

CALCULOS TENSORIALES

Por ANTONIO LOPEZ FRANCO

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Como aportación al Congreso que la Asociación para el Progreso de las Ciencias celebrado en Bilbao, durante el mes de julio último, adjunto el resumen de un trabajo, que vengo realizando, aprovechando los ocios forzosos, que mi doble jubilación administrativa y profesional me brinda, recopilando y ordenando conceptos adquiridos sobre la marcha, referentes a nuevas disciplinas, casi desconocidas al principio de mi carrera, los que siempre me creí, en la obligación de captar ante la necesidad de su aplicación inmediata en diferentes ocasiones, pero sin tiempo para profundizar en ellas, lo cual me era indispensable con miras a la enseñanza, resolviendo situaciones del momento, sometidas a constantes rectificaciones posteriores: parte de esta labor ha sido dada a conocer en modestas publicaciones, algunas de las cuales lo han sido a través de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.

Uno de los temas que más me han preocupado ha sido todo lo relacionado con los cálculos tensoriales, como prolongación de los más vulgarizados cálculos vectoriales, con lo que se llega a complicaciones insospechadas, entre ellas, las de ser necesario actuar, la mayor parte de las veces, en espacios de más de tres dimensiones, sin realidad física, pero a los cuales es forzoso asimilar los conceptos y teorías que estamos acostumbrados a tratar, que pasan a ser abstracciones matemáticas, de las cuales las intuiciones han de ser casos particulares; para esto es indispensable un estudio previo, partiendo de las teorías vectoriales sobre el alcance y significado que representan su adaptación a los medios, dentro de los cuales no tienen sentido la mayor parte de las intuiciones, y para ello se requieren definiciones y convenios de carácter abstracto que mantengan la unidad y continuidad del conjunto.

En los cálculos vectoriales se manejan, más que los vectores, sus componentes, cuyo número es igual al número de dimensiones del espacio, cosa que no tiene explicación geométrica cuando este número es mayor de tres, lo cual requiere previamente una definición o convenio de lo que entendemos por dimensiones de un espacio, o mejor dicho, de lo que entendemos por espacio de más de tres dimensiones.

Partiremos de la expresión vectorial siguiente:

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n = \sum x^i \vec{e}_i$$

en las que las x^i representan una serie de magnitudes, y las e_i las unidades correspondientes con las que son medidas; pueden ocurrir dos casos: Primero, que sea imposible encontrar para un cierto valor de n una serie de e_i tal que la suma indicada en el segundo miembro sea cero, no siendo nulas la totalidad de las x^i , y segundo, que exista un determinado número n para el que esto sea realizable, en

cuyo caso diremos que las x^i son las componentes contravariantes de un vector \vec{x} en un espacio de n dimensiones, referido a un sistema coordenado cuya base esté definida por los n vectores unitarios \vec{e}_i , siendo $i = 1, 2, \dots, n$.

Esto señala la existencia de n direcciones de hipotéticos ejes, que sólo tienen realidad cuando n es menor de cuatro; sobre estos ejes se efectúan mediciones que,

en general, requieren unidades diferentes para cada eje (espacio vectorial afín); bien una unidad común para todos (espacio métrico); cada componente se caracteriza por un índice coincidente con el número del eje sobre el cual se desarrolla.

En los espacios geométricos la suma anterior tiene una interpretación precisa considerando a las e_i como los cosenos de los ángulos que forma \vec{x} con cada uno de los ejes, por lo que los productos escalares de \vec{x} por los \vec{e}_j representa la proyección de \vec{x} sobre los ejes, a las que denominaremos x_j , es decir:

$$(\vec{x} \cdot \vec{e}_j) = x_j = \sum x^i (e_i \cdot e_j).$$

Las x_j así obtenidas reciben el nombre de componentes covariantes de \vec{x} .

La distinción entre las componentes contravariantes y las covariantes se establece colocando en las primeras el índice en la parte superior, y en las segundas en la parte inferior, no debiendo haber confusión en el primer caso con los posibles indicadores de elevación a potencias.

Hemos establecido la diferencia entre productos escalares y vectoriales empleando, respectivamente, paréntesis curvos o corchetes.

Fácil es comprobar en los espacios bi y tridimensionales que en casos de referencia ortogonales se confunden las componentes covariantes y contravariantes, pero para hacer esto extensivo a los espacios enedimensionales hemos de convenir que el concepto de perpendicularidad se manifiesta en que el producto escalar de dos vectores $(e_i \cdot e_j)$ es en un sistema rectangular nulo para $i \neq j$, así como el paralelismo, siempre que tenga lugar $i = j$, con lo que la última ecuación se convierte en

$$x_j = x^j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

bien entendido que el signo \sum ha desaparecido automáticamente, pues sólo existe un sumando en cada ecuación de las n en que se condensan las fórmulas que en las referencias que no sean ortogonales constituyen un sistema de ecuaciones lineales que enlazan las x^i con las x_j mediante el operador de la regla de Cramer, constituido por la matriz formada por los coeficientes $(e_i \cdot e_j)$, cuyo determinante designaremos por g_{ij} en la operación directa, y por g^{ij} en la inversa.

Este determinante constituye un tensor de segundo orden, que recibe el nombre de tensor fundamental en el espacio euclídeo.

Con todas estas nociones previas estamos ya en condiciones de tratar de los tensores, o más propio, de las *magnitudes tensoriales*, que como hemos dicho, se manejan siempre a través de sus componentes, en espacios enedimensionales, de un modo semejante a como hemos visto se hace con las vectoriales; vamos a continuación a estudiar un caso práctico que contribuye a aclarar el concepto general de tensor.

Partiremos de la figura acotada adjunta (fig. 1.^a), que representa un sistema oblicuo de ejes coordenados $O X_1, O X_2$ en el plano, en el cual se destacan las coordenadas contravariantes x^1 y x^2 , a la vez que las covariantes x_1 y x_2 de un punto P , sobre el cual definimos una elipse de diámetros conjugados x^1 y x^2 . El área del paralelogramo

mo formado $S = x^1 x^2 \sin \theta$ constituye un invariante de dicha curva; trazando por O una perpendicular OQ a la tangente desde P , paralela a x^1 , tendremos:

$$S = x^1 \times OQ = x^1 (x^2 \sin \theta) = x^2 (x^1 \sin \theta).$$

Consideremos en el punto M una acción mecánica, tal como una fuerza F en dirección de la tangente, cuyo impulso sobre una masa m , con una velocidad v será $m v$; su momento cinético con relación a O es:

$$M = m v \times r,$$

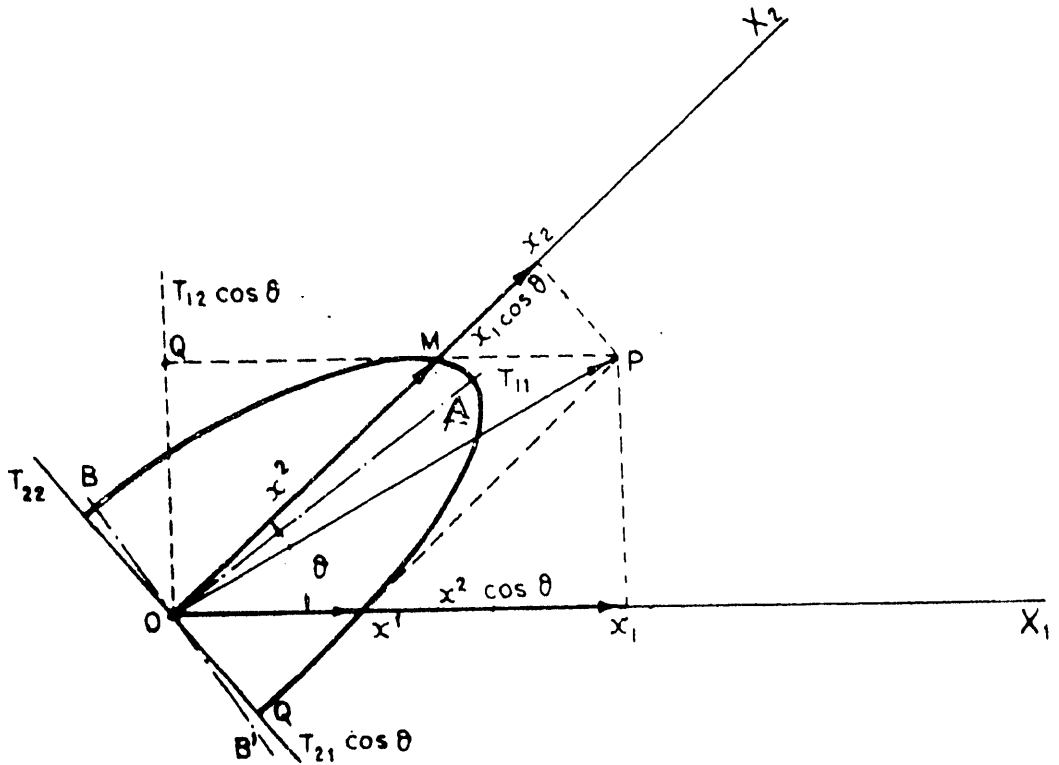


Figura 1.^a

siendo

$$OQ = r.$$

Llamando w a la velocidad angular del desplazamiento originado alrededor de O , tendremos $v = w r$ y, por tanto:

$$M = m w r, \quad r = w (m r^2).$$

Surge así el concepto de *momento de inercia* ($m r^2$) como operador de la transformación de dos vectores: *momento cinético* y *velocidad*, lo que en los procedimientos tensoriales define un tensor de 2.^o orden simétrico T_{ij} ($i, j = 1, 2$), cuyo determinante es:

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix}$$

Se denomina eje tensor a la perpendicular OQ , cuyo valor viene dado por la proyección OM , a la que daremos el valor $T_{12} \operatorname{sen} \theta$, y repitiendo el razonamiento para el diámetro conjugado, obtendremos otro eje tensor en la dirección OQ' de valor $T_{21} \operatorname{sen} \theta$, lo que nos dice que las componentes del tensor en la dirección de un diámetro siguen la de las perpendiculares al diámetro conjugado y, por tanto, las direcciones de los ejes de la elipse $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ son coincidentes con T_{11} y T_{22} , la matriz tendrá la forma:

$$\begin{vmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{vmatrix}$$

Si adoptamos una escala tal, que los cuadrados de los semidiámetros estén representados por las inversas de sus momentos de inercia correspondientes OM resultan para los ejes:

$$OA = \frac{1}{\sqrt{I_1}}, \quad OB = \frac{1}{\sqrt{I_2}},$$

o sea:

$$OA = \frac{1}{T_{11}}, \quad OB = \frac{1}{T_{22}}.$$

En el espacio tridimensional tendríamos en lugar de la elipse (caso particular de una cónica) un elipsoide (caso particular de una cuádrica), las direcciones de los ejes tensores serían las perpendiculares a los planos tangentes paralelos a los determinados por cada par de diámetros conjugados; en los espacios de más de tres dimensiones se obtendrían, del mismo modo, cuádricas irrepresentables prácticamente, pero siempre correspondientes a una multiplicidad lineal o forma cuadrática sobre la base de n ejes principales ortogonales, pudiéndose efectuar las transformaciones necesarias para que estos ejes constituyan un sistema de referencia, lo que equivale al paso de una matriz cuadrada simétrica a otra diagonal, cuyos elementos principales $T_{11}, T_{22}, \dots, T_{nn}$, representan los llamados *valores propios*.

La ecuación de la cuadrática sería, por tanto;

$$T_{11} (x^1)^2 + T_{22} (x^2)^2 + \dots + T_{nn} (x^n)^2 = 1.$$

En las investigaciones que se llevan a cabo en las modernas mecánicas, entran en juego magnitudes físicas, cuyos valores pueden ser determinados directamente, efectuando mediciones, más o menos precisas, o bien por deducciones matemáticas, las que son base de una serie de funciones definidas como elementos vectoriales en el llamado espacio de Hilbert (espacio vectorial métrico de infinitas dimensiones), funciones que desempeñan dentro de dicho espacio el mismo papel que en un espacio métrico corriente, los ejes coordenados: estas funciones expresadas simbólicamente por:

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n,$$

que han de reunir teóricamente las mismas condiciones de ortogonalidad de dichos ejes, o sea:

$$(\psi_i \psi_k) = 0 \quad \text{para } i \neq k, \quad (\psi_i \psi_k) = 1 \quad \text{para } i = k.$$

Cada uno de estos elementos estará definido por su valor propio E^i y cualquier otro elemento ψ que no coincida con alguno de estos valores propios, sólo se le podrá definir por medio de una multiplicidad lineal de la forma:

$$\psi = \psi_1 C_1 + \psi_2 C_2 + \dots + \psi_n C_n = \sum_{k=1}^{k=n} \psi_k C_k,$$

en la que las C representan los grados de aproximación a cada una de las ψ_k .

Elevando al cuadrado tendremos:

$$\psi^2 = \sum_{k=1}^{k=n} \psi_k^2 C_k^2 + 2 \psi_k C_k \psi_i C_i \dots,$$

y teniendo en cuenta las condiciones de perpendicularidad:

$$\psi^2 = \sum C_k^2 = 1,$$

que pone de manifiesto la correlación existente entre las C_k y los clásicos cosenos directores.

Empleando el lenguaje de la mecánica cuántica, diremos que ψ^2 significa la probabilidad de que al hacer una medida tal como la necesaria para fijar la posición de un electrón, dentro del átomo, ésta corresponda con uno de los niveles energéticos, correlativos a los valores propios de las ψ_k .

En la figura antes citada se destacan claramente la distinción entre las denominaciones de contravariantes y covariantes, que pueden ser aplicadas indistintamente a coordenadas o componentes vectoriales y, en consecuencia, a las tensoriales, así como el hecho de que en referencias ortogonales, no cabe hacer la distinción, pero, no obstante, teniendo en cuenta la complejidad característica de los cálculos tensoriales, sobre todo con los derivados de tensores de orden superior a dos, conviene hacer la clasificación previa siguiente:

1.^a *Tensores contravariantes*. — Son aquellos que sus componentes se transforman como productos de componentes de vectores contravariantes.

2.^a *Tensores covariantes*. — Cuando ocurre lo mismo partiendo de vectores covariantes.

3.^a *Tensores mixtos*. — Cuando entran en juego a la vez para un mismo tensor, vectores contravariantes y covariantes.

En la mayor parte de las aplicaciones se manejan tensores de segundo orden, pero como existen también tensores de ordenes superiores, hemos de dejar bien fijado, que el número de componentes de un tensor es n^q , siendo n el número de dimensiones del espacio y q el orden del tensor; si se trata de un tensor de tercer orden $q = 3$ el número de componentes será n^3 , o sea, en el espacio tridimensional 27, que resulta de multiplicar cada uno de los 9 elementos que caracterizan el tensor de segundo orden por cada una de las componentes de un vector.

El producto vectorial de dos vectores:

$$Q = [x y] = \sum x^i y^j [\vec{e}_i \vec{e}_j],$$

que como magnitud vectorial tendrá a su vez n componentes Q_k ($k = 1, 2, \dots, n$), por tanto:

$$Q_k = Q \cdot \vec{e}_k = \sum x^i y^j [\vec{e}_i \vec{e}_j] \cdot \vec{e}_k = \sum x^i y^j \varepsilon_{ijk}.$$

Los 27 elementos ε_{ijk} constituyen un tensor de tercer orden conocido con el nombre de tensor de Ricci.

Así como $[\vec{e}_i \vec{e}_k]$ representa el área de un paralelogramo;

$$[\vec{e}_i \vec{e}_k] \cdot \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk},$$

representa el volumen de un paralelepípedo, que cuando los tres índices son iguales este volumen es 0 y cuando no, es igual a ± 1 según el orden cíclico de la permutación.

Dos tensores de cualquier orden son *simétricos*, cuando al permutar dos índices de la misma varianza los elementos afectados son iguales; y *hemisimétricos*, si quedan iguales y de signo contrario, así es que un tensor de tercer orden t_{ijk} puede ser:

$$\text{Simétrico} \dots \dots t_{ijk} = t_{kij}.$$

$$\text{Hemisimétrico} \dots t_{ijk} = -t_{kij}.$$

Para mayor número de índices la regla puede ser aplicable a dos cualesquiera o a parejas determinadas, llamándose en el primer caso tensores completamente simétricos o hemisimétricos.

Concretando esta definición para un tensor de segundo orden en un espacio tridimensional y agrupando sus elementos en forma de matriz cuadrada, éstas serán simétricas o hemisimétricas, en las dos formas siguientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{23} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix},$$

El número total de elementos es en ambas matrices $3^2 = 9$, pero teniendo en cuenta los elementos iguales, este número queda reducido a 6 en la primera y 3 en la segunda; y, en general, en un espacio n -dimensional, estos números serán:

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{n(n-1)}{2},$$

y tratándose de un tensor de orden q :

$$\frac{n}{q} \binom{n-1}{q-1},$$

que para $n = q$ resulta igual a uno; esta particularidad la podemos poner de mani-

fiesto para el caso $n = q = 3$, cuyas 27 componentes totales, agrupadas en matriz cúbica, se destacan en la figura adjunta (fig. 2.^a), en la cual una de las diagonales del cubo es normal al plano de la figura; los 6 puntos correspondientes a los 6 valores no nulos, pero iguales y de signos contrarios dos a dos, definidos por la permutación de los índices 1, 2 y 3, serán:

$$a_{123} = a_{312} = a_{231} = P;$$

$$a_{321} = a_{132} = a_{213} = -P,$$

que originan una única componente del sistema $\pm P$ constituyente, de un bivector, en la dirección de la diagonal y que referida a las aristas del mismo, como ejes coordenados, sus componentes coinciden con las del producto vectorial $[x y]$, o sea:

$$P^{13} = x^1 y^2 - x^2 y^1;$$

$$P^{12} = x^1 y^3 - x^3 y^1;$$

$$P^{23} = x^2 y^3 - x^3 y^2,$$

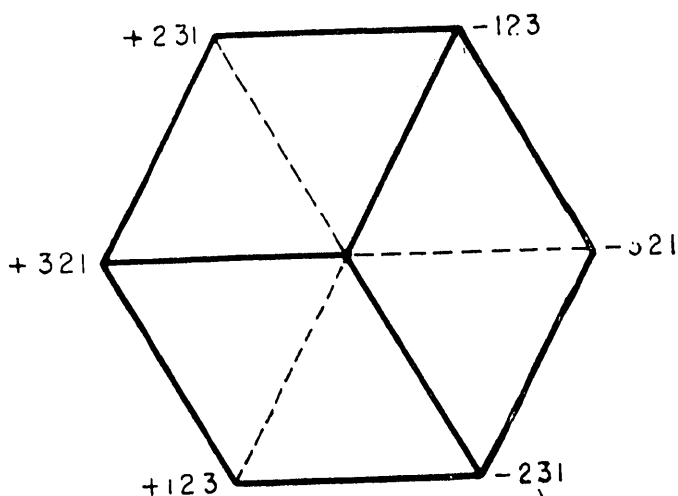


Figura 2.^a.

En un espacio bidimensional serían nulos x^3 e y^3 y quedaría como única componente:

$$P^{13} = x^1 y^2 - x^2 y^1,$$

en la dirección del desaparecido eje 23 (eje de la z), lo que pone de manifiesto el hecho de que siempre se debe contar con la existencia real de 3 dimensiones, por lo menos.

No quisiera terminar esta memoria sin decir algo sobre los campos tensoriales, última parte del trabajo que vengo realizando, del que hago referencia al principio y que por su complicación ha de ser bastante extenso, por lo que ahora sólo puede ofrecer un extracto.

Los campos tensoriales se caracterizan por ser campos puntuales, en los que cada punto es un centro de acción, alrededor del cual se propaga en todas direcciones, afectando a todos los puntos inmediatos, esto se traduce en que además del sistema de referencia, base que define sus coordenadas x^i , y^j la posición de cada punto,

ha de existir forzosamente, otros tantos sistemas de referencia locales, centrados en los mismos puntos, que definen en cada uno las componentes de un tensor euclideo que denominaremos M .

Al pasar de un punto a otro infinitamente próximo, el tensor M se incrementará en dM , lo que constituye un sistema de referencia distinto; la base e_i del primero se altera a la vez en de_i y teniendo esto lugar en todas las direcciones, la fórmula de transformación será:

$$dM = \Sigma (e_i d y^i + y^i d e_i),$$

designando por ds el cambio de posición según una dirección, tan arbitraria, como desconocida, pero que, en general, no será rectilínea, si bien la podemos considerar así, por tratarse de un desplazamiento infinitesimal, tendremos:

$$ds = \Sigma e_i d y^i,$$

y su cuadrado:

$$(ds)^2 = g_{ij} d y^i d y^j,$$

recibe el nombre de *métrica del espacio*.

Las diferenciales $d y^i$ y $d y^j$ no pueden considerarse como componentes de ds por no ser constantes e_i y e_j , por lo que denominaremos w^i, w_j a estas desconocidas componentes contravariantes y covariantes de e_i magnitudes vectoriales, que han de estar íntimamente ligadas, no sabemos cómo, con todas las curvas posibles y^i, y^j , y^k , y^l que arranquen de M , para lo cual suponemos establecidas las siguientes expresiones lineales:

$$w^j = \Gamma_{ki}^j d y^k \quad w_j = \Gamma_{kij} d y^k$$

los símbolos Γ_{ki}^j y Γ_{kij} se les conoce con el nombre de *símbolos de Cristoffel*, de 1.^a y 2.^a clase, según pertenezcan al grupo de componentes covariantes o contravariantes; como se ve, la distribución de índices y subíndices es bastante compleja y su obtención a partir de las fórmulas:

$$g_{ij} = (e_i e_j), \quad dg_{ij} = e_i d e_j + e_j d e_i,$$

es muy laboriosa, llegándose a ecuaciones diferenciales de difícil integración, máxime si tenemos en cuenta de que la forma cuadrática fundamental:

$$(ds)^2 = g_{ij} d y^i d y^j,$$

que define el elemento lineal, en el espacio euclideo ha de encajar en las referencias a base de coordenadas curvilíneas, de las que forzosamente hemos de hacer uso. La fórmula está deducida y calculada, dentro del ambiente cartesiano, mediante cálculos sobre coordenadas rectilíneas.

Ahora bien, para que esta fórmula sea aplicable a las referencias curvilíneas, sin salirnos de nuestro espacio euclideo, tenemos que reforzar el concepto de tensor fundamental, con arreglo a la expresión:

$$g_{ij} = \delta_a \xi \frac{\partial x^a}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial x^a}{\partial y^j},$$

en la que x^α, x^ξ son funciones de y^i, y^j en un sistema de referencia curvilínea; $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}$, $\frac{\partial x^\xi}{\partial y^j}$ definen las tangentes en el origen y su producto escalar en el caso de ejes rectangulares ha de ser nulo para $\alpha \neq \xi$ e igual a la unidad para $\alpha = \xi$ lo mismo que en la anterior sencilla fórmula:

$$g_{ij} = \delta_{\alpha\xi}.$$

En el caso de que las métricas euclídeas, debido a que los conceptos sobre el paralelismo que en ellas se establece, resultan incompatibles con otras métricas posibles, se puede sustituir dentro de ciertos límites y en determinadas condiciones, el tensor fundamental definido por g_{ij} por otro arbitrario G_{ij} lo más parecido a g_{ij} y menos rígido, siempre que sea real y definitivamente positivo a la vez que la expresión:

$$(ds)^2 = G_{ij} dy^i dy^j,$$

sea susceptible de que mediante cambios de coordenadas pueda transformarse en:

$$(ds)^2 = \sum (dy^i)^2,$$

Cualquiera que sean los valores de las variables, siempre podremos concebir, en cada punto M , dos espacios tangentes en un entorno, dentro del cual sean prácticamente identificables las dos métricas definidas por las expresiones:

$$(ds)^2 = g_{ij} dy^i dy^j; \quad (ds)^2 = G_{ij} dy^i dy^j.$$