

# UN PROBLEMA DE HIDRAULICA SUBTERRANEA RESUELTO POR CALCULO ELECTRONICO

Por ALBERTO BENITEZ y JULIAN ANDRADE  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos      Licenciado en Ciencias Físicas

*Los autores exponen la solución, mediante la aplicación de las modernas técnicas de cálculo electrónico, a un problema fundamental de determinación de las constantes hidráulicas del terreno en el cálculo de captaciones subterráneas.*

## Introducción.

Uno de los progresos más notables en el conocimiento del comportamiento de las aguas subterráneas en acuíferos granulares, relativamente homogéneos, fué hecho por C. W. Theis (1), en 1935, el cual, basándose en analogías de transmisión de calor a través de medios homogéneos, descubrió la fórmula que expresa el descenso de nivel freático en un sondeo de observación en función del tiempo de duración del

(1) Theis, C. V.: "The Relation between the Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Ground Water Storage". *Trans. Am. Geophys. Union*, 1935.

bombeo, a partir de las condiciones de reposo del nivel freático. Posteriormente, C. E. Jacob llegó a obtener las mismas fórmulas basándose, exclusivamente, en conceptos hidráulicos.

La fórmula determina la posición del nivel freático en el pozo de observación *O* (ver fig. 1.<sup>a</sup>), en función del tiempo *t* en que se comienza el bombeo en el pozo de bombeo *B*, suponiendo que antes de comenzar el bombeo el acuífero está en reposo. Las hipótesis teóricas de aplicación de la fórmula de Theis son las siguientes:

1. El acuífero es homogéneo e isotrópico, de igual permeabilidad en todos sus puntos, direcciones e instantes.

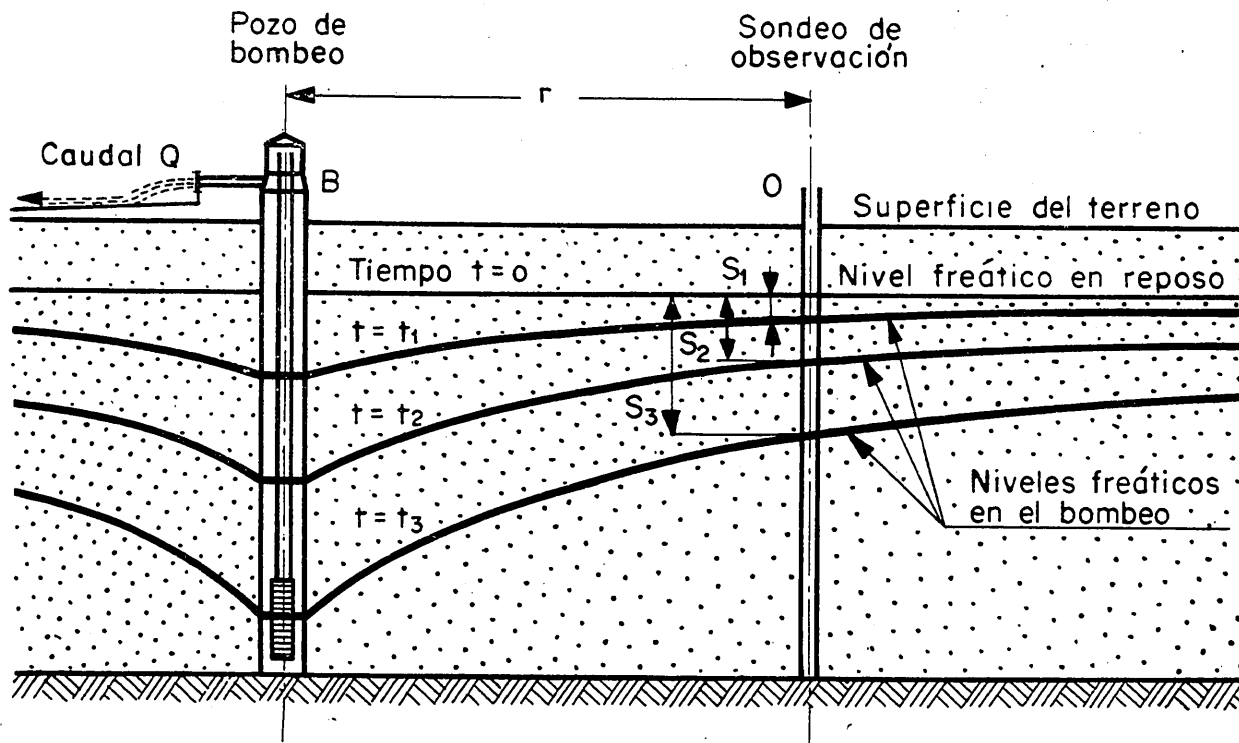


Figura 1.<sup>a</sup>

2. El acuífero se extiende indefinidamente en horizontal en todas direcciones.

3. El pozo de bombeo es de diámetro cero.

4. El pozo de bombeo atraviesa completamente el acuífero, captando sus aguas en todo su espesor, el cual se supone constante.

5. El agua bombeada se extrae instantáneamente del acuífero, no vuelve a entrar en él, y se supone que produce un descenso de nivel inmediato.

En las hipótesis bidimensionales consideradas, la ecuación diferencial que regula la variación de los niveles freáticos en función del tiempo es la (2):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad [1]$$

que en coordenadas polares planas se reduce a:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad [2]$$

cuya solución encontrada por Theis y Jacob es la siguiente:

$$s = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du: \quad [3]$$

En la cual los símbolos son:

$h_0$  = nivel freático en reposo, en el sondeo de observación 0.

$h$  = nivel freático en el sondeo 0, después de un tiempo de bombeo  $t$ , del pozo de bombeo  $B$ .

$s$  = descenso de nivel desde el reposo, después de un tiempo de bombeo  $t$ .

$Q$  = caudal bombeado, supuesto constante durante todo el ensayo de bombeo, a partir del instante  $t=0$  del comienzo del bombeo.

$T$  = transmisibilidad, es decir, el producto de la permeabilidad del acuífero por su espesor saturado.

$u = r^2 S / 4 T t$  (argumento de la integral).

$r$  = distancia del pozo de bombeo  $B$  al pozo de observación 0.

$S$  = coeficiente de almacenamiento del acuífero.

$t$  = tiempo a partir del comienzo del bombeo del acuífero, supuesto en condiciones de reposo inicialmente.

En el sistema de unidades que nuestra experiencia nos ha hecho considerar más práctico y que es el basado en metros y días con agua a 10°C. (como temperatura de referencia para tener en cuenta los efectos de variación de permeabilidad debidos a la variación de viscosidad del agua a otras temperatu-

(1) Para la deducción de esta ecuación diferencial, así como para la definición de la transmisibilidad  $T$  y coeficiente de almacenamiento  $S$ , véase, por ejemplo, H. Rouse, *Engineering Hydraulics*. John Wiley, N. Y., 1950.

ras), las unidades de cada una de las variables anteriores son:

$s$ , metros.  
 $Q$ , m.<sup>3</sup>/día.  
 $T$ , m.<sup>2</sup>/día.  
 $r$ , metros.  
 $t$ , días.  
 $S$ , adimensional.

El argumento  $u$  de la integral también es adimensional, ya que:

$$u = \frac{r^2 S}{4 T t}; \quad (u) = \frac{L^2}{L^2 \cdot T} = 1. \quad [4]$$

Como es bien sabido, la integral exponencial no tiene definición analítica. Para nuestro objeto llamaremos función de pozo  $W(u)$  a la función:

$$W(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du; \quad [5]$$

cuyo desarrollo en serie es el siguiente:

$$W(u) = -0,577216 - \ln u + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \frac{u^4}{4 \cdot 4!} + \dots \quad [6]$$

la fórmula que relaciona el descenso  $s$  con el tiempo de bombeo  $t$  (a través del argumento  $u$ ) resulta, con los nuevos símbolos:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u). \quad [7]$$

### Enunciación del problema.

Así, como una vez conocidas las características hidráulicas del acuífero  $T$  y  $S$ , puede tener un valor práctico importante el conocer la posición del nivel freático en una instalación ya construída para, por ejemplo, programar los regímenes de bombeo en relación con las necesidades de agua y las posibilidades del acuífero, la aplicación más directa de las fórmulas anteriores suele ser, mediante ensayos de bombeo, realizar el proceso contrario a efectos de cálculo del caudal obtenible. Es decir, mediante el conocimiento del caudal bombeado  $Q$  en el ensayo y parejas de valores observados de los descensos  $s$  y los tiempos  $t$ , calcular las características del acuífero, o sea, la transmisibilidad  $T$  y el coeficiente de almacenamiento  $S$ , para poder, determinar, antes de construir la captación subterránea, los valores previsibles del caudal.

El problema se concreta, por lo tanto, en determinar los valores de  $T$  y  $S$  en el sistema de ecuaciones:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u);$$

$$\frac{r^2}{t} = \frac{4T}{S} u;$$

en donde conocemos todas las restantes variables.

De la inspección de estas ecuaciones y la definición del argumento  $u$ , se comprende que no es inmediato, ni mucho menos, calcular las incógnitas  $T$  y  $S$ . Este sistema puede resolverse por ingeniosos métodos (3) gráficos desarrollados por Theis (1), Jacob (4) y Ven te Chow (5).

En el presente artículo se describe la solución al problema desarrollado por los autores, utilizando, exclusivamente, procedimientos numéricos de cálculo por aproximaciones sucesivas, sólo posibles con la aplicación de elementos electrónicos de cálculo. Estos ofrecen fabulosas perspectivas a la resolución de problemas técnicos que, hasta ahora, resultaban insolubles por procedimientos numéricos. Este programa ha sido probado y puesto a punto en un computador electrónico IBM 1620, habiendo sido originalmente preparado en el lenguaje SPS (Symbolic Programming System).

### Proceso operatorio general.

Para obtener los valores de  $S$  y  $T$  hacemos los siguientes cambios en las ecuaciones [4] y [7]:

$$C_0 = \frac{Q}{4\pi T};$$

$$C_1 = \frac{r^2 S}{4T};$$

Con lo que el argumento de la integral queda:

$$u = \frac{C_1}{t};$$

y, por lo tanto, la función:

$$s = C_0 \int_{C_1/t}^{\infty} \frac{e^{-C_1/t}}{C_1/t} d\left(\frac{C_1}{t}\right).$$

Evidentemente, si obtenemos los valores de  $C_0$  y  $C_1$  quedarán determinados los de  $S$  y  $T$ .

(3) Para una descripción detallada, con ejemplos prácticos, de la aplicación de estos métodos, véase, por ejemplo, Alberto Benítez: *Captación de Aguas Subterráneas*. Editorial Dossat, 1963.

(4) Jacob, C. E.: "Drawdown Test to Determine Effective Radius of Artesian Well", *Proc. A.S.C.E.*, vol. 72, 1946.

(5) Chow, V. T.: "On the determination of transmissibility and storage coefficients from pumping test data", *Trans. Am. Geophysical Union*, 1952.

Para determinar los valores de  $C_0$  y  $C_1$  en funciones de tipo no lineal como es la [3], se pueden seguir varios procedimientos gráficos y analíticos (6). Nosotros seguiremos el método de los mínimos cuadrados (7), generalizando el procedimiento a funciones de tipo no lineal.

Supongamos que en los tiempos  $t^0, t^0_1, \dots, t^0_n$ , hemos obtenido los siguientes valores del descenso  $s$ :  $s^0, s^0_1, s^0_2, \dots, s^0_n$ . Se trata de aproximar la función  $s^0(t^0)$  mediante la función  $s = C_0 W(u) = C_0 W(C_1, t)$ , con la condición de que el residuo:

$$R(C_0, C_1) = \sum_{i=0}^n [s^0_i - C_0 W(C_1, t_i)]^2 \quad [8]$$

sea mínimo.

Si llamamos  $C^0_0$  a un valor arbitrario de  $C_0$  y  $C^0_1$  a otro correspondiente a  $C^0_1$ , tendremos:

$$C_0 = C^0_0 + \Delta C_0;$$

$$C_1 = C^0_1 + \Delta C_1; \quad [9]$$

en donde  $\Delta C_0$  y  $\Delta C_1$ , son incrementos de los valores buscados  $C_0$  y  $C_1$ .

De las condiciones de mínimo aplicadas a [8] obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=0}^1 G_{ij} \Delta C_j = F_i, \quad i = 0, 1. \quad [10]$$

Siendo:

$$G_{ij} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial s}{\partial C_i} \frac{\partial s}{\partial C_j};$$

$$F_i = \sum_{k=0}^n [s^0_k - s] \frac{\partial s}{\partial C_i}.$$

La anotación  $\frac{\partial s}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i} C^0_0 W(C^0_i, t)$  significa

la derivada parcial respecto  $C_i$ , pero sustituyendo el conjunto de valores arbitrarios y conocidos  $C^0$ .

Para el cálculo de  $W(u)$  hemos empleado la aproximación de Hastings (8), que da el valor de esta función en el intervalo  $1 \leq u < \infty$ . Para el resto del intervalo,  $0 < u < 1$ , hemos obtenido una aproximación de tipo racional. Ambas aproximaciones nos dan ocho cifras significativas exactas.

Resolviendo el sistema de ecuaciones [10] obtenemos:

(6) Ver, J. B.: *Numerical Mathematical Analysis*, John Hopkins, 1962.

(7) Ver, por ejemplo, F. B. Hildebrand: *Introduction to Numerical Analysis*, Mc Graw-Hill, 1956.

(8) Cecil Hastings: "Approximations for Digital Computers". *Princeton University Press*, 1957.

# ORGANIGRAMA GENERAL DEL PROBLEMA

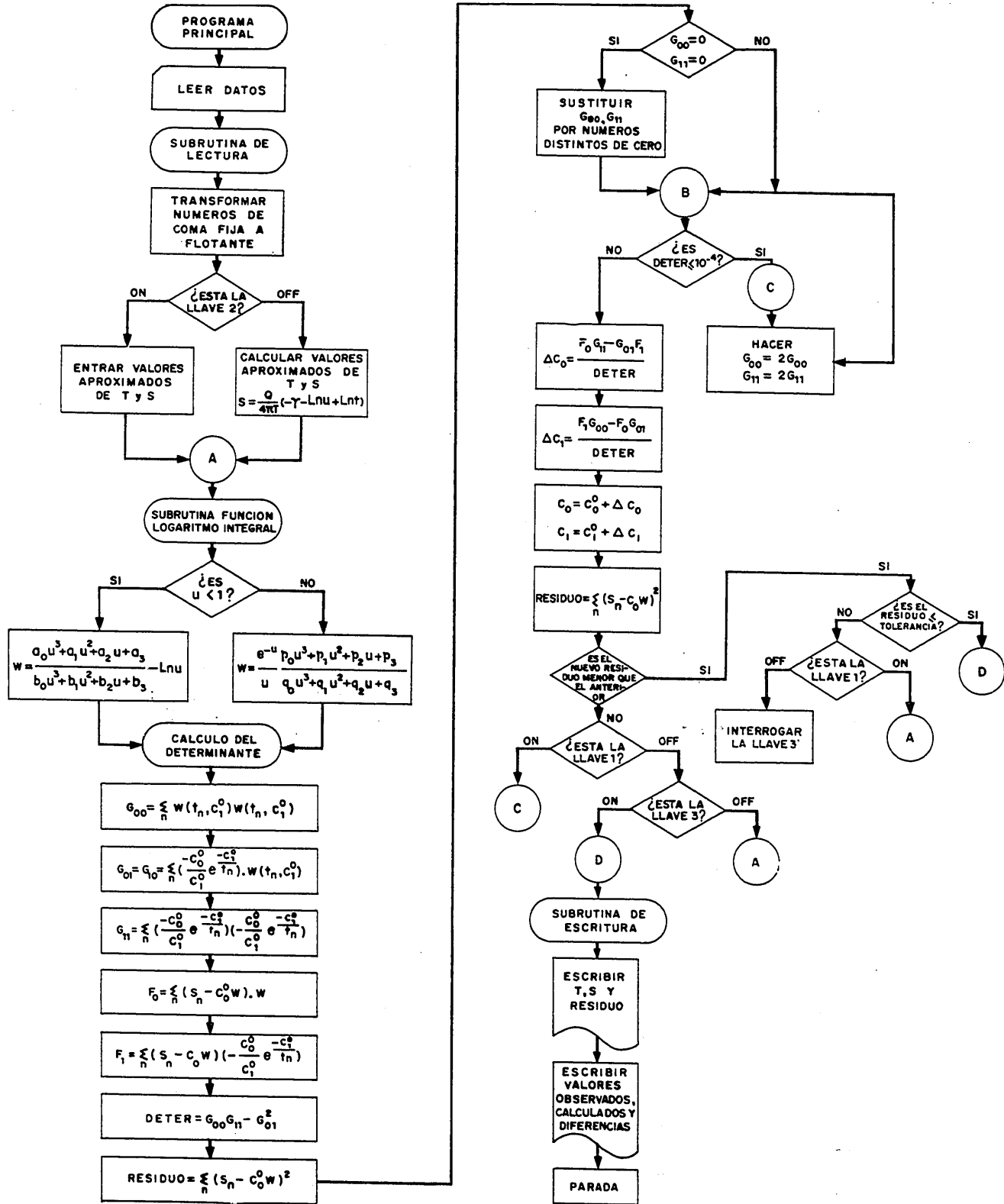


Figura 2.ª

nomos los valores de  $\Delta C_i$ , que sustituidos en [9] nos permiten obtener unos valores más aproximados de  $C_i$ . Con estos nuevos valores se repetiría el proceso hasta obtener un residuo aceptable o hasta alcanzar un número determinado de iteraciones.

### Seguridad de convergencia.

Sin embargo, este proceso no es necesariamente convergente. Levenberg (9) encontró una modificación del proceso que garantiza que en cada paso se reduce el valor de  $R$ , a menos que  $R$  sea ya un mínimo relativo.

El método es el siguiente:

1. Calcular la matriz  $G$  como antes. Si  $G$  no tiene ningún cero en la diagonal,  $G$  es entonces la matriz de la iteración. Si los tiene, reemplazarlos por números positivos arbitrarios y utilizar la matriz obtenida como matriz de iteración.

2. Si la matriz es singular (o casi singular para efectos prácticos) ir a 4. Si no, calcular  $\Delta C_i$  mediante el uso de dicha matriz.

3. Calcular  $R(C_i)$ , si  $R(C_i) < R(C^0_i)$ , entonces  $C_i$  es el nuevo valor de  $C^0_i$ . Si no, ir a 4.

4. Doblar los elementos diagonales de la matriz  $G$  para formar una nueva matriz  $G$  e ir a 2.

El proceso termina cuando  $R$  alcanza un valor aceptable, menor que una tolerancia arbitrariamente fijada.

El organigrama general del programa es el de la figura 2.<sup>a</sup>.

### Resultados.

Para los siguientes datos, tomados de un ensayo de bombeo:

$$Q = 1907,843 \text{ m}^3/\text{día}; \quad r = 68,58 \text{ m.}$$

Descensos $s$ , en metros	Tiempos $t$ , en días
0,57	0,0007
1,13	0,0036
1,40	0,0070
1,52	0,0101
1,64	0,0140
1,80	0,0202
1,89	0,0281
2,10	0,0405
2,16	0,0533
2,19	0,0632
2,37	0,0843

se obtuvieron como valores de  $T$  y  $S$ , después de cinco iteraciones:

$$T = 395,88 \text{ m}^2/\text{día};$$

$$S = 0,0000358.$$

Con estos valores de  $T$  y  $S$  se calcularon los valores de  $s$  para ver las diferencias entre los valores observados y calculados y se obtuvo:

Valores calculados de $s$ , en metros	DIFERENCIAS
0,56	$1,28 \times 10^{-2}$
1,14	$-1,03 \times 10^{-2}$
1,39	$1,02 \times 10^{-2}$
1,53	$-8,66 \times 10^{-3}$
1,65	$-1,27 \times 10^{-2}$
1,79	$7,53 \times 10^{-3}$
1,92	$-2,85 \times 10^{-2}$
2,06	$4,18 \times 10^{-2}$
2,16	$-3,30 \times 10^{-3}$
2,23	$-3,85 \times 10^{-2}$
2,34	$3,12 \times 10^{-2}$

El valor del residuo resulta:

$$\text{Residuo} = 0,00578.$$

Como se puede observar, las diferencias entre los valores observados y calculados no llegan a 5 cm. La mayor discrepancia observada corresponde a 4 centímetros.

El tiempo de cálculo para este ejemplo fué aproximadamente de diez minutos; sin embargo, con el mismo ejemplo se obtuvo en dos minutos y una iteración, como valores de  $T$  y  $S$ :

$$T = 395,89 \text{ m}^2/\text{día};$$

$$S = 0,0000365;$$

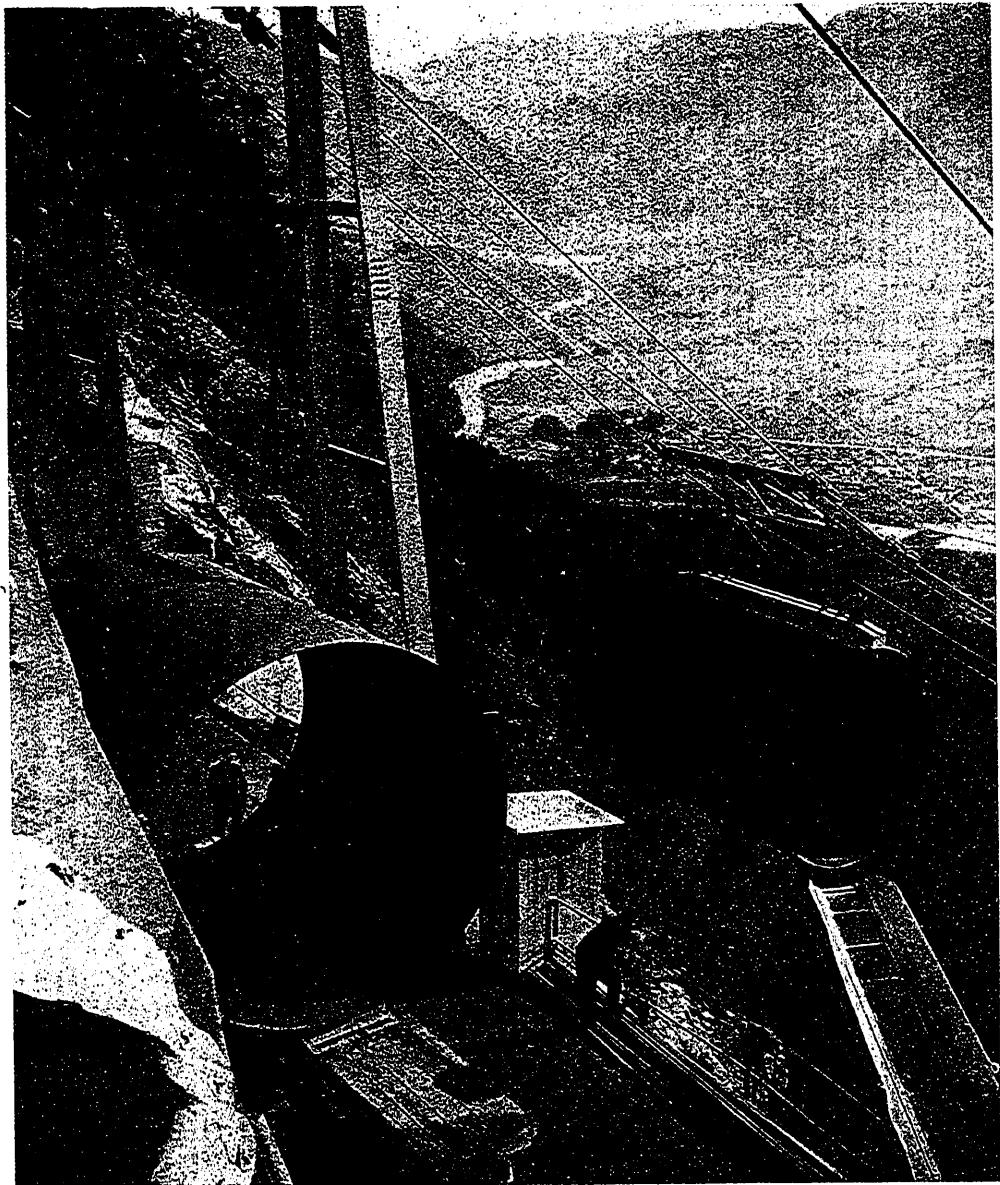
siendo el valor del residuo:

$$\text{Residuo} = 0,00638$$

El operador, mediante el empleo de las llaves de la consola del calculador electrónico, puede obtener resultados parciales o interrumpir el cálculo para introducir valores más ajustados.

En este caso hemos transformado un problema cuya resolución era exclusivamente de tipo gráfico, a un problema numérico, aprovechando para ellos las enormes posibilidades que ofrecen los métodos iterativos en los sistemas electrónicos de proceso de datos.

(9) K. Levenberg: "A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares". *Quart. Appl. Math.*, 2, 164-168 (1944).



Transporte de tubos de 5 m. de largo para el pozo blindado de un diámetro de 4,3 a 3,6 m. y 630 m. de longitud de la estación Baerenburg, escalón intermedio del sistema hidroeléctrico de Hinterrhein.