

LA ESTRUCTURA DE LOS ESPACIOS RACIONALES Y SUS CONSECUENCIAS CRISTALOMORFICAS⁽¹⁾

Por CLEMENTE SAENZ GARCIA
Profesor de Geología en la Escuela Técnica Superior
de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Este trabajo constituye un modo especial de exponer la doctrina base en la cristalografía geométrica, por su íntima relación con la teoría de los números; problema, en general, tan complejo que resulta muy difícil de exponer como tema de una conferencia, pero que presupone suficiente base para poder ahondar en el conjunto de las ciencias físicas y naturales.

Grupos aditivos de commensurabilidad.

Dado un número abstracto, o una magnitud concreta α_1 provista de un coeficiente racional y variable g_1 , el producto monomio $g_1 \alpha_1$ define el conjunto o grupo de las magnitudes commensurables con α_1 . Si se trata de números y α_1 es racional, se forma el conjunto de los números racionales, y si fuera irracional quedaría definido el de los irracionales commensurables con la base α_1 .

Llamaré raíz elemental a la raíz cuadrada, bien de un número primo, bien del producto de dos o más primos diferentes, como:

$$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \dots, \sqrt{30}, \dots, \text{etc.}$$

La raíz cuadrada de un número racional distinto de cero (***) es siempre, y de forma única, descomponible en producto de un racional por una cierta raíz elemental. La raíz elemental de un número es la misma del inverso:

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{1}{6} \sqrt{15}; \quad \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{15}.$$

Las raíces elementales pueden servir de base de unos grupos monomios, cuyo conjunto llamaremos de los números semirracionales o irracionales cuadráticos.

Dos números o magnitudes no commensurables α_1 y α_2 , tomados como bases, definen, mediante los coeficientes racionales g_1 y g_2 , el grupo binomio (bidimensional, bimodular):

$$\alpha = g_1 \alpha_1 + g_2 \alpha_2.$$

α no puede anularse si g_1 y g_2 no son cero.

Una tercera magnitud α_3 , homogénea con α_1 y α_2 , si no pertenece al grupo α , no puede anular al trinomio:

$$g_1 \alpha_1 + g_2 \alpha_2 + g_3 \alpha_3,$$

mediante una terna de coeficientes g_1 , g_2 y g_3 que sean racionales. Las bases modulares α_1 , α_2 y α_3 se dicen independientes, o no coplanarias, y el trinomio, mediante toda la posible variación racional de g_1 , g_2 y g_3 , nos crea lo que llamaremos un grupo o espacio racional trimodular (o tridimensional).

(*) Debidamente autorizados, nos honramos en insertar en nuestras páginas el texto del discurso leído por el autor en el acto de su recepción como académico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, complaciendo así, por nuestra parte, a los numerosos alumnos que fueron del autor y que no pudieron asistir, a causa de su dispersión, al citado acto.

(**) La raíz cuadrada de cero es commensurable con todas las elementales.

En general, el polinomio lineal y homogéneo de n términos,

$$\alpha = \sum g_i \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

con las g racionales y espacialmente independientes, no puede anularse si ellas no se anulan todas simultáneamente, y define un grupo de racionalidad n -módular o n -espacial.

Si se toman como bases n elementos de ese conjunto, tales que

$$\begin{aligned} \beta_1 &= g_{11} \alpha_1 + g_{12} \alpha_2 + \dots + g_{1n} \alpha_n \\ \beta_2 &= g_{21} \alpha_1 + g_{22} \alpha_2 + \dots + g_{2n} \alpha_n \\ &\dots \\ \beta_n &= g_{n1} \alpha_1 + g_{n2} \alpha_2 + \dots + g_{nn} \alpha_n \end{aligned}$$

y no es nulo el determinante $\|g_{rs}\|$, se edifica con ellas un grupo n -dimensional

$$\beta = \sum h_i \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

que coincide en todo con el α .

Todo esto sentado, podemos ya entrar en materia.

Figuras cristalomórficas planas.

Un punto P , perteneciente a la recta definida por el segmento AB (fig. 1.^a), será racional cuando la relación $PA : PB$ sea un número de esta clase. Los restantes puntos que no posean esta cualidad serán calificados de irracionales.

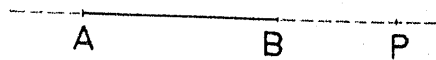


Figura 1.^a

Situando un origen de abscisas en A y un jalón unitario en B , los puntos racionales tienen abscisas racionales. El mismo conjunto de ellos se define escogiendo otros dos miembros de su pertenencia en lugar de A y de B , siempre que sean distintos entre sí.

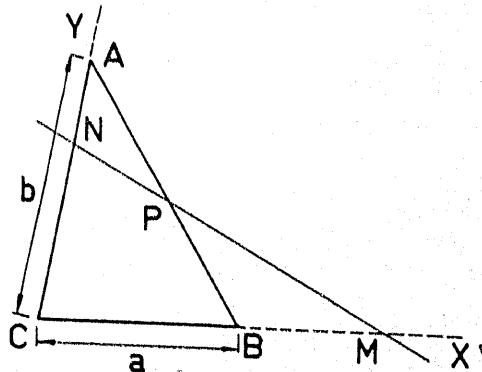


Figura 2.^a

La recta sustentadora de los puntos racionales, supuesta aligerada de los irracionales, constituye una figura discontinua y densa que, entre otras muchas particularidades, goza de coincidir con sus calcos tras de un corrimiento de valor racional.

En un triángulo ABC (fig. 2.^a), un punto P racional de la alineación AB , uni-

do a otro racional N de la AC , determina una recta NP que corta a la tercera alineación BC en un punto M , necesariamente racional, según el teorema de Menelao. Tales rectas se llaman secantes racionales del triángulo y el conjunto de ellas constituye un complejo plano y reticular, dos veces infinitamente denso, anejo a la figura fundamental.

Cualquier sistema de tres de esas rectas, si no son concurrentes o paralelas, limita un nuevo triángulo cuyo complejo de secantes es coincidente con el dado.

Tomando como ejes coordenados (oblicuos en general) las rectas CB y CA , y marcando, respectivamente, esas magnitudes las unidades de las X y de las Y , la ecuación de una secante racional o "fibra" que no pase por el origen es de la forma:

$$ux + vy = 1,$$

con u y v racionales. Se considera también racional la paralela por el origen

$$ux + vy = 0.$$

A este sistema especial de coordenadas lo titularemos "milleriano".

Se llama punto racional o "nudo" del complejo al de intersección de dos rectas racionales; tiene racionales sus dos coordenadas millerianas x e y .

El conjunto de todos los infinitos nudos forma lo que llamaremos complejo racional y bidimensional de puntos, determinado, recíprocamente, por todas las parejas posibles de coordenadas racionales.

Los complejos racionales de puntos, y lo mismo los de rectas, son figuras que se pueden superponer a sus calcos por traslación paralela, a base de que un punto racional pase a emplazarse en el puesto de otro de su misma clase.

Se llaman figuras racionales planas, puntuales o lineales, a las entresacadas de un mismo complejo. Es por este motivo figura racional cualquier triángulo, ya que se entresaca de sí mismo, y cualquier polígono que se obtenga de él mediante recortes o adherencias racionales. Estos polígonos serán llamados también cristalomórficos.

Son cuadriláteros cristalomórficos aquellos cuyas diagonales se cortan racionalmente, y, como casos particulares, todos los paralelogramos, y cuantos trapecios tengan sus dos lados no paralelos yendo a concurrir en un punto racional de uno de ellos.

Entre los polígonos regulares sólo son cristalogénicos el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular, este último como derivado del primero por cortaduras que trisecan a los lados iguales que definen aquél.

Si en un pentágono regular ordinario $ABCDE$ (fig. 3.^a) se prolongan dos lados no contiguos, AB y DC , éstos se han de encontrar en un punto P necesariamente irracional, desde el momento en que en la relación $PA : PB$ interviene la $\sqrt{5}$. Incidencias parecidas tienen lugar con el heptágono, octógono y los demás polígonos regulares de mayor número de lados.

Todos los triángulos de un mismo complejo poseen áreas conmensurables entre sí, es decir, que la relación de ellas tiene valor racional. Lo mismo ocurre para cualquier pareja de polígonos procedente de un original común.

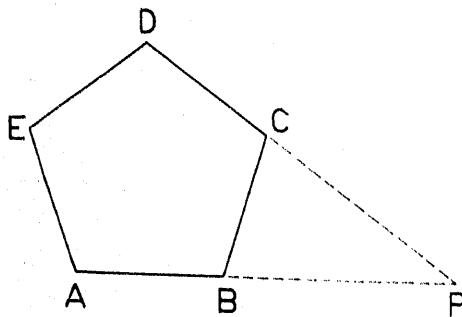


Figura 3.^a

Otra figura interesante y muy simple, que cabe entresacar de un complejo plano, es el haz racional de rectas. Entre sus particularidades figura la de ser racionales los bicocientes de cuatro rayos escogidos al azar. Se ofrecen en ellos como especialidad las conjugaciones armónicas.

Clasificación cristalométrica de triángulos y complejos.

Dado un triángulo de lados a, b, c y normas a^2, b^2, c^2 , cabe plantear el problema de buscar una terna de valores racionales g, h, k , tales que se cumpla la ecuación:

$$g a^2 + h b^2 + k c^2 = 0.$$

Puede, en primer lugar, ocurrir que existan dos de esas ternas y que no sean proporcionales entre sí, en cuyo caso se encuentran infinitas otras en las mismas condiciones, demostrándose que las tres normas son mutuamente conmensurables. Pueden ser expresables en forma monomía y con coeficientes racionales, a base de un mismo patrón de medida geoméricamente homogéneo con el cuadrado de una longitud. El triángulo se llama monomodular.

Puede, en segunda eventualidad, acontecer que no haya sino una terna (g, h, k) proporcionalmente única. Una norma cualquiera es por este motivo expresable en función lineal, homogénea y binomia con coeficientes racionales a base de las otras, y, en forma más general, todas tres a base de formas binomias de dos patrones superficiales incommensurables entre sí. El triángulo se llama entonces bimodular.

Por último, cabe también la imposibilidad de resolver la ecuación a base de coeficientes racionales. Las tres normas no sólo son mutuamente incommensurables, sino imposibles de expresar en forma binomia o monomía de menos de tres parámetros racionalmente independientes. Los triángulos son trimodulares.

Estudiando la formación de los complejos se llega presto a la conclusión de que todos los triángulos de uno de ellos pertenecen a la misma clase. Pero hay más aún.

En los triángulos de clase monomodular la relación de su área al cuadrado de un lado, o si se prefiere decir, la relación de una altura a su base, es un número, en general irracional cuadrático, que depende de una cierta raíz elemental. Esta raíz elemental constituye un parámetro que se conserva también en todo el complejo y lo caracteriza homotéticamente.

Para los triángulos de clase bimodular existe también un invariante que es la raíz elemental de la expresión

$$\Delta = -hk - kg - gh,$$

valor necesariamente positivo en los triángulos reales, y que se conserva en toda la extensión del complejo, sin llegar totalmente a caracterizarlo. Será denominado discriminante o parámetro. Eventualmente dicha raíz puede ser la unidad.

Simetría de los complejos racionales planos.

El máximo interés del estudio de los complejos racionales planos reside en el conocimiento de sus posibilidades de simetría, tanto bilátera como rotacional. De

esta última especie se presenta siempre la binaria: giro de 180° alrededor de cualquier nudo del retículo.

Tratándose de los complejos de clase trimodular, no existe ninguna otra capacidad de congruencia por desplazamiento angular aparte de la citada.

Los de clase bimodular con discriminante de raíz inexacta ofrecen dos determinadas direcciones perpendiculares de ejes de simetría que convienen únicamente a los haces racionales, sin que ellas mismas puedan pertenecer a tales figuras. Para que, contrariamente, queden integrados dichos ejes en el retículo se precisa que el parámetro discriminante tenga su raíz cuadrada exacta, y entonces por cualquier nudo del complejo pasan dos ejes ortogonales de simetría bilátera, precisamente de esas direcciones privilegiadas, sobre las que cabe instalar referencias millerianas. No hay tampoco simetría rotatoria posible de orden superior al segundo.

Los complejos unimodulares admiten, por último, infinitas parejas perpendiculares de ejes de simetría concurrentes en todos sus nudos. A partir de una cualquiera de esas parejas se puede, como antes, establecer coordenadas millerianas rectángulas, relacionándose ahora las longitudes unitarias de las x y de las y a través de una raíz elemental $|r|$, que es precisamente la del cociente de altura a base en cualquier triángulo.

Existen giros posibles alrededor de los nudos que permiten la congruencia consigo mismo del complejo. Así ocurre con el de valor θ dado por

$$\theta = \arctg \frac{2}{r-1} \quad | \quad r;$$

giro que puede ser reiterado cuantas veces se desee. (Complejos cíclicos.)

Cuando r vale 1 hay commensurabilidad directa entre ordenadas y abscisas; la red cabe tomarla rectángula y θ vale 90° (marco real). Cuando r es 3, $\theta = 60^\circ$, se tiene el tresholillo.

Respectivamente, dichos giros cierran vuelta completa al cabo de cuatro y de seis reiteraciones: simetrías cuaternaria y senaria, esta última convertible en ternaria (120°).

Hay posibilidad todavía de otros giros que no cierran vuelta por mucho que se repitan, y así ocurre, dentro del caso $r = 1$, con los que corresponden a tangentes de argumento pitagoriano:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{4}{3}, \text{ etc.}$$

Resultan simetrías de orden infinito.

Estas son siempre obligadas cuando r no vale ni 1 ni 3, limitando el número de polígonos regulares cristalográficos cerrados al cuadrado, al triángulo equilátero y al hexágono regular, conforme ya sabemos.

Singonías planas.

Los que pudiéramos llamar sistemas cristalinos del plano quedarían, sin las consideraciones expuestas, reducidos a cuatro, que llamaríamos sucesivamente cuadrático, hexagonal (con hemilatería trígona), rómbico y asimétrico. Sus polígonos más representativos lo serían, respectivamente, el cuadrado, el hexágono regular (con el triángulo equilátero), el rombo (o el rectángulo) y el romboide.

A través de la teoría de los complejos racionales planos la casuística se enriquece con dos eventualidades nuevas, distinguiendo el sistema romboidal plurisimétrico o cíclico, del monosimétrico y, dentro de la asimetría, una protosimetría (que afecta sólo a haces), de la asimetría verdadera o absoluta.

Truncadura racional de los tetraedros.

Pasando ya al espacio tridimensional, consideraremos un tetraedro fundamental $DABC$, sobre el que en adelante convendremos la notación siguiente para las aristas (fig. 4.^a):

$$\begin{array}{lll} BC = a, & CA = b, & AB = c, \\ DA = d, & DB = e, & DC = f. \end{array}$$

siendo dos a dos opuestas las de la misma columna.

Tres aristas cualesquiera, por ejemplo, las d , e y f , que concurren en el vértice D , pueden ser cortadas racionalmente por un plano (truncadura), y entonces se demuestra serlo las seis con igual carácter. El tal plano secante se apellida racional, y todos los posibles constituyen un complejo de ellos triplemente infinito, anexo al tetraedro.

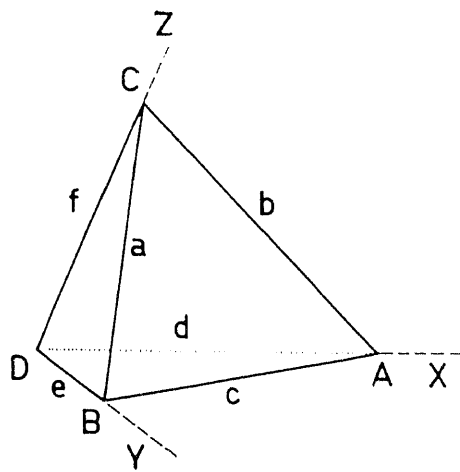


Figura 4.^a

Cada dos planos racionales no paralelos se cortan en una recta racional o fibra. Tres planos de dicha clase no paralelos forman, si concurren en una misma arista, un haz racional de su clase, y, si no lo hacen, tienen común un punto racional o nudo. Existen: el complejo de las fibras y el complejo de los nudos.

En general las figuras puntuales, rectilíneas o poliédricas se llamarán racionales si lo son sus elementos. Cuatro planos racionales no concurrentes ni paralelos cierran un tetraedro racional del complejo: cualquiera de esos tetraedros del complejo lo definen con la misma precisión que el inicial.

Todos los tetraedros y poliedros cerrados de un mismo complejo tienen volúmenes conmensurables.

El tetraedro $ABCD$ puede constituir la referencia de un sistema de coordenadas cartesianas con origen en D y ejes DA , DB y DC . Si estas tres magnitudes se toman como respectivas unidades en sus direcciones, el sistema de coordenadas se dice milleriano. Un punto racional o nudo se fija en él por tres coordenadas x , y , z de valor racional, y un plano del mismo calificativo por la ecuación:

$$ux + vy + wz = 1;$$

siendo u , v y w tres valores racionales llamados coordenadas millerianas del dicho plano.

Cuando este último pase por el origen, el segundo miembro de la ecuación anterior es cero.

Clasificación de los complejos espaciales.

Los complejos racionales del espacio cabe inicialmente ser clasificados según que los seis cuadrados de las aristas del tetraedro fundamental sean, en cuanto a mensurabilidad, independientes entre sí (hexamodulares), o bien que puedan formarse de cinco, de cuatro, de tres, de dos o de una magnitudes de similar independencia y homogéneas con las normas o cuadrado; de las aristas (dimensiones de superficies): complejos pentamodulares, tetramodulares, trimodulares, bimodulares y unimodulares.

Los pentamodulares satisfacen a una ecuación lineal y homogénea del tipo:

$$g a^2 + h b^2 + k c^2 + l d^2 + m e^2 + n f^2 = 0;$$

determinada por una sextena de valores racionales (g, h, k, l, m, n), que es, proporcionalmente hablando, única.

Los tetramodulares admiten dos sextenas distintas; los trimodulares, tres; los bimodulares, cuatro, y los unimodulares, cinco.

La matriz, cuyas filas son esas sextenas de valores g, h, k, l, m, n no debe de tener nulos todos los determinantes menores de orden máximo, si las normas a^2, b^2 , etc., han de ser independientes.

Por último, conviene hacer notar que todos los tetraedros del complejo pertenecen a la misma clase de esas seis a que pertenezca el fundamental, sin lo cual no tendría interés la división establecida.

Simetría de los complejos. Asimetría de los hexamodulares.

Los complejos espaciales coinciden consigo mismos mediante traslaciones paralelas de nudo a nudo. Además, todos estos puntos son centros de simetría que permiten una rotación de 180°, combinada con una reflexión.

Pueden ya no existir otras congruencias, pero puede también haberlas. La más sencilla de todas es la de una orientación de planos racionales que ofrezcan simetría propia, bien perfecta o imperfecta (esto es, de figuras planas o simplemente de haces de rectas). Como ello liga mediante una o dos ternas racionales a las normas de los triángulos en dichos planos contenidos, y como esas ternas no son sino sextenas con elementos nulos de tetraedros que tienen por caras a los referidos triángulos, viene a resultar que las más elementales simetrías requieren, por lo menos, pentamodularidad en el complejo espacial.

En consecuencia, los tetraedros de los complejos hexamodulares son asimétricos, y sus paralelepípedos siempre romboidales (no rombales).

Estudio de los complejos pentamodulares.

Con los coeficientes que constituyen la sextena proporcionalmente única de un complejo pentamodular, se puede formar un determinante de cuarto orden, idénticamente nulo, de gran interés. Es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} -h & -k & -l & \\ k & -k & -g & -m \\ h & g & -g & -h & -n \\ l & m & n & -l & -m & -n \end{vmatrix}$$

Todos sus adjuntos de tercer orden son iguales. Tomaremos como tipo el:

$$\rho = \begin{vmatrix} -h-k-l & k & h \\ k & -k-g-m & g \\ h & g & -g-h-n \end{vmatrix}$$

Al multiplicar la sextena por un número racional p , este determinante queda multiplicado por p^3 . Al pasar de un tetraedro a otro del complejo, ρ queda multiplicado por el cuadrado de un número racional. En todo caso si ρ fuera nulo, nulo seguiría siendo con ambas alteraciones.

Esta eventualidad de anularse ρ se demuestra que tiene lugar precisamente cuando existe en el complejo un plano, o mejor, una orientación directora de planos paralelos, en los que reina una simetría perfecta o imperfecta, con sus dos ejes correspondientes, y constituye una condición necesaria y suficiente para ello.

Conviene, cuando se verifica, considerar los seis menores principales binarios de la matriz de cuarto orden:

$$G = \begin{vmatrix} -k-g-m & g \\ -g-h-n & h \end{vmatrix}; H = \begin{vmatrix} -h-k-l & h \\ h & -g-h-n \end{vmatrix}; K = \dots \\ L = \begin{vmatrix} -h-k-l & l \\ i & -l-m-n \end{vmatrix}; M = \dots; N = \dots$$

Se demuestra que, si ρ es cero, todos seis son negativos, y las raíces elementales de ellos, previamente cambiados de signo, son una misma

$$|-G = \lambda \quad | \quad r. (*)$$

Esta raíz de r es, además, un parámetro que se conserva en todo el complejo, constituyendo su más importante característica.

La simetría es perfecta cuando r vale 1 y hay entonces, dentro de los planos de orientación especial, dos direcciones perpendiculares de fibras.

Es imperfecta la simetría en todos los otros casos, resultando imposible la perpendicularidad de fibras. El parámetro r es el mismo que se estudió en análoga eventualidad de la Cristalomorfía bidimensional.

La ecuación de la orientación de los planos directores del complejo se consigue igualando a cero la matriz de ρ , en la que previamente se ha sustituido una fila o columna por los variables x, y, z . Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ k & -k-g-m & g \\ h & g & -g-h-n \end{vmatrix} = 0.$$

No es difícil situar dentro de este plano los ejes.

En resumen, los complejos pentarracionales se clasifican en tres grupos: presimétricos, si ρ no es cero; protosimétricos, cuando ρ es cero y r no vale 1, y clinosimétricos, cuando $\rho = 0$ y $r = 1$. En este último caso existen paralelepípedos oblicuos con bases rombales y también con bases rectangulares.

(*) No constituye excepción de esta regla el hecho de que alguno de los radicando $-G, -H, \dots$, sea cero.

Complejos tetramodulares.

Las seis normas de los tetraedros incluidos en un complejo tetramodular admiten dos sextenas independientes de coeficientes racionales, tales como

$$\mathcal{S}_1 (g_1 h_1 k_1 l_1 m_1 n_1) \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_2 (g_2 h_2 k_2 l_2 m_2 n_2);$$

y todas las $\mathcal{S} = u \mathcal{S}_1 + v \mathcal{S}_2$ que resultan de componerlas linealmente tras de aplicarlas dos multiplicadores racionales arbitrarios, u y v .

En su estudio hay que considerar los dos sistemas de menores:

$$G_1, H_1, \dots, N_1 \quad \text{y} \quad G_2, H_2, \dots, N_2;$$

definidos en la forma que se hizo anteriormente, y cuatro nuevos valores que se construyen a partir de aquéllos y de los g, h , etc., y que son, a saber:

$$\begin{aligned} F_0 &= -L_1 g_1 - M_1 h_1 - N k_1 - G_1 l_1 - H_1 m_1 - K_1 n_1 = -\sum L_1 g_1, \\ F_1 &= -L_1 g_2 - M_1 h_2 = \dots = -\sum L_1 g_2, \\ F_2 &= -L_2 g_1 - M_2 h_1 = \dots = -\sum L_2 g_1, \\ F_3 &= -L_2 g_2 - M_2 h_2 = \dots = -\sum L_2 g_2. \end{aligned}$$

A base de estos últimos coeficientes, que son números racionales, se puede escribir la siguiente ecuación homogénea de tercer grado en las incógnitas p y q :

$$F_0 p^3 + 3 F_1 p^2 q + 3 F_2 p q^2 + F_3 q^3 = 0;$$

que apellidaremos característica.

Esta ecuación, con toda la variedad de casos a que se prestan las de su grado, puede, o no, tener soluciones racionales, y, si las tiene, p y q resultan ser los multiplicadores idóneos para obtener sextenas \mathcal{S} con el parámetro ternario, ρ , nulo. Es decir, para que haya, al menos, protosimetría y plano director.

Pasamos en esta breve exposición por alto la mucha riqueza específica posible, creadora de sendas modalidades de singonías que la Cristalografía común no considera, para fijar exclusiva atención en los tres casos más interesantes.

1.º Uno es el de que se encuentren tres soluciones de la característica reales y diferentes, dando lugar a tres planos directores constitutivos de un triedro al que llamaremos director. Si además las simetrías correspondientes son perfectas, es posible conseguir tres vectores no coplanarios de igual longitud, y paralelepípedos de caras rombales de tres tipos diferentes.

Los otros dos casos, tienen de común el poseer la característica indeterminada, por anulación simultánea de las cuatro F , lo que indica ya infinitud de soluciones (p, q) .

Dentro de esto puede ocurrir:

2.º G_1, H_1 y K_1 son proporcionales a G_2, H_2 y K_2 .

Se trata entonces de una multisimetría plana, esto es, que existe un sistema de planos paralelos dentro de los cuales se dan cuadrados, o hexágonos regulares, o simplemente rectángulos de normas commensurables, pero sin producirse especialmente en ningún momento una simetría bilátera especular. Clinosimetría cíclica tan solo. Hay los prismas oblicuos correspondientes.

3.º G_1, H_1 y K_1 no son proporcionales a G_2, H_2 y K_2 . Hace su primera entrada en nuestro escenario geométrico la simetría espacial bilátera con respecto a un plano de reflexión u ortosimetría, todavía, y contrariamente al subcaso anterior, sin complicación alguna en otro horizonte diferente.

La ortosimetría tetramodular es, pues, la más pura y simple manifestación de la simonía monoclinica, la del sistema monosimétrico de la Ciencia cristalográfica con sus prismas oblicuos y homoláteros de bases rombales o rectángulas.

Existen, en cuanto a orientación y dirección se refiere, el antedicho plano reflejante y el eje perpendicular de simetría rotatoria binaria. Claro es que, en el complejo, todos los planos racionales y fibras paralelos gozan de la misma propiedad.

No hay otros ángulos rectos que los del referido eje con las infinitas rectas racionales del tan citado espejo: otros perfeccionamientos implican nuevas sextenas, y se pasa ya a complejos de modularidad más reducida.

Complejos trimodulares.

Las últimas consideraciones permiten ya otear la complicación casuística de los complejos trimodulares. Tales estructuras pueden edificarse a base de tetraedros con tres sextenas independientes de coeficientes cuadráticos: esto es, adaptables a sus normas:

$$\mathcal{S}_i (g, h, k, l, m, n) : i = 1, 2, 3;$$

no siendo nula, en la matriz de 6×3 elementos que con sus coeficientes se forma, la totalidad de los determinantes menores ternarios allí contenidos.

Tres multiplicadores racionales indeterminados, p , q y r , proporcionan la sextena más general:

$$\mathcal{S} = p \mathcal{S}_1 + q \mathcal{S}_2 + r \mathcal{S}_3$$

aplicable al complejo.

No tenemos tiempo de esbozar el complicado método de búsqueda de los planos directores que pasan por un nudo (el origen por ejemplo). Conduce a la resolución en valores racionales de una ecuación característica homogénea de tercer grado en las incógnitas p , q y r .

Resulta, si se logra, una familia entera de planos directores, cuyos paralelos pasando por un punto envuelven, en general, un cono: el cono director que llamaremos.

Las especialidades más significadas de los complejos trimodulares se refieren, unas, a triedros directores, y otras, a ortosimetrías.

En el primer grupo interviene, además del triedro director, un plano también director, como consecuencia de la tercera sextena racional. Se presentan tres casos posibles según que ese plano tenga orientación truncante de las aristas del triedro, sea paralelo a una, o sea paralelo a dos.

En el primer supuesto, además de los tres vectores de normas commensurables que definen el triedro, aparece, en las mismas condiciones, un cuarto vector, y existen orientaciones planas con cuadriláteros inscriptibles en un círculo. Se puede construir un dodecaedro romboidal (fig. 5.^a), de unas caras aparejadas por paralelismo y congruencia, cuyos lados responden a las seis combinaciones binarias de los cuatro vectores.

En el caso muy especializado de que las tres aristas del triedro sean iguales, puede tomarse también igual el cuarto vector, y el dodecaedro romboidal pasa a ser rombal: los seis rombos fundamentales difieren unos de otros, no en los lados, sino en las diagonales.

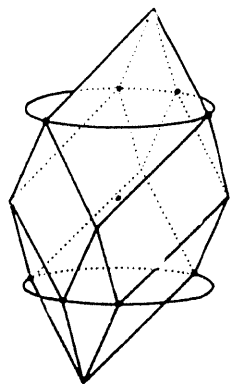


Figura 5.^a

Respecto a la segunda eventualidad apuntada, relativa a la presencia de un plano director representante de la tercera sextena racional, paralelo a una de las aristas del triedro y sin aparición del cuarto vector, acaece que dicho plano tiene simetría interna propia con dos ejes perpendiculares, uno de los cuales es la arista referida. Son dobles prismas oblicuos de base rectangular y commensurabilidad de las normas de uno de los lados de esa base con las de las aristas laterales.

La tercera eventualidad produce prismas oblicuos con simetría rotatoria plana en las bases y commensurabilidad total de normas.

En cuanto a la ortosimetría trimétrica, además del plano de reflexión y del eje binario perpendicular a él, que con canon del sistema monoclinico de la Cristalografía ya se daban en ciertos complejos dimétricos, hay que señalar la aparición de un cono director de segundo grado, al que son tangentes los planos directores comunes según generatrices racionales.

La ortoedría (sistema rómbico), que aparece por primera vez, se da cuando son racionales las cuatro generatrices principales del cono. Hay entonces tres ejes de simetría binaria mutuamente perpendiculares, y tres planos, también perpendiculares, de reflexión. Los cuadrados de las longitudes de los ejes son, en trimetría, forzosamente inconmensurables entre sí dos a dos.

Complejos bimodulares.

Los complejos tetrarracionales, es decir, aquellos cuyos tetraedros admiten en sus normas hasta cuatro sextenas independientes de coeficientes racionales, son bimodulares o dimétricos. Quiere esto decir que el cuadrado de la longitud de todos sus vectores puede expresarse en forma binómica y racional a partir de dos cualesquiera de esas normas que se prefijen, sin otra condición que la de ser inconmensurables entre sí.

La propiedad más importante de los complejos bimodulares es la de que todos sus planos sin excepción admiten terna para los triángulos que soportan. En dichos planos hay, pues, al menos, protosimetría (o sea, simetría de haces); en algunos llega a ser total con dos ejes perpendiculares de reflexión.

Otra propiedad interesante de los complejos en cuestión es la de poder ser estructurados, alrededor de cualquier nudo considerado como vértice, según conos cuyas aristas racionales tienen normas commensurables. Hay, pues, una doble infinidad de triedros directores.

Las especialidades se refieren ahora a ortosimetrías, unas veces romboidales y otras rombales u ortoédricas. En ambos casos cabe todavía la posibilidad de la existencia de un plano cíclico, esto es, de simetría interna múltiple (cuadrangular, hexagonal o de orden infinito).

En los prismas rectos dimétricos de base romboidal (monoclinicos), las normas de las alturas son forma binomia de las normas de los lados de la base, y cabe que no admitan ningún plano cíclico o que admitan dos orientaciones múltiples, que mutuamente se reflejan en la cara basal.

En los prismas rectos dimétricos de sección rombale (rómbicos u ortoédricos por lo menos) la norma de la altura es inconmensurable con la norma del lado de la sección. Puede, como antes, no tener corte cíclico, o tener dos en reflejo.

Pero puede también, y esto es lo importante, tener uno solo localizado en la di-

rección de la base o especular. La simetría espacial se hace entonces rotatoria múltiple alrededor de un eje (de una dirección más propiamente hablando) cuyo orden es tetragonal, hexagonal o infinito. He aquí la surgencia de dos conocidos sistemas cristalográficos y una nueva: la del último caso.

Complejos unimodulares.

Cinco sextenas independientes. Todas las normas de todos los vectores son commensurables. Todos los planos son cíclicos. Todas las rectas son ejes de rotación de uno u otro orden.

Existen los siguientes casos particulares:

- 1.° Todas las rectas son ejes de simetría rotatoria de orden infinito.
- 2.° Hay ejes (direcciones axiales) principales de orden rotacional senario y no los hay cuaternarios.
- 3.° Hay ejes (direcciones axiales) principales de orden cuaternario y no los hay del senario.
- 4.° Existen triedros trirectángulos formados en mixtura por ejes de ambas clases.
- 5.° Existen triedros trirectángulos formados por ejes cuaternarios. Y como secuela hay ejes senarios.

Los complejos del primer grupo representan la clase unimodular todavía rómbica (ortoédrica).

Los del segundo y tercer grupo constiuyen, respectivamente, las clases hexagonal y tetragonal de tipo unimodular.

El quinto grupo es de la máxima especialización. Son los complejos teserales o regulares. Y ha de notarse en ellos que, a diferencia de las formas cristalográficas concretas incluíbles, se habla aquí de simetría senaria y no simplemente de la trigonal, que tiene por ejemplo el cubo aisladamente.

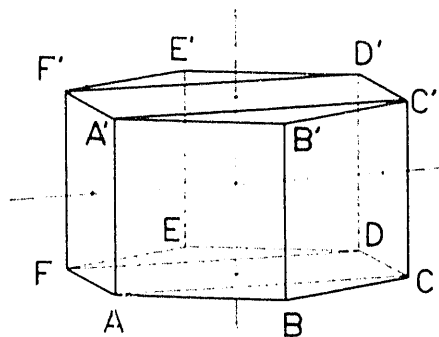


Figura 6.ª

El grupo más curioso es el cuarto, que aparece como novedad. De él pueden destacarse figuras concretas con simetría senaria o cuaternaria, pero nunca simultáneamente las dos. Un prisma recto hexagonal y regular, $ABCDEF - A'B'C'D'E'F'$ (fig. 6.ª), de altura igual al radio o lado de la base, tiene manifiesto un eje de rotación senario; si al mismo cuerpo se le mutilan los diedros BB' y EE' dejándolo reducido al prisma $ACDF - A'C'D'F'$, aparece explícito un eje cuaternario, que une los centros de las caras cuadradas $AF'F'A'$ y $CDD'C'$.

Sistemas y singonías.

Del estudio de los complejos espaciales resultan, como no podía menos de ocurrir, los seis sistemas cristalográficos, sin distinción entre holoedría y hemiedría, que se refieren en la Naturaleza, o a formas externas, o a arquitecturas atómicas íntimas.

Como singonías consideramos los subsistemas: relaciones modulares y goniométricas específicas.

Sistema regular.

El sistema, o singonía única del sistema llamado regular, es harto conocido. Puede definirse a partir del cubo, del tetraedro regular, o del tetraedro de tres caras rectángulas e isósceles y la cuarta equilátera. Puede arrancarse también de un prisma hexagonal regular, en que la relación de altura a lado de base tenga la $\sqrt{2}$ como factor elemental. Asimismo, de un ortoedro de lados commensurables.

Sistema dimórfico.

Es singonía mixta de los sistemas hexagonal y cuadrática. Se trata de la cuarta especialidad unimodular acerca de la que anteriormente ya se ha hablado. Y como figuras tipo se han descrito un prisma recto hexagonal y regular de altura igual al radio de la base, y el prisma recto cuadrático de altura relacionado con la base por la $\sqrt{3}$. Hay también tetraedros producidos por truncadura racional de estos prismas.

Sistema hexagonal.

Figuras derivables de un prisma recto hexagonal o trigonal, o de una pirámide triangular regular. Existen las siguientes singonías:

1.^a Unimodular. Derivable de un prisma hexagonal regular cuya relación de altura a base es un número racional, o un semirrational de raíz elemental distinta de $\sqrt{2}$ ó de $\sqrt{6}$.

2.^a Bimodular. Derivable de un prisma hexagonal análogo para el que las normas de altura y radio de base son inconmensurables.

Sistema cuadrático.

Puede partirse de un prisma recto de base cuadrada. Dos singonías:

1.^a Unimodular. La relación de altura o lado de base es un semirrational cuya raíz elemental no es $\sqrt{2}$, ni $\sqrt{3}$, ni $\sqrt{6}$.

2.^a Bimodular. La relación indicada no es racional ni semirrational.

Sistema rómbico u ortoédrico.

Deriva de prismas rectos de base romboidal, y mejor, de ortoedros de dimensiones d , e y f . Las singonías son:

1.^o Unimodular o policíclica. Las referidas dimensiones se relacionan semirrationalmente, y los cocientes $d : f$ y $e : f$ dependen de dos raíces elementales cuyo producto no es commensurable con las antes indicadas. 2.^o Bimodular dicíclica. 3.^o Bimo-

dular monocíclica. 4.º Bimodular acíclica. Según el número de orientaciones con simetría rotatoria plana. 5.º Trimodular de normas d^2 , e^2 y f^2 mutuamente inconmensurables. Los planos de reflexión tienen orientaciones fijas. Es una singonía acíclica.

Sistema monoclinico o monosimétrico.

Planos de reflexión y ejes binarios perpendiculares de una sola orientación y una sola dirección comunes y fijas. Prismas rombales o rectangulares con simetría bilateral. Singonías diversas con estructuras tetramodulares, trimodulares y hasta bimodulares, alguna de las últimas con planos cíclicos.

Sistemas clinosimétrico y asimétrico.

En el sistema triclinico de los libros de Cristalografía hay que distinguir en rigor: los casos de una absoluta asimetría, de la posibilidad de simetrías planas (clinosimetrías) con existencia de rombos y triángulos isósceles.

En los complejos, el sistema verdaderamente asimétrico recoge las estructuras pentamodulares o irracionales, y casos de los tetramodulares y trimodulares que se han citado y en los que las simetrías planas son de haces racionales y no de polígonos.

En la clinosimetría caben, además de los prismas oblicuos de base rombale, otros de base cuadrada, hexagonal regular, y, en general, de tipo cíclico.

Con esto damos por terminado este conato enumerativo de las estructuras racionales o complejos del espacio tridimensional común.

Cristalomorfía y complejos hiperespaciales.

Pero cabe generalizar las pautas y esbozar lo que serían, en el espacio de cuatro dimensiones y en los de más, los hipercomplejos y la Hipererystalografía.

A las figuras elementales que son el punto o monovértice adimensional, el segmento o bivértice monodimensional, el triángulo o trivértice bidimensional y el tetraedro o tetravértice tridimensional, sucede con naturalidad el pentacelio o pentavértice tetradimensional. Reside en el hiperespacio, y está limitado por cinco tetraedros, con diez caras triangulares, diez aristas y los cinco vértices citados.

En cada vértice concurren cuatro aristas que no están en el mismo hiperplano o espacio tridimensional. Tomando uno de esos vértices E como origen y los otros cuatro A, B, C, D como jalones unitarios se define un sistema de coordenadas millesiano x, y, z, t para un punto P . El punto P , es racional cuando aquellas coordenadas lo son, y los puntos racionales constituyen un complejo racional de cuatro dimensiones. Hay además rectas, planos e hiperplanos racionales. Estos últimos pueden encerrar polícelios (o sea, hiperpoliedros) racionales, figuras que constituirían al objeto de una Cristalomorfía tetradimensional.

En esta disciplina, según que las normas de las diez aristas sean conmensurables entre sí, o se puedan expresar bajo una forma polinomial con coeficientes racionales de dos, de tres, de cuatro, etc., y hasta de diez parámetros inconmensurables dos a dos, se tienen hasta diez clases de complejos y estilos de figuras.

Es de notar que, de los seis polícelios o hiperpoliedros regulares que existen, sólo cuatro, por ley de racionalidad, resultan figuras cristalomórficas, incluíbles en la clase monoparamétrica o unimodular. Son el hipercubo, y el pentacelío, hexadecacelío e icositetracelío regulares. Pero aquí, lo mismo que ocurría en el espacio bidimensional, donde el triángulo equilátero y el cuadrado eran racionalmente incompatibles, hay también dos sistemas diferentes: el del pentacelío y el de las otras regularidades o teseral. Esto frente a lo que ocurre en el espacio tridimensional común, donde el sistema cúbico es el único calificable de regular.

Es muestra particular de la diferencia de comportamientos que tienen los hiperespacios de orden par y los de orden impar. Todo ello se podría patentizar estudiando cristalomorfías de cinco, de seis y de más dimensiones, y son éstos unos temas que, con alguna mayor extensión, hemos publicado en otra monografía nuestra (*).

Quiero acabar dando espuelas a la fantasía, e imaginando unos complejos espacio-temporales reticulados, en general, con tres unidades o módulos de longitud y una cuarta o ritmo de tiempo, traducible también en distancia imaginaria mediante la ecuación de equivalencia de Minkowski.

Ignoro lo que daría de sí una relación sustentadora, sobre semejantes estructuras, de las de los cuerpos cristalinos reales, si e ritmo indicado se acompasa también a los ciclos de rotación electrónicos.

Llegamos con tal interrogante al portillo frontero del poco ameno campo, que he escogido como base de esta síntesis, que va ya resultando larga y aburrida, y no he de desperdiciar la ocasión propicia que aquél me brinda para darla remate. Sépan perdonarme los que la han leído, la molestia impuesta al hacerlo.

(*) *Pequeñas dosis de Cristalografía hiperespacial*. "Las Ciencias", año XXV, páginas 321-334 y 571-588. Madrid. 1960.