos continuos. El nombre de tensor fue precisamente dado por

el físico alemán Voigt a unos entes matemáticos, a cuya consideración condujo el estudio de la deformación de los cristales.

La Elasticidad es una parte de la Física Clásica. Por tanto, suponemos que el espacio físico puede referirse a un sistema ortonormal de Galileo. El cómo y el porqué pertenecen a la filosofía de la Ciencia y se dan por evidentes en muchos tratados de Mecánica.

Tenemos, pues un punto de referencia 0 y tres vectores ortonormales e_1, e_2, e_3 . Un punto tendrá respecto a ellos coordenadas x^i o bien X^i , donde $i = 1, 2, 3$. En lo que sigue los índices latinos podrán, salvo indicación, tomar los valores 1, 2, 3. El sistema de coordenadas estará fijo a la tierra, de modo que valen prácticamente para él todas las leyes de la Mecánica a nuestros efectos.

Un cuerpo está formado de átomos. Como el diámetro de éstos es del orden de $10^{-10} m$, podemos considerarlo continuo y aplicarle consideraciones macroscópicas mediante el cálculo diferencial. Esto se hace con resultados totalmente aceptados por la técnica para cuerpos muy heterogéneos como el hormigón, tomando valores globales de las constantes. Estas se miden por experiencias que las den directamente. Por ejemplo, la resistencia a compresión simple del hormigón, que se mide en la prensa con una probeta de dimensiones mayores que los áridos. Se considerará que un punto tiene los desplazamientos de sus átomos más próximos prescindiendo de oscilaciones térmicas u otras. Aunque parte de lo que sigue puede aplicarse a líquidos y gases, está hecho para ser aplicado a cuerpos en estado sólido. En cada punto se supondrá que se puede definir una densidad r .

Un punto de un cuerpo vendrá definido por unas coordenadas u^i . Respecto al sistema ortonormal anterior tendrá unas coordenadas X^i , en el estado inicial. Se supondrá más tarde que existe un estado natural sin tensiones; el estado inicial será precisamente éste. Puede tener interés considerar estados en los que por deformaciones elásticas no se pueda llegar a un estado natural —piénsese en un calentamiento irregular o en deformaciones plásticas impuestas—, pero se sale del margen de este artículo.

Después de ciertas deformaciones finitas, el punto anterior tendrá por coordenadas x^i . Suponemos que las X^m y las x^p son funciones todo lo lisas que haga falta de las u^i .

Como tenemos libertad al elegir las coordenadas u^i , tomaremos las más sencillas posibles. En cuerpos de simetría de revolución será útil tomar coordenadas cilíndricas. Para la demostración de fórmulas tensoriales es útil tomar $u^i = X^i$; en este caso tenemos una notación muy parecida a la clásica (véase, por ej., ref. 5).

Nos interesa definir los corrimientos respecto a los ejes ortonormales. Serán:

$$y^i = x^i - X^i. \quad [1]$$

Nos hará falta considerar en coordenadas u^i la distancia entre dos puntos infinitamente próximos, sean (u^i) y $(u^i + du^i)$. Usando en lo que sigue la convención de Einstein para sumas, suprimiendo el símbolo Σ , y sumando respecto a los índices latinos repetidos, tomando éstos los valores 1, 2, 3, queda para la distancia antes de la deformación dS :

$$dS^2 = dX^m dX^m = du^i du^j \frac{\partial X^m}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial X^m}{\partial u^j} = du^i du^j G_{ij}; \quad [2]$$

$\bar{y}$ para la distancia después ds :

$$ds^2 = dx^p dx^p = d u^i d u^j \frac{\partial x^p}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial u^j} = d u^i d u^j g_{ij}. \quad [3]$$

En las fórmulas anteriores hemos hecho:

$$\frac{\partial X^i}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial X^i}{\partial u^k} = G_{jk} \quad \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^k} = g_{jk}. \quad [4]$$

Consideremos el espacio matemático de dimensión tres definido por las u^i . Hemos definido dos métricas dadas por los tensores fundamentales g_{ij} y G_{ij} . Con respecto a cualquiera de ellas, el espacio es euclídeo, pues con respecto a las X^p o a las x^m las formas cuadráticas fundamentales son de la forma $dX^m dX^m$ o bien $dx^p dx^p$.

Como el análisis tensorial está establecido para una forma sólo, tomamos como fundamental la G_{ij} . La expresión contravariante del tensor fundamental G^{ij} tiene por coordenadas los elementos de la matriz $((G^{ij}))$, inversa de la $((G_{ij}))$. Podemos ya subir y bajar índices por productos tensoriales contractos con los tensores G^{ij} o G_{ij} .

Para indicar derivada con respecto a u^i usaremos los símbolos $(-, i)$ o bien $(d_i -)$.

Al tener un espacio euclídeo se pueden comparar vectores infinitamente próximos y, por tanto, definir la derivación covariante. Para ello usamos los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k y la notación $(; i)$ para indicar derivada covariante respecto a u^i . Tendremos, pues, los resultados:

$$v_{i,k} = v_{i,k} - \Gamma_{ki}^h v_h, \quad v^i_{,k} = v^i_{,k} + \Gamma_{kh}^i v^h, \quad t^i_{,k} = t^i_{,k} - \Gamma_{ki}^h t_h - \Gamma_{kh}^i t^h_i, \quad [5]$$

$$\Gamma_{jk}^i = 1/2 G^{ir} (G_{rj,k} + G_{kr,i} - G_{jk,r}). \quad [6]$$

También nos interesará hacer derivadas covariantes respecto a la métrica g_{ij} , de notación $(; i)$. El tensor $g^{ij} = g_{lm} G^{il} G^{jm}$ será distinto en general del g^{ij} , que será tal que las matrices $((g_{ij}))$ y $((g^{ij}))$ sean inversas. Los símbolos de Christoffel correspondientes serán:

$$\Gamma_{jk}^i = 1/2 g^{im} (g_{jm,k} + g_{km,i} - g_{jk,m}). \quad [7]$$

Introducimos los símbolos c_{jk}^i por:

$$c_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i, \quad [8]$$

y comprobamos calculando las derivadas covariantes:

$$c_{jk}^i = 1/2 g^{ir} (g_{rj,k} + g_{kr,i} - g_{jk,r}). \quad [9]$$

En efecto:

$$c_{jk}^i = 1/2 g^{ir} (g_{rj,k} + g_{kr,i} - g_{jk,r}) + 1/2 g^{ir} (-g_{rm} \Gamma_{jk}^m - g_{im} \Gamma_{rj}^m - g_{km} \Gamma_{ir}^m - g_{rm} \Gamma_{jk}^m + g_{jm} \Gamma_{kr}^m + g_{mk} \Gamma_{ir}^m) = 1/2 g^{ir} (g_{rj,k} + g_{kr,i} - g_{jk,r}) - \Gamma_{jk}^i.$$

y nos encontramos con [8], habida cuenta de [6].

Según [9] las c_{jk}^i son componentes de tensor.

B) Tensor de deformaciones.

Sean los dos puntos infinitamente próximos antes considerados, o sea, (u^i) y $(u^i + du^i)$. La diferencia de los cuadrados de sus longitudes antes y después de la deformación es, según [2] y [3], poniendo:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (g_{ij} - G_{ij}) \quad \varepsilon^{ij} = G^{ai} G^{bj} \varepsilon_{ab}, \quad [10]$$

$$ds^2 - dS^2 = du^i du^j (g_{ij} - G_{ij}) = \varepsilon_{ij} 2 du^i du^j. \quad [10, bis]$$

Por definición serán las ε_{ij} las componentes covariantes del tensor de deformaciones en el punto considerado. Se pueden también considerar las formas mixtas $\varepsilon_i^j = G^{jk} \varepsilon_{ki}$. Las formas ε_{ij} y la ε^{ij} son simétricas (según su definición), no así las mixtas. Sin embargo,

$$\varepsilon_i^j = G^{im} \varepsilon_{mi} = G^{im} \varepsilon_{im} = \varepsilon_j^j.$$

Se pueden poner las componentes del tensor de deformaciones en función del de los corrimientos. En efecto, habida cuenta de [1], [2] y [3], en coordenadas rectangulares $u^i = x^i$, y de [10] tenemos el resultado:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= 1/2 \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^i} + \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^i} + \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \right) - \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \right) = \\ &= 1/2 \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^i} + \frac{\partial y^j}{\partial x^i} + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \right). \end{aligned} \quad [11]$$

Las definiciones clásicas usan coordenadas rectangulares y llegan al mismo resultado. En la referencia [5] se llega a los resultados (23.4 y 23.5), que con los cambios de rotación siguientes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{11}; & \varepsilon_y &= \varepsilon_{22}; & \varepsilon_z &= \varepsilon_{33}; & \gamma_{xy} &= 2 \varepsilon_{23}; & \gamma_{xz} &= 2 \varepsilon_{13}; & \gamma_{yz} &= 2 \varepsilon_{12}; \\ u &= y^1; & v &= y^2; & w &= y^3, \end{aligned}$$

quedan en la forma:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^i} + \frac{\partial y^j}{\partial x^i} + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \right), \quad [12]$$

Comprobamos que los resultados [11] y [12] son idénticos.

Prescindiendo en [11] del último término tenemos fórmulas lineales que nos conducen a la elasticidad lineal, que por su mayor sencillez es la más usada. Creemos, sin embargo, que para ciertas aplicaciones, en particular para obtener las ecuaciones de la lámina sabiendo que es lo que despreciamos, hacen falta las expresiones exactas.

La expresión [10] puede ser interpretada geométricamente por el elipsoide de deformaciones. Este tendrá por ecuación $l = du^i du^j \varepsilon_{ij}$ referido a ejes $e_j = \frac{\partial OM}{\partial u^j}$, con origen de coordenadas el punto considerado. Las coordenadas de un punto del elipsoide serán du^i . La expresión $\left(\sqrt{\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}} \right)$ para una dirección

dada en ese punto es inversamente proporcional a la longitud del radio vector de esa dirección. Si el alargamiento es negativo el radio vector es imaginario.

Este elipsoide presenta poco interés, pero las direcciones de sus ejes lo tienen y las introducimos de un modo más preciso.

Serán por definición direcciones principales de la deformación en el punto u^i aquellas que hagan extrema la cantidad $\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}$.

Para hallarlas basta con hallar los vectores (du^1, du^2, du^3) que hagan extremo $ds^2 - dS^2$, verificando $dS^2 = 1$. Su dirección será dirección principal de la deformación.

Para ello, según [2] y [10 bis], hacemos extremos $\epsilon_{ij} du^i du^j$ con la condición $du^i du^i = 1$. Empleamos el método de los multiplicadores de Lagrange. La expresión a derivar será, siendo λ el multiplicador: $(\epsilon_{ij} - \lambda G_{ij}) du^i du^j = 0$. Derivándola: $(\epsilon_{ij} - \lambda G_{ij}) du^j = 0$ para $j = 1, 2, 3$.

Multiplicándola por G^{mj} , con contracción del índice j :

$$(\epsilon^m_i - \lambda \delta^m_i) du^i = 0; \quad \text{para } m = 1, 2, 3. \quad [13]$$

O sea, que du^i es vector propio de la matriz $((\epsilon^m_i)) - \lambda (I)$, donde I es la matriz unidad 3 por 3.

Al hacer un cambio de ejes, las matrices de elemento mixto como ϵ^i_j se transforman en una matriz semejante por ser $\epsilon^i_j = \epsilon^l_m \frac{\partial u^i}{\partial X^l} \cdot \frac{\partial X^m}{\partial u^j}$. Por tanto, siguen teniendo, como se sabe, los mismos autovalores.

Respecto a las coordenadas X^i , los índices superiores e inferiores son equivalentes. Por tanto, respecto a ellos, $\epsilon^i_j = \epsilon_{ij}$. La expresión [13] toma la forma: $(\epsilon_{ij} - \lambda) dX^i = 0$, para $j = 1, 2, 3$.

Como la matriz ϵ_{ij} es simétrica podemos concluir que los autovalores existen, son reales, y que los autovectores asimismo existen, son reales y siempre existen tres de ellos ortogonales y unitarios, según la teoría de formas cuadráticas.

Podemos tomar estos tres últimos ejes como ejes de referencia en el punto considerado. Sean (dv^i) las coordenadas respecto a esos ejes del vector diferencial de componentes dX^i respecto a los ejes e^i . La expresión $\epsilon_{ij} dX^i dX^j$ queda de la forma $(dv^1)^2 e_1 + (dv^2)^2 e_2 + (dv^3)^2 e_3$. En ellas, las e_i serán las deformaciones principales, que coinciden con los autovalores de la matriz $((\epsilon_{ij}))$.

C) Tensor de tensiones.

Las fuerzas sobre un cuerpo continuo son de dos tipos. En primer lugar, fuerzas de masa, en las que $f dV$ es la fuerza que actúa sobre el elemento de volumen dV . En segundo lugar de superficie, que pueden suponerse actuando sobre cualquier elemento de superficie interno del cuerpo; representan la suma de las fuerzas moleculares entre las moléculas de un lado y de otro del elemento de superficie. Su expresión será, pues, de la forma $F(n) dS$, donde n es el vector unitario normal al elemento de superficie de área dS sobre la que actúa, suponiéndose que la fuerza es ejercida por las moléculas del lado positivo del dicho elemento sobre las del lado negativo. Se supone, pues, que son proporcionales a dS y que su valor depende de la dirección de n . Se demuestra (ref. 5, pág. 6; re-

ferencia 3, pág. 152) que la función $F(n)$ es lineal. Tanto las funciones f como F son función del punto considerado.

Las fuerzas de volumen procederán, en general, de campos como el gravitatorio, en el que $f = -r' k$, donde r' es el peso volúmico y donde k es el vector unitario vertical dirigido hacia arriba. En la que sigue nos ocuparemos sólo de las de superficie, siguiendo el ejemplo de la referencia (1).

Para escribir la función lineal $F(n)$ empleamos coordenadas rectangulares en el estado deformado, que tiene el cuerpo x^i . Designamos por β_j las componentes del vector n respecto a los ejes e_i y por $d f^i$ las componentes de la fuerza que actúa sobre el elemento de superficie de área dS y de normal n unitario (fuerza del lado positivo de la superficie con respecto a la normal sobre el negativo). La función lineal podrá expresarse en la forma:

$$d f^i = t^{ij} \beta_j d s. \quad [14]$$

Respecto a cambios de ejes ortogonales, las t^{ij} han de comportarse como componentes de tensor para que se siga cumpliendo [14]. Respecto a coordenadas cualesquiera u^a definimos las t^{ab} de modo que sean componentes de un tensor dos veces contravariante, o sea por:

$$t^{ab} = \frac{\partial u^a}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial u^b}{\partial x^j} t^{ij}. \quad [15]$$

Este tensor por definición será el de tensiones.

No escribimos la relación [14] en coordenadas cualesquiera u^i , puesto que los elementos de superficie habrían de ser considerados como bivectores, de los cuales $n dS$ sería el vector adjunto. Razonaremos en coordenadas x^i , pasando los resultados a coordenadas u^i cuando interesen.

Planteemos el equilibrio estático de un volumen sobre cuya superficie actúan fuerzas de superficie definidas por el conocimiento del tensor t^{ab} en cada punto.

En primer lugar escribamos que la resultante de las fuerzas sobre su superficie es nula por la ausencia de fuerzas de masa: $O = \iint t^{ij} \beta_j dS$ (con $i = 1, 2, 3$ y extendiéndose la integral a la superficie del volumen escogido).

Aplicando el teorema de la divergencia, designando por $(, , i)$ la derivada con respecto a x^i : $O = \iiint dV t^{ij}_{,j}$. Por ser el volumen cualquiera esto equivale a $t^{ij}_{,j} = 0$ en cada punto. Expresiones que son idénticas a las formas tensoriales $t^{ij}_{;j} = 0$, que por ser tensoriales son susceptibles de ser puestas en las coordenadas u^a cualesquiera en la misma forma: $t^{ab}_{;a} = 0$. Que habida cuenta de [8] quedan en la forma:

$$t^{ij}_{,i} + c_m^i t^{mj} + c_m^j t^{mi}. \quad \text{Para } i = 1, 2, 3; \quad \text{y respecto a las } u^i. \quad [16]$$

Estas ecuaciones [16] son las de Cauchy.

En segundo lugar escribimos que el momento de las fuerzas sobre el volumen considerado es nulo respecto al origen de coordenadas. Por tanto:

$$O = \iint dS \{ (x^2 t^{31} - x^3 t^{21}) e_1 + (x^3 t^{11} - x^1 t^{31}) e_2 + (x^1 t^{21} - x^2 t^{11}) e_3 \} \beta_j$$

para $j = 1, 2, 3$. Aplicando el teorema de la divergencia y anulando expresiones del tipo $t^{ij}_{,i}$ por suponerse cumplidas las condiciones de Cauchy, queda:

$$(t^{12} - t^{21}) e_1 + (t^{13} - t^{31}) e_2 + (t^{23} - t^{32}) e_3 = 0.$$

O sea que el tensor t^{ij} es simétrico, pues basta para ello que $t^{ij} = t^{ji}$ con respecto a las coordenadas x^i .

D) Relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones.

Para poder continuar es preciso hacer hipótesis sobre el comportamiento del material. Este depende de la temperatura, pues es sabido que un calentamiento irregular produce tensiones. Prescindiremos aquí de sus influencias, suponiendo que los cambios termodinámicos son tales que se verifican las ecuaciones que vamos a obtener. Habrá muchos casos en que esto se cumplirá prácticamente, en particular en las estructuras a temperatura uniforme y no variable. Para un tratamiento teórico termodinámico de los principios de la Elasticidad puede consultarse la referencia (2).

Las hipótesis de la Elasticidad dentro de la Mecánica racional han sido muy rigurosamente tratadas por Truesdell (ref. 4). Exponemos de un modo mucho más intuitivo que él la parte que nos conviene, que se limitará al sólido homogéneo e isótropo y perfectamente elástico.

Las tensiones en un punto de un cuerpo serán función de la historia de todo el cuerpo. El *principio de la acción local* dice que estas tensiones no dependen más que de la historia del entorno del punto: se justifica físicamente por ser las fuerzas de superficie resultantes de fuerzas moleculares próximas. Las ecuaciones que escribamos no dependerán del sistema de ejes de Galileo que tomemos, si son dinámicas; el sistema de ejes podrá ser cualquiera si son estáticas. Esto constituye el *principio de invarianza de las ecuaciones con respecto al sistema de referencia*. Para que se cumpla basta que las ecuaciones sean relaciones tensoriales.

Dadas unas coordenadas y un estado inicial (no deformado por definición), definiremos las t^i y las ϵ_{ij} según las páginas anteriores.

Lo que precede significa que las componentes del tensor de tensiones en un punto serán una función invariante respecto a cambios de referencia de las componentes del tensor de deformaciones y de sus derivadas con respecto a las x^i .

Se llamará *cuerpo simple* aquel en que el estado de tensiones en un punto es el que tendría en la deformación homogénea. Las t^{ij} serán función de las ϵ_{ij} , no de sus derivadas.

Cuerpo elástico será aquel en el que las tensiones sólo dependen de las deformaciones en el momento presente. Con ello prescindimos de fenómenos de fluencia y de histéresis.

Cuerpo perfectamente elástico será aquel en el que las tensiones sobre un elemento de volumen cualquiera le comunican un trabajo función sólo de las deformaciones ϵ_{ij} iniciales y finales, no del recorrido de éstas. Habrá, pues, una función de energía elástica por unidad de masa, potencial del trabajo de las tensiones. Como supondremos más tarde que habrá un estado natural en el que tensiones y deformaciones serán nulas, le asignaremos energía nula, y además consideraremos la función W , anergia por unidad de volumen medido en ese estado natural.

Observamos que un proceso reversible adiabático elástico es perfectamente

elástico. El adiabatismo implica variaciones de temperatura, considerables en los gases y despreciables en los sólidos, que pueden destruirnos la reversibilidad por conducción térmica en procesos suficientemente lentos. No lo tendremos en cuenta, y no es necesario prácticamente en las aplicaciones estructurales.

La función W , potencial de las ϵ_{ij} , funciones a su vez de las ϵ_{ij} , será función de estas últimas. O lo que es lo mismo, de las deformaciones principales e_1, e_2, e_3 y de la dirección de los ejes principales correspondientes. Esta función, si el cuerpo es *homogéneo*, no dependerá del punto. La definición de homogéneo según la (ref. 4) plantea ciertas dificultades que desaparecen al existir un estado natural, pues se requiere que por deformaciones elásticas el cuerpo pueda ser llevado a un estado a partir del cual las mismas deformaciones en dos puntos distintos provoquen las mismas tensiones. Supondremos que existe además un estado sin tensiones al que se puede llegar por deformaciones elásticas; lo llamaremos estado natural y le asignaremos las coordenadas X^i , de modo que sea el estado inicial a partir del cual se definen las deformaciones.

Si el cuerpo es isótropo no dependerá la W de la dirección de los ejes principales.

Tendrá, pues, que ser función simétrica de las e_i principales. Por consideraciones puramente algebraicas resulta, pues, que será sólo función de:

$$s_1 = e_1 + e_2 + e_3; \quad s_2 = \sum (e_i)^2; \quad s_3 = \sum (e_i)^3. \quad [17]$$

Expresiones que valen:

$$\begin{aligned} s_1 &= \epsilon_{ij}^i; \\ s_2 &= \epsilon_{ik}^i \epsilon_{ij}^k; \\ s_3 &= \epsilon_{ij}^i \epsilon_{ik}^j \epsilon_{ij}^k. \end{aligned} \quad [18]$$

Demostramos únicamente la tercera: el segundo miembro es el producto tensorial contracto de los tensores $\epsilon_{ij}^i, \epsilon_{jk}^j$ y de ϵ_{ki}^k . Es, pues, un escalar que no varía al tomar ejes ortogonales según las direcciones principales. En ellos $\epsilon_{ij}^i = 0$ si $i \neq j$ y $\epsilon_{ii}^i = e_i$. Queda, pues, $(e_1)^3 + (e_2)^3 + (e_3)^3$, que es s_3 .

La función W podrá ser todo lo complicada que la realidad quiera, pero como las e_j serán pequeñas en la práctica nos conviene hacer su desarrollo en serie y tomar los primeros términos. Este desarrollo, según lo que precede, será de la forma:

$$W = A + B s_1 + (C (s_1)^2 + D s_2) + f (s_1)^3 + s_2 s_1 g (s_1) + s_3 h (s_1), \quad [19]$$

donde el término complementario contiene unas funciones f, g, h de las s_i , todo lo suficiente lisas que haga falta.

Al suponer que el estado neutro $W = 0$, sale $A = 0$. Al suponer que este estado es de equilibrio en ausencia de tensiones, W presentará un mínimo en él ($S_i = 0$). Es decir, $B = 0$, y la forma cuadrática $C (s_1)^2 + D s_2$ será definida positiva, considerada como forma en las ϵ_{ij}^i .

Un estudio algebraico de esta forma, sencillo si tomamos ejes principales, nos lleva a la conclusión de que esto equivale a decir que, o bien $D > 0, C > 0$, o bien $D > 0, C < 0$ y $D + 3C > 0$. Estos valores son los que toman las funciones:

$$C = \frac{E \nu}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad D = \frac{E(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad [20]$$

al variar v entre -1 y $1/2$, pudiendo tomar E un valor cualquiera. Admitimos, por comparación con la expresión clásica de la energía, que v representa el coeficiente de deformaciones transversales partido por longitudinales en compresión simple, o módulo de Poisson, y que E representa al módulo de compresión simple. No se conoce material con v negativa.

Con los términos de segundo grado queda:

$$W = C (s_1)^2 + D s_2^2 \quad \text{con} \quad C \text{ y } D \text{ según [20]} \quad [21]$$

Esta aproximación es la más usada en las aplicaciones. Para cálculos posteriores es útil suponer un sistema de unidades en el que la E del material sea 1. Con ello no se arrastra en todas las fórmulas. El cambio se deshace en las expresiones de los resultados finales.

Vamos a demostrar a continuación que en una deformación infinitesimal a partir de un estado deformado la variación de energía por unidad de volumen en estado natural sigue la ley:

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \delta^{ij} (g/G)^{1/2}, \quad [22]$$

donde g es determinante $((g_{ij}))$ y G es de $((G_{ij}))$ por ser la variación de W el trabajo de las tensiones.

En el estado inicial deformado el punto de coordenadas u^i está en la posición x^i respecto a ejes ortogonales. Escogemos las u^i de modo que $u^i = x^i$ en este estado.

Tendremos que hacer diferenciaciones respecto a la posición x^i , siendo g_{ij} el tensor métrico.

Si se efectúa una deformación infinitesimal, el punto u^i pasará a ocupar las coordenadas $x^i + \delta x^i$. Usaremos el símbolo δ para indicar diferenciación en la deformación. Vamos a demostrar que:

$$\delta^{ij} \delta e_{ij} = \delta^{ij} \frac{\partial \delta x^i}{\partial u^j}. \quad [23]$$

En primer lugar, según (10 bis) y al no variar G_{ij} durante las deformaciones:

$$\delta e_{ij} = \delta (g_{ij} - G_{ij})^{1/2} = \delta g_{ij} / 2. \quad [24]$$

Para calcular δ_{ij} tenemos en cuenta que vale $g_{ij} = \delta_{ij}$ antes de las deformaciones, y que $\frac{\partial x^a}{\partial u^i} = \delta^a_i$. El valor de g_{ij} después de las deformaciones es:

$$g_{ij} = \frac{\partial (x^a + \delta x^a)}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial (x^a + \delta x^a)}{\partial u^j} = 1 + \frac{\partial \delta x^i}{\partial u^i} + \frac{\partial \delta x^j}{\partial u^j} + \frac{\partial \delta x^a}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \delta x^a}{\partial u^j}.$$

El valor de δg_{ij} es la parte principal (con respecto a las δx^a) de las diferencias de

las g_{ij} , después y antes de la deformación. Por tanto, entrando con este δg_{ij} en (24) queda:

$$\delta \varepsilon_{ij} = 1/2 \left(\frac{\partial \delta x^i}{\partial u^j} + \frac{\partial \delta x^j}{\partial u^i} \right).$$

Expresión que multiplicamos con dos contracciones por t^{ij} , con respecto a los índices i y j , añadiendo al miembro izquierdo el producto contracto nulo, por ser tensor simétrico por tensor antisimétrico, $1/2 t^{ij} \left(\frac{\partial \delta x^i}{\partial u^i} - \frac{\partial \delta x^i}{\partial u^i} \right)$.

Queda la expresión [23], demostrada.

Expresemos ahora el trabajo de las tensiones sobre un volumen cerrado durante la deformación infinitesimal. Es $\iint dS \beta_i t^{ij} \delta x^i$, siendo la integral a lo largo de la superficie del volumen y β_i las componentes de su normal dirigidas para afuera. Aplicando el teorema de la divergencia: $\iiint dV \left(t^{ij}{}_{;i} \delta x^i + t^{ij} \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^i} \right)$ por ser igual la derivación con respecto a x^i a la derivación covariante respecto a la métrica g_{ij} . Además, en las derivadas de posición como $u^i = x^i$, se puede reemplazar x^i por u^i . Y $t^{ij}{}_{;i} = 0$ según las ecuaciones de Cauchy [16]. Con lo que la variación de energía por unidad de volumen deformado queda $t^{ij} \frac{\partial \delta x^i}{\partial u^i}$.

Como el paralelepípedo elemental de lados $(du^1, 0, 0)$, $(0, du^2, 0)$, $(0, 0, du^3)$ tiene por volumen antes de la deformación $G^{1/2} dX^1 dX^2 dX^3$, $g^{1/2} dx^1 dx^2 dx^3$ después, el volumen queda multiplicado por $(g/G)^{1/2}$ en la deformación y la energía por unidad de volumen inicial queda: $t^{ij} (g/G)^{1/2} \frac{\partial \delta x^i}{\partial u^i}$, que aplicando el resultado [23] nos da $\delta W = (g/G)^{1/2} \delta \varepsilon_{ij} t^{ij}$. Esta expresión es tensorial, pues en el segundo miembro aparece un producto contracto y el escalar independiente de las u^i , g/G . Por tanto, en cualquier sistema de coordenadas es cierta la expresión [22], que es lo que queríamos demostrar.

E) Ecuaciones elásticas en tres dimensiones.

En primer lugar tendremos las ecuaciones de Cauchy, que en nuestro supuesto de ausencia de fuerzas exteriores son las [16].

En segundo lugar necesitaremos unas análogas a las de Beltrami en elasticidad lineal. Aparecen observando que al ser la métrica g_{ij} euclídea tiene que ser nulo el tensor de Riemann correspondiente. Este tiene por componentes según la referencia (3) pág. 126-127:

$$1/2 (g_{i r, j s} + g_{j s, i r} - g_{i r, i s} - g_{j s, j r}) + g_{a b} (\Gamma_s^b \Gamma_i^a \Gamma_r^a - \Gamma_r^b \Gamma_i^a \Gamma_s^a).$$

Esta expresión respecto a coordenadas $u^i = X^i$, en las que $(,i)$ equivale a $(;i)$ y en

las que $\Gamma'^{i j}_k = c_i^{j k}$ queda en la forma tensorial (recordemos que las $c_i^{j k}$ son tensores):

$$1/2 (g_{i r, j s} + g_{j s, i r} - g_{j r, i s} - g_{i s, j r}) + g_{a b} (c_s^b c_i^a - c_r^b c_j^a) \quad [25]$$

que se conserva en un cambio de coordenadas u^i .

Por tanto, han de ser nulas las componentes [25]. Hay 6 independientes. Por ejemplo las:

$$(i j r s) = (1212) (1213) (1313) (2123) (2323) (3132).$$

Estas 6 ecuaciones pueden ponerse en función de las b_{ij} (según [9]) y según [10] en función de las ϵ_{ij} . No son lineales.

Recíprocamente, dadas unas ϵ_{ij} que cumplan estas ecuaciones, calculamos las g_{ij} según [10]. Son componentes de un tensor métrico de espacio euclídeo por anularse el tensor de Riemann correspondiente. Por tanto, pueden resolverse las ecuaciones [4] y calcularse las x^i en función de las u^i ; es decir, que existen corrimientos que nos den esas deformaciones.

Habrà que imponer unas condiciones de contorno pertinentes. Por ejemplo, dar las fuerzas sobre la superficie que limite el cuerpo (tendremos las ecuaciones [14] en la superficie exterior).

Mediante las ecuaciones [22] podremos poner las tensiones en función de las deformaciones y viceversa, una vez supuesta una función W (por ejemplo, véase [21]).

Si planteamos las ecuaciones en deformaciones tendremos, pues, 6 ecuaciones de compatibilidad y 3 de equilibrio interno: las de Cauchy [16] y las de anular las expresiones [26]. Hay 6 incógnitas, las ϵ_{ij} , habida cuenta de que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. En elasticidad lineal ocurre lo mismo (véase referencia 5). Se demuestra que tres de las 9 ecuaciones se obtienen a partir de las otras 6, para lo cual hay que derivarlas convenientemente. En estas derivaciones se pierden condiciones de borde, por lo que no podemos prescindir de tres ecuaciones. Suponemos que en las ecuaciones no lineales debe ocurrir lo mismo.

Para concluir, y siguiendo a la referencia (1), vamos a poner las ecuaciones de Cauchy [16] en otra forma.

Introducimos las variables auxiliares:

$$T_i^m = (g/G)^{1/2} t_s^m g_s^i - W \delta^{mi}. \quad [26]$$

Y vamos a probar que:

$$T_{i, m}^m = 0. \quad [27]$$

Como son relaciones tensoriales basta demostrarlas para las coordenadas $u^i = X^i$, en las que podemos reemplazar los símbolos (;) y (,) de derivación, hacer $\Gamma'^{i j}_k = c_i^{j k}$ y $G = 1$, y considerar equivalentes índices inferiores y superiores.

Nos interesa el resultado de la referencia (3), página 99, en que dice $\Gamma_{h i}^i = -\frac{\partial_h \sqrt{g}}{\sqrt{g}}$. Derivamos [26].

$$T_{i, m}^m = T_{i, m}^m = g^{1/2} (\Gamma_{m r}^r t_s^m g_s^i + t_{s, m}^m g_s^i + t_s^m g_{s i, m}) - \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{a b}} \epsilon_{a b, m},$$

que habida cuenta de (16) y (22) puede ponerse en la forma:

$$T_{i;m}^m = g^{1/2} (c_{m,r}^r t_s^m g_i^s - c_{r,m}^m t_s^r g_i^s - c_{r,m}^s t^{mr} g_i^s + t_s^m g_{s,i,m} - t^{ab} g_{ab,m}).$$

Esta expresión se hace idénticamente nula introduciendo el valor de c_i^{mn} de [9]. Luego hemos probado [27], que es otra forma de escribir las ecuaciones de Cauchy.

REFERENCIAS

1. FRITZ JOHN: "Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations". Communications on pure and applied Mathematics, vol. XVIII, 235-267, 1965.
2. I. S. SOKOLNIKOFF: *Tensor Analysis*, John Wiley, New York, 1951.
3. A. LICHNEROWICZ: *Elements de calcul tensoriel*. Collin. París, 1962.
4. TRUESDELL, C.: *Six lectures on Modern Natural Philosophy*. Springer-Verlag. New York Inc., 1966.