

UN METODO MATRICIAL PARA RESOLVER ESTRUCTURAS POR MEDIO DEL CALCULO ELECTRONICO

Por ANTONIO NIETO LLOBET
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

El gran impacto que han tenido los ordenadores electrónicos dentro del campo técnico ha hecho que numerosos problemas cuya resolución era un proceso laborioso y sujeto a posibles errores, se hayan abordado con ayuda de estos nuevos instrumentos de cálculo.

Es más, en alguno de estos casos, quizá el problema en su planteamiento haya sido trivial, pero luego, por imposibilidad práctica de cálculo, se ha tenido que acudir a procedimientos iterativos o de relajación como única forma admisible de llegar a la solución.

Como ejemplo, podemos señalar problemas cuyo planteamiento es el establecer un simple sistema de ecuaciones lineales. Cuando el número de incógnitas es elevado, son tan difíciles de abordar, que es necesario recurrir a los métodos indirectos antes mencionados.

Dentro de este caso se encuentra el problema de conocer los esfuerzos que se crean en una estructura porticada de vanos rectangulares y barras de sección constante, al someterla a un estado de cargas.

Como veremos más adelante, el problema se puede reducir en última instancia a plantear un sistema lineal cuyas incógnitas son los giros de cada nudo y las traslaciones posibles de la estructura.

Establecido el sistema en su forma matricial $[A] \cdot [X] = [B]$ utilizando el ordenador, podemos invertir la matriz $[A]$ y aplicarla a la de términos independientes, con lo cual tendremos la matriz incógnita $[X] = [A]^{-1} \cdot [B]$.

Conocidos los giros y traslaciones, ya es fácil calcular el valor de momentos y cortantes finales, que la misma máquina se encarga de darnos si así se lo programamos.

Planteamiento de las ecuaciones.

Sea la barra de la figura 1.^a que en sus extremos tiene aplicados los momentos M_1 M_2 y las fuerzas F_3 y F_4 .

La barra se deformará y sus secciones extremas habrán girado ω_1 ω_2 y desplazado λ_3 y λ_4 respecto a la posición inicial.

Las ecuaciones que ligán todas estas magnitudes son:

$$M_1 = \frac{EI}{L} \left(4 \omega_1 + 2 \omega_2 + \frac{6}{L} \lambda_3 - \frac{6}{L} \lambda_4 \right)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L} \left(2 \omega_1 + 4 \omega_2 + \frac{6}{L} \lambda_3 - \frac{6}{L} \lambda_4 \right)$$

$$F_3 = \frac{EI}{L} \left(\frac{6}{L} \omega_1 + \frac{6}{L} \omega_2 + \frac{12}{L^2} \lambda_3 - \frac{12}{L^2} \lambda_4 \right)$$

$$F_4 = \frac{EI}{L} \left(-\frac{6}{L} \omega_1 - \frac{6}{L} \omega_2 - \frac{12}{L^2} \lambda_3 + \frac{12}{L^2} \lambda_4 \right)$$

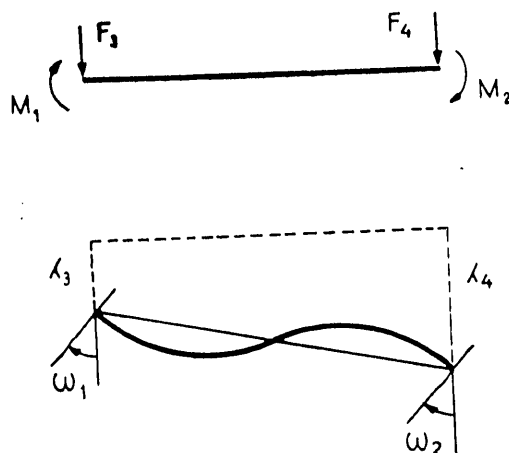


Figura 1.^a

(sentidos positivos los indicados en la figura).

Este cuerpo de fórmulas expresadas matricialmente da:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6/L & -6/L \\ 2 & 4 & 6/L & -6/L \\ 6/L & 6/L & 12/L^2 & -12/L^2 \\ -6/L & -6/L & -12/L^2 & 12/L^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$$

y que podemos indicar abreviadamente por:

$$[V]_{1234} = \frac{EI}{L} [A] [X]_{1234} \quad \frac{EI}{L} [A] = [B]$$

$$= [B] [X]_{1234}$$

Supongamos ahora la estructura de la figura 2.^a, que por su simplicidad elegimos para mostrar el método.

Numere las incógnitas posibles que se pueden presentar. (Nudos elásticamente empotrados y pisos traslacionales.)

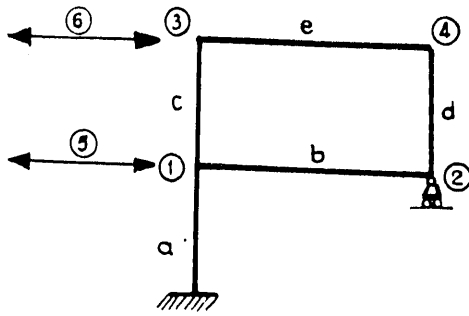


Figura 2.ª

Se tendrá:

BARRA a

$$\begin{bmatrix} M_{emp} \\ M_1 \\ F_{emp} \\ F_6 \end{bmatrix} = |B_a| \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ 0 \\ \lambda_6 \end{bmatrix};$$

BARRA b

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = |B_b| \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

BARRA c

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_3 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = |B_c| \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix};$$

BARRA d

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = |B_d| \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix};$$

BARRA e

$$\begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = |B_e| \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, cada una de estas matrices $|B_n|$ las podemos considerar como submatriz de otra matriz mayor $|B'_n|$, rellena con ceros, de orden igual al de incógnitas de la estructura, y tales que al efectuar la operación den el mismo resultado.

Por ejemplo, para la barra c:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI_c}{L_c} & 0 & 2 \frac{EI_c}{L_c} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 \frac{EI_c}{L_c} & 0 & 4 \frac{EI_c}{L_c} \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 \frac{EI_c}{L_c^2} & 0 & 6 \frac{EI_c}{L_c^2} \\ -6 \frac{EI_c}{L_c^2} & 0 & -6 \frac{EI_c}{L_c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}$$

Por tanto, nos quedará:

$$\begin{aligned} |V_a|_{123456} &= |B'_a| \times |X|_{123456} \\ |V_b|_{123456} &= |B'_b| \times |X|_{123456} \\ |V_c|_{123456} &= |B'_c| \times |X|_{123456} \\ |V_d|_{123456} &= |B'_d| \times |X|_{123456} \\ |V_e|_{123456} &= |B'_e| \times |X|_{123456} \end{aligned}$$

y sumando obtendremos:

$$\begin{bmatrix} \Sigma M_1 \\ \Sigma M_2 \\ \Sigma M_3 \\ \Sigma M_4 \\ \Sigma F_5 \\ \Sigma F_6 \end{bmatrix} = | \Sigma B' | \times \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}$$

que indicaremos por:

$$| \Sigma V |_{123456} = | \Sigma B' | \times | X |_{123456}$$

Veamos ahora el mecanismo de carga. Supongamos que la barra m que acude al nudo

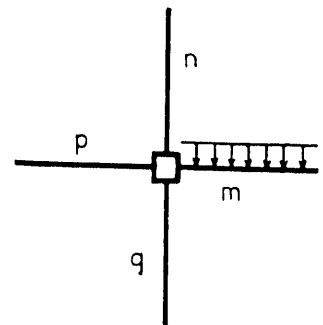


Figura 3.ª

está cargada. Si el nudo no girase, la acción del nudo sobre la barra sería $-M_0$ y la barra sobre el nudo M_0 . Soltemos el nudo; girará ω , y

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \frac{EI_c}{L_c^2} & -6 \frac{EI_c}{L_c^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \frac{EI_c}{L_c^2} & -6 \frac{EI_c}{L_c^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EI_c}{L_c^3} & -12 \frac{EI_c}{L_c^3} \\ 0 & -12 \frac{EI_c}{L_c^3} & 12 \frac{EI_c}{L_c^3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}$$

el momento M_0 se repartirá entre las cuatro barras. El estado final de momentos será:

$$\begin{aligned}M_m &= -M_0 + K_m M_0 \\M_n &= K_n M_0 \\M_p &= K_p M_0 \\M_q &= K_q M_0\end{aligned}$$

de forma que

$$K_m + K_n + K_p + K_q = 1;$$

por tanto, el hecho de un giro ω del nudo nos produce unos momentos sobre las barras, que en el concurren, que sumados son iguales y de signo contrario al momento (o suma de momentos de empotramiento perfecto de la barra (o barras) cargada que a él acuden.

Entonces, si algunas de las barras que concurren al nudo j están cargadas y conocemos los momentos de empotramiento perfecto, se verificará que:

$$\sum M_j + \sum M_j^{\text{emp}} = 0.$$

Dicho esto, la resolución de cada caso de carga es trivial. Bastará formar la matriz columna cuyos elementos sean la suma de los momentos y esfuerzos en el empotramiento perfecto, que actúan sobre cada barra. Se establecerá:

$$\sum F_{123456} + |\sum V_l^{\text{emp}}|_{123456} = 0;$$

que sustituyendo

$$\sum B' \times X_{123456} + |\sum V_l^{\text{emp}}|_{123456} = 0;$$

es decir,

$$|\sum B'| \times \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum M_1^{\text{emp}} \\ \sum M_2^{\text{emp}} \\ \sum M_3^{\text{emp}} \\ \sum M_4^{\text{emp}} \\ \sum F_5^{\text{emp}} \\ \sum F_6^{\text{emp}} \end{vmatrix} = 0,$$

con lo cual ya tenemos el sistema, cuya incógnita es X_{123456} , planteado en forma matricial.

Resuelto éste, sustituiremos en la expresión de los momentos y esfuerzos, para calcular el

valor definitivo. En las barras cargadas hay que sumar algebraicamente el valor que nos da el método con el momento o esfuerzo de empotramiento perfecto para obtener el definitivo.

Explicado así el problema, parecerá mucho más engorroso y complicado de resolver, que hecho por cualquiera de los otros métodos de relajación (Cros, Kani, etc.) ya utilizados.

Esto es verdad si intentásemos hacerlo manualmente. No, en cambio, si utilizamos ordenadores electrónicos.

La forma común a todas las barras de plantear los esfuerzos función de los giros y corrimientos incógnitas facilita la labor de cálculo desde un punto de vista puramente de ordenador. La máquina, por programa, crea las submatrices de rigideces de una forma automática. Asimismo, la propia máquina, función del estado de carga de cada barra, puede calcular los momentos y esfuerzos de empotramiento perfecto y, sumándolos, según los casos de carga, formar la matriz de los términos independientes del sistema.

Por programa, la máquina invertirá la matriz de rigideces, y aplicándola a la de términos independientes, resolverá el sistema.

Con estos valores hallados, el mismo programa se encargará de darnos el estado final de momentos y esfuerzos cortantes en los extremos de cada barra.

Ventaja de enfocar así el problema, es el poder calcular sin gran aumento de tiempo de cálculo distintas hipótesis de carga.

En efecto, puesto que el 80 por 100 del tiempo total de cálculo, la máquina lo emplea en invertir la matriz de rigideces y solamente el 20 por 100 en aplicarla a la de términos independientes una vez se haya calculado la matriz inversa, ésta nos servirá para cualquier caso de carga (sólo depende de la geometría de la estructura), y únicamente bastará en cada caso, aplicar esta matriz inversa a las distintas matrices términos independientes. (Tantas como hipótesis de carga queremos considerar.)

Se ve, pues, que con poco aumento de tiempo de cálculo podremos obtener más precisos resultados, al tantear más hipótesis.

Un programa basado en este método se ha construido para un ordenador IBM 1620, con 20.000 posiciones de memoria, y ha sido aplicado para el cálculo de diversas estructuras.