

# ASPECTOS PRACTICOS DE LA REGULARIZACION DE CURVATURAS EN FERROCARRILES

Por ANTONIO CRESPI GONZALEZ  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

*Es objeto de este estudio simplificar la teoría y la práctica de la regularización de curvaturas en vías férreas.*

*Partiendo del análisis de las fuerzas a que está sometido un vehículo cuando recorre una curva, se determinan las características que debe tener un trazado para que proporcione seguridad y confort.*

*Se llega así a la conclusión de que las transiciones con ley de curvatura en S son más racionales que las de variación lineal.*

*En consecuencia, se estudia un tipo de transición cuya ley de curvaturas es una poligonal de perfil en S. Dicha transición está constituida por arcos de clotoide de igual longitud y osculadores entre sí. Se establece a continuación la condición necesaria para que pueda admitirse en la misma, proporcionalidad entre flechas y curvaturas. Con ello el problema queda reducido a una regularización de flechas.*

*En este tipo de transición se determinan fácilmente los puntos de relleno entre piquetes. Si además se verifica que la transición tiene en los puntos de osculación la misma curvatura que la de KLEIN, de igual desarrollo e igual curvatura final, pueden adoptarse entonces las longitudes prescritas para esta última en ferrocarriles.*

## 1. GENERALIDADES

Parte de los defectos que presentan las vías son debidos a que los carriles están colocados con grandes variaciones de curvatura entre puntos relativamente próximos. Estas imperfecciones se manifiestan tanto en planta como en alzado. Sin embargo, siempre hay continuidad en la curvatura, ya que la rigidez propia del carril lo garantiza.

El problema consiste, por consiguiente, no en establecer continuidad en la curvatura, sino en conseguir que la ley que sigue dicha curvatura sea adecuada para la circulación de los trenes.

## 2. CARACTERÍSTICAS DE LA LEY DE CURVATURAS A LO LARGO DE UNA CURVA.

Los esfuerzos que se producen al recorrer un vehículo una curva, han de manifestarse progresivamente y sin alcanzar en ningún momento valores excesivos.

En el caso que estudiamos de velocidad de marcha uniforme, las fuerzas a considerar pueden reducirse a tres tipos (fig. 1.<sup>a</sup>):

Fuerza centrífuga:  $F_c$ .

Fuerzas de rotación del vehículo alrededor de un eje vertical que pasa por su centro de gravedad:  $F_v$ .

Fuerzas de rotación del vehículo alrededor de un eje longitudinal:  $F_h$ .

La fuerza centrífuga  $F_c$  actúa a lo largo de toda la curva. Para que varíe en forma continua, es preciso que varíe igualmente en forma continua la curvatura, ya que son proporcionales ambas. Esta consideración

impone la necesidad de instalar enlaces de curvatura progresiva o transiciones.

Las fuerzas  $F_v$  actúan cuando varía la curvatura, ya que sólo entonces varía la velocidad angular de giro del vehículo, es decir, no existen a lo largo de

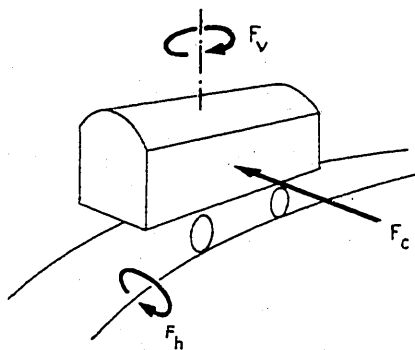


Figura 1.<sup>a</sup>

la curva circular. Son proporcionales a la variación de la curvatura, y si se desea que  $F_v$  varíe en forma continua, es necesario que la variación de la curvatura sea continua. De aquí se desprende la conveniencia de adoptar transiciones con diagrama de curvatura en S (fig. 2.<sup>a</sup>).

Finalmente,  $F_h$  actúa solamente en las zonas en que varía la pendiente de la rampa de peralte, ya que es entonces cuando varía la velocidad de giro lateral del vehículo. Por consiguiente, conviene adoptar rampas de peralte con perfil en S, con lo que puede conseguirse que  $F_h$  varíe con la necesaria continuidad (figura 3.<sup>a</sup>).

Como conviene que los peraltes y las curvaturas sean proporcionales, resultan equivalentes las condiciones de diagrama de curvatura en  $S$  para la transición y la de perfil en  $S$  para la rampa de peralte (figura 4.<sup>a</sup>).

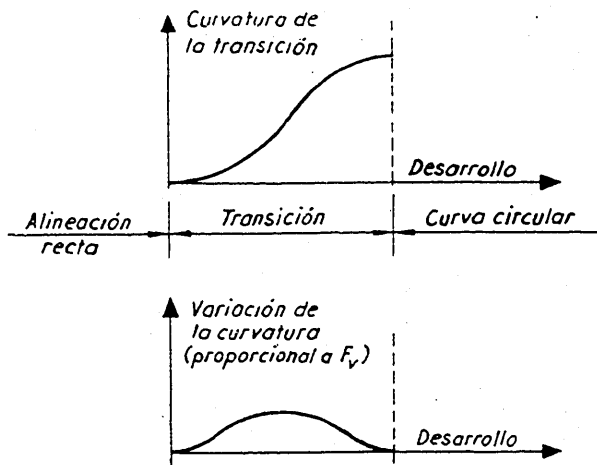


Figura 2.<sup>a</sup>

Resumiendo lo anterior, podemos decir que el trazado de la curva será adecuado cuando el diagrama de las curvaturas cumpla las condiciones siguientes (fig. 5.<sup>a</sup>):

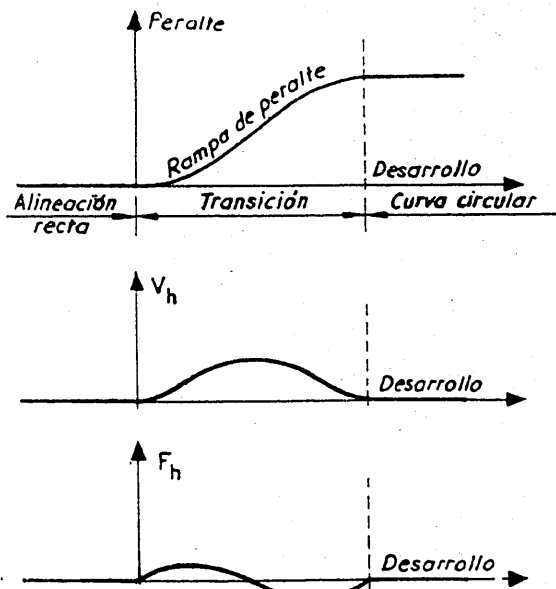


Figura 3.<sup>a</sup>

1.<sup>a</sup> Que las ordenadas no rebasen cierto valor  $C \leq \frac{1}{R}$  con lo que se limita  $F_c$ .

2.<sup>a</sup> Que la pendiente del diagrama (variación de curvatura) no pase de un valor prefijado  $C' \leq K$ . Así queda acotada  $F_v$ .

3.<sup>a</sup> Que la variación de la pendiente del diagrama esté acotada  $C'' \leq P$ , con lo que se limita el valor de  $F_h$ .

En lo que sigue vamos a sustituir el diagrama curvilíneo de la figura 5.<sup>a</sup> por otro análogo poligonal, cuyos vértices corresponden a los puntos en que han de calcularse los desplazamientos (fig. 6.<sup>a</sup>).

En este diagrama la curvatura varía linealmente entre cada dos puntos sucesivos,  $P_h$  y  $P_{h+1}$ , y puede cumplir con suficiente aproximación las condiciones establecidas anteriormente.

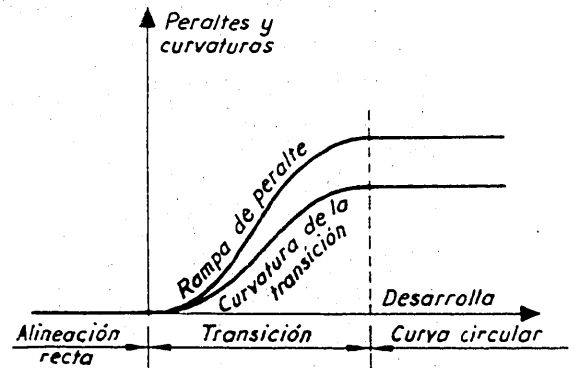


Figura 4.<sup>a</sup>

### 3. REPLANTEO DE CURVAS EN FERROCARRILES.

Para replantear curvas de nuevo establecimiento se definen analíticamente las coordenadas cartesianas, polares, etc., de los puntos más característicos, así como los intermedios necesarios de relleno. Si con esto se diese por finalizado un replanteo de vía, las imprecisiones resultantes serían inaceptables, ya que no obtendríamos suficiente regularidad en la curvatura.

Una vez establecido, pues, este replanteo, se hace preciso perfeccionarlo, y para esta segunda fase se utiliza como base de referencia el primer replanteo. El sistema consiste en esencia en calcular los desplazamientos transversales que es preciso aplicar al primer replanteo para obtener un trazado suficientemente perfecto.

Estos desplazamientos se calculan, solamente, para puntos equidistantes a lo largo de la vía y, posteriormente, se fija la posición de los puntos de relleno (figura 7.<sup>a</sup>).

Quedan de este manera establecidas las posiciones de puntos suficientemente próximos para que la propia rigidez transversal del carril asegure suficiente regularidad en la curvatura del trazado en planta.

### 4. PRIMER REPLANTEO.

Se emplea para este primer replanteo cualquier procedimiento clásico con coordenadas cartesianas,

polares o replanteando los vértices de una poligonal inscrita, etc.

### 5. RECTIFICACIÓN DEL PRIMER REPLANTEAMIENTO.

Esta segunda fase es aplicable, igualmente, a antiguos trazados para modernizarlos.

Suponemos, pues, señalada una serie de puntos

trícamente por la equidistancia  $L$  y la distancia o flecha  $f$  de cada vértice a la cuerda definida por los dos adyacentes (fig. 8.<sup>a</sup>).

Si suponemos fijos los vértices  $P_1$  y  $P_2$ , vamos a estudiar los desplazamientos que produce en los restantes vértices de la poligonal la modificación de flechas. Para ello, empecemos por considerar el caso en que solamente varía una flecha.

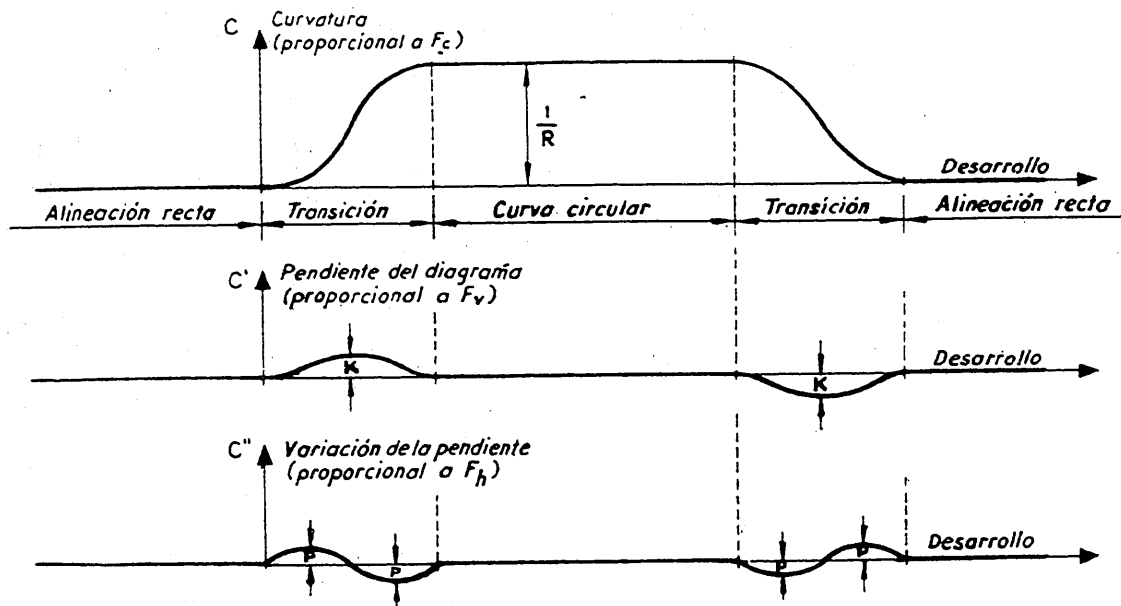


Figura 5.<sup>a</sup>

equidistantes sobre el eje de la vía provisionalmente replanteada o sobre uno de los carriles, generalmente el exterior, si se trata de una vía ya existente.

Estos puntos así definidos, deberán abarcar parte de las alineaciones rectas que comprenden la curva.

En todo lo que sigue, se hacen simplificaciones compatibles con la aproximación necesaria.

Al pasar la flecha  $f_3$  al valor  $F_3$  toda la poligonal, a partir de  $P_3$ , gira alrededor de este vértice (fig. 9.<sup>a</sup>).

El desplazamiento del vértice  $P_4$  es, aproximada-

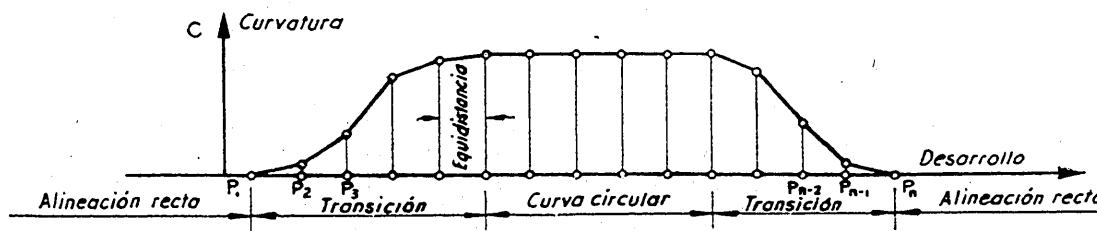


Figura 6.<sup>a</sup>

Al menos, deberá haber dos en cada alineación recta.

Esta serie de puntos define una poligonal cuyas principales propiedades se estudian seguidamente.

### 6. POLIGONALES DE LADOS IGUALES Y ÁNGULOS EXTERIORES MUY PEQUEÑOS.

Llamemos  $L$  a la distancia entre vértices consecutivos de la poligonal. Esta queda definida geomé-

mente,  $d_4 = 2(f_3 - F_3) = 2\delta_3$ , siendo  $\delta_3 = f_3 - F_3$ .

Por tratarse de una rotación, el desplazamiento de un vértice cualquiera, será proporcional a su distancia al vértice de giro y valdrá, aproximadamente, el doble del producto de la diferencia de flechas en el vértice de giro por el número de equidistancias comprendidas entre ambos. Si, a estos efectos, asignamos a la equidistancia  $L$  el valor 1 y consideramos la diferencia  $\delta$  de flechas como si fuera una fuerza, el

semidesplazamiento vendrá expresado por el momento de  $\delta$  respecto a dicho vértice:

$$\frac{d_h}{2} = \delta \times (\text{número de equidistancias comprendidas}).$$

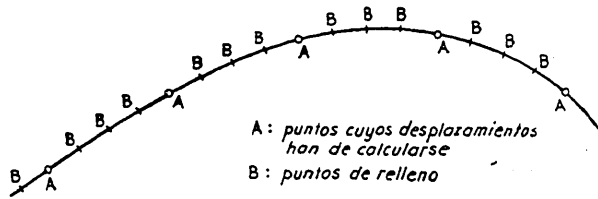


Figura 7.ª

Se considera positivo un desplazamiento cuando se produce hacia el exterior de la curva, y negativo en caso contrario.

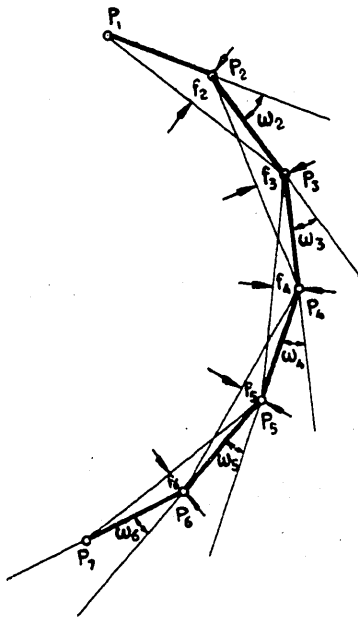


Figura 8.ª

tices que le preceden. Se toma como origen de la poligonal cualquiera de los dos lados extremos que se considere fijo.

Vamos a establecer las condiciones que han de cumplir las variaciones de flechas de una poligonal para que permanezca fijo un lado intermedio  $P_h P_{h+1}$ .

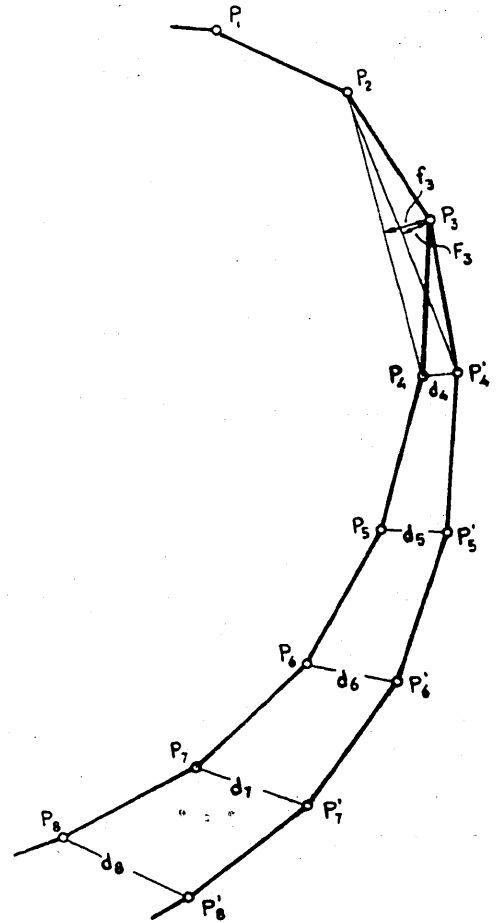


Figura 9.ª

Si son varias las flechas que se modifican, el semidesplazamiento resultante en un vértice, será la suma de los momentos, respecto a dicho vértice, de todas las diferencias de flechas existentes en los vértices

Las diferencias de flechas a considerar en este caso son las  $\delta_i$  ( $i=1,2,\dots,h$ ), ya que  $\delta_{h+1}$  sólo afecta a vértices posteriores al  $h+1$ .

Entonces, el momento de las  $\delta_i$  respecto a  $P_{h+1}$

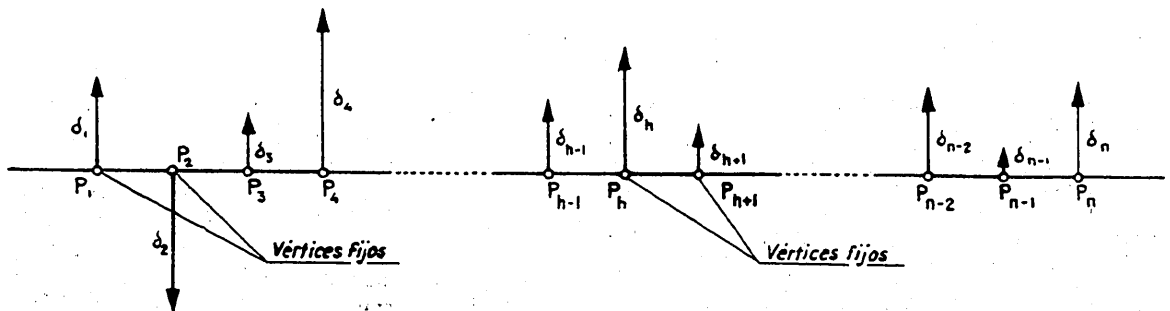


Figura 10.

ha de ser nulo e igualmente también nulo respecto a  $P_h$ , ya que  $\delta_h$ , en este segundo caso, puede tomarse o no en consideración por pasar por  $P_h$  (fig. 10).

El sistema de las  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) da momento nulo respecto a  $P_{h+1}$  y a  $P_h$ , y, por consiguiente, dicho sistema es nulo o, dicho de otra forma, las resultantes de las  $f$  y de las  $F$  son iguales y coincidentes.

### 7. CONDICIONES DE CIERRE.

Aplicando lo anterior al último lado de la poligonal  $P_{n-1}P_n$ , si ha de permanecer fijo, será necesario y suficiente que  $\Sigma f = \Sigma F$ , y que coincidan sus rectas de aplicación, es decir, que el sistema de las  $f$  sea equivalente al de las  $F$ . Estas condiciones son las llamadas de cierre de ambas poligonales, inicial y modificada.

La  $\Sigma f$  tiene un significado geométrico que vamos a determinar. En cada vértice  $P_h$  de una poligonal (figura 11) se tiene:

$$\text{sen } \alpha_h = \frac{f_h}{L} \sim \alpha_h = \frac{\omega_h}{2},$$

por suponerse que  $\alpha_h$  es muy pequeño. De aquí

$$\omega_h = \frac{2f_h}{L} \text{ y como el ángulo } \Omega \text{ de las dos alineaciones}$$

es  $\Omega = \sum_1^n \omega_h$ , resulta:

$$\Omega = \frac{2}{L} \sum_1^n f_h \text{ o bien } \sum_1^n f_h = \frac{L}{2} \Omega;$$

expresión en la que  $f_h$  y  $L$  han de medirse con la misma unidad de longitud, viniendo  $\Omega$  expresado en radianes.

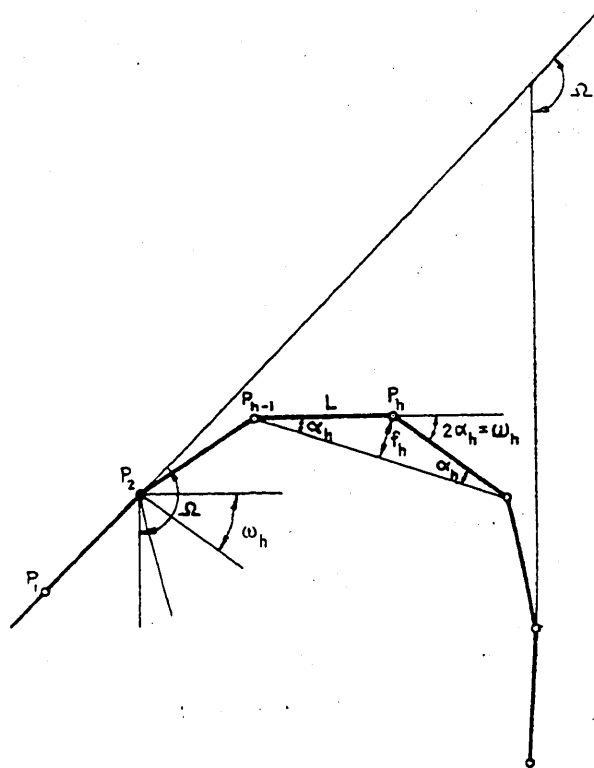


Figura 11.

Una disposición práctica para el cálculo de desplazamientos puede ser la que a continuación se indica:

Número del punto	Flechas medidas $\overline{f}$ (mm.)	Flechas calculadas $\overline{F}$ (mm.)	Diferencias $\delta = f - F$ (mm.)	Suma de diferencias $\Sigma \delta$ (mm.)	Semidesplazamientos $\frac{d}{2}$ (mm.)	Desplazamientos $\overline{d}$ (mm.)
1	$f_1$	$F_1$	$\delta_1$	$\delta_1$		$d_1$
2	$f_2$	$F_2$	$\delta_2$	$\delta_1 + \delta_2$	$\delta_1$	$d_2$
3	$f_3$	$F_3$	$\delta_3$	$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$	$2\delta_1 + \delta_2$	$d_3$
4	$f_4$	$F_4$	$\delta_4$	$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$	$3\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3$	$d_4$
5	$f_5$	$F_5$	$\delta_5$	$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5$	$4\delta_1 + 3\delta_2 + 2\delta_3 + \delta_4$	$d_5$
6	$f_6$	$F_6$	$\delta_6$			
7	$f_7$	$F_7$	$\delta_7$			
8	$f_8$	$F_8$	$\delta_8$			

Como se observa, los semidesplazamientos se obtienen efectuando las sumas segundas de las diferencias de flechas.

## 8. EVOLVENTES.

Si en una curva  $AB$  (fig. 12) se supone enrollado un hilo hasta el punto  $A$ , al desenrollarlo la parte de hilo  $PD$  despegada de la curva coincide con la tangente en  $P$ , y su longitud  $PD$  es igual a la del arco  $PA = s$  a que estaba adaptado. El extremo del hilo describe una curva  $AE$  llamada evolvente de la primera.

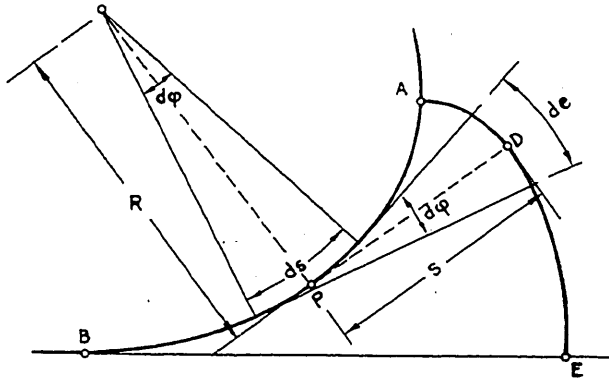


Figura 12.

Un elemento de arco de evolvente  $de$  medirá:

$$de = \overline{PD} \cdot d\varphi = s \cdot d\varphi;$$

y como:

$$R \cdot d\varphi = ds \quad d\varphi = \frac{ds}{R}.$$

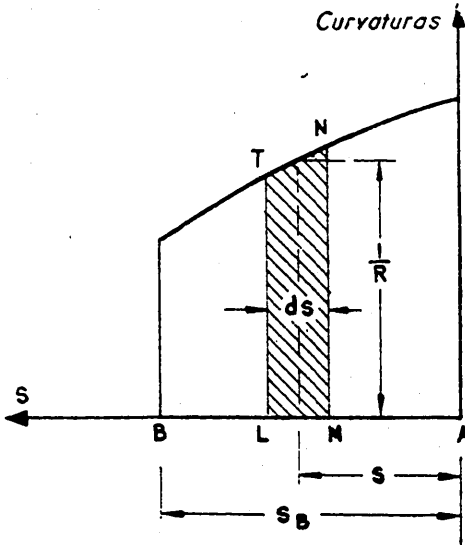


Figura 13.

sustituyendo en la primera igualdad queda  $de = s \frac{ds}{R}$

y la longitud de un arco  $\widehat{AE}$  de evolvente será:

$$\text{Arco } \widehat{AE} = \int_0^{s_{AB}} \frac{s}{R} ds;$$

Si en un sistema de ejes coordenados se toman en abscisas longitudes de arco  $s$  y en ordenadas curvaturas  $\frac{1}{R}$  (fig. 13), entonces  $\frac{1}{R} ds$  es el área del trapecio elemental  $LMNT$  y la expresión  $s \frac{1}{R} ds$  es el momento de dicha área respecto a la ordenada en  $A$ . Por consiguiente, la longitud del arco  $\widehat{AE}$  de evolvente (fig. 12) viene expresada por el momento del área comprendida entre las ordenadas de  $A$  y  $B$  con relación a la ordenada en  $A$  (fig. 13).

## 9. APLICACIÓN AL CASO DE CURVAS CON VARIACIÓN LINEAL DE CURVATURA ENTRE PUNTOS EQUIDISTANTES.

Sea una curva constituida por arcos de clotoide de igual longitud  $L$ , tangente entre sí y con una cur-

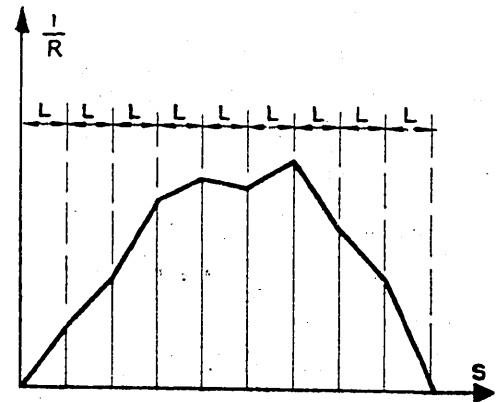


Figura 14.

vatura común en los puntos de tangencia, es decir, arcos osculadores. El diagrama de curvaturas será una poligonal (fig. 14).

Vamos a obtener el valor de la flecha  $f_p$  en el punto  $P$  de tangencia de dos arcos de clotoide  $P - I, P, P + I$  sucesivos, correspondiente a la cuerda que une los puntos  $P - I$  y  $P + I$  (fig. 15).

Si  $e_{p+1}$  y  $e_{p-1}$  son los arcos de evolvente limitados por la tangente en  $P$ , la flecha  $f_p$  es, aproximadamente:

$$f_p = \frac{1}{2} (e_{p+1} + e_{p-1}).$$

Pero según se obtuvo antes, los arcos de evolvente en función de las curvaturas son:

$$e_{p+1} = \frac{1}{2} L \cdot C_{p+1} \frac{L}{3} + \frac{1}{2} L \cdot C_p \cdot \frac{2}{3} L = \frac{L^2}{6} (C_{p+1} + 2C_p),$$

que corresponde al caso límite de arcos de una misma circunferencia (fig. 16).

Para el caso en que

$$\frac{C_{p-1} + C_{p+1}}{2} = C_p,$$

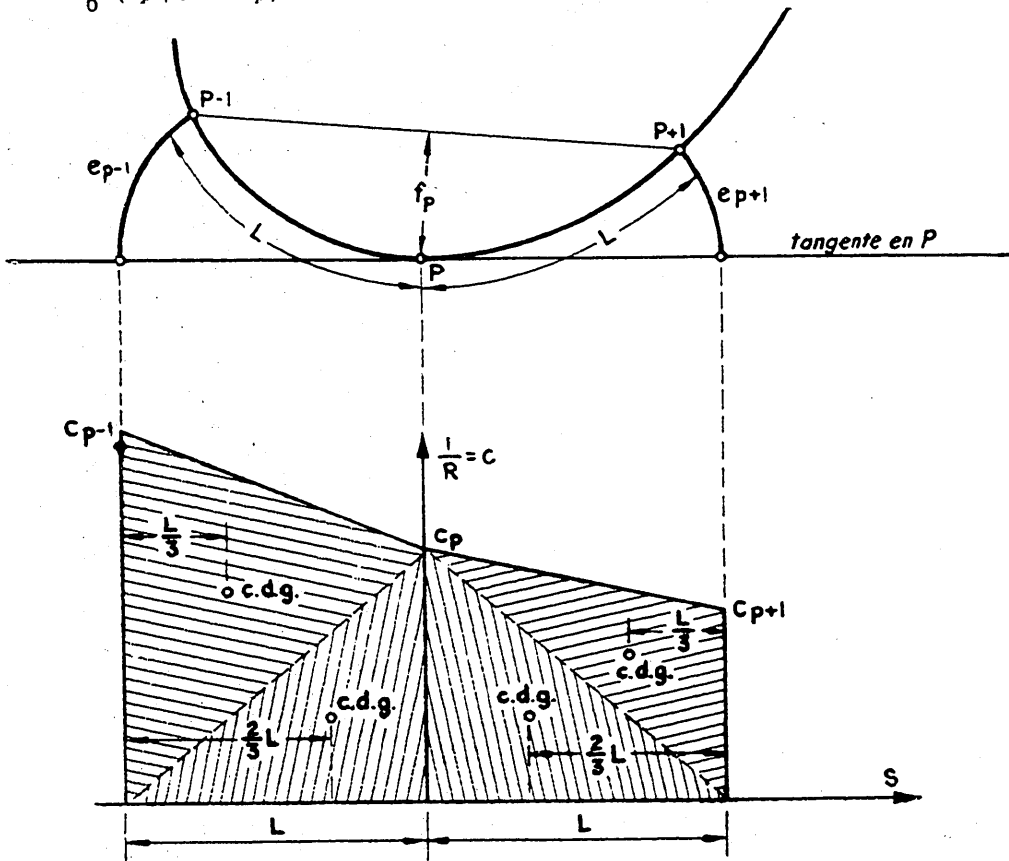


Figura 15.

y, análogamente:

$$e_{p-1} = \frac{L^2}{6} (C_{p-1} + 2C_p),$$

sustituyendo, queda:

$$f_p = \frac{L^2}{12} (C_{p+1} + 4C_p + C_{p-1}), \quad [a]$$

fórmula que da el valor de la flecha en P en función de la equidistancia L y de las curvaturas en P-1, P y P+1.

#### 10. PROPORCIONALIDAD ENTRE FLECHAS Y CURVATURAS EN EL MISMO CASO DE ARCOS DE CLOTOIDES OSCILADORES.

Para curvatura constante  $C_{p-1} = C_p = C_{p+1}$ , etcétera. Entonces la fórmula [a] se convierte en:

$$f_p = \frac{L^2}{2} C_p = \frac{L^2}{2R_p},$$

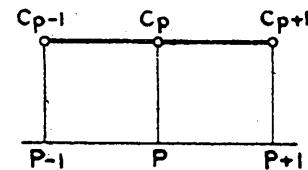


Figura 16.

(arcos de una misma clotoide) la fórmula también se reduce a:

$$f_p = \frac{L^2}{2} C_p = \frac{L^2}{2R_p}. \text{ (Fig. 17).}$$

En ambos casos, la constante de proporcionalidad entre flechas y curvaturas es  $\frac{L^2}{2}$ .

En el caso general (fig. 18) estudiado antes, no

existirá relación alguna entre  $C_{p-1}$ ,  $C_p$  y  $C_{p+1}$ , pero si se cumplen determinadas condiciones, se puede también admitir, dentro de cierta aproximación, la proporcionalidad entre flechas y curvaturas.

La expresión [a] se puede poner en la forma  $f_p = \frac{L^2}{2} C_p + T_p$  y se podrá despreciar  $T_p$  siempre

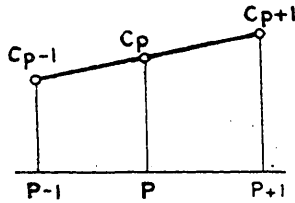


Figura 17.

que sea menor que la aproximación  $A$  con que se midan las flechas, en cuyo caso admitiremos, es:

$$f_p = \frac{L^2}{2} C_p.$$

El error que se comete al proceder así, vale:

$$T_p = \frac{L^2}{12} [C_{p+1} - C_p - (C_p - C_{p-1})], \quad [b]$$

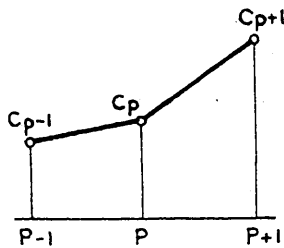


Figura 18.

expresión obtenida restando del valor dado por [a] el adoptado  $\frac{L^2}{2} C_p$ .

Si el valor de  $T_p$  para todos los puntos de osculación, es menor que la tolerancia admitida  $A$ , podremos sustituir en [b] las curvaturas por sus equivalentes:

$$C_{p+1} = \frac{2f_{p+1}}{L^2} \quad C_p = \frac{2f_p}{L^2} \quad C_{p-1} = \frac{2f_{p-1}}{L^2},$$

obteniéndose la condición:

$$\left| T_p \right| = \frac{1}{6} \left| [f_{p+1} - f_p - (f_p - f_{p-1})] \right| \leq A,$$

o bien:

$$\left| f_{p+1} - f_p - (f_p - f_{p-1}) \right| \leq 6A \quad [c]$$

Lo cual se interpreta diciendo que, cuando la variación segunda de tres flechas en puntos de osculación consecutivos, no excede de seis veces la tolerancia en la aproximación de las flechas, puede tomarse como valor de la flecha el dado por la expresión  $f = \frac{L^2}{2} C$  y dentro de este grado de aproximación, admitir proporcionalidad entre flechas y curvaturas.

Gráficamente, puede verse que equivale a decir que el círculo definido por tres puntos de osculación  $O_{p-1}$ ,  $O_p$  y  $O_{p+1}$ , tiene el mismo radio que el círculo osculador en  $O_p$  (fig. 19).

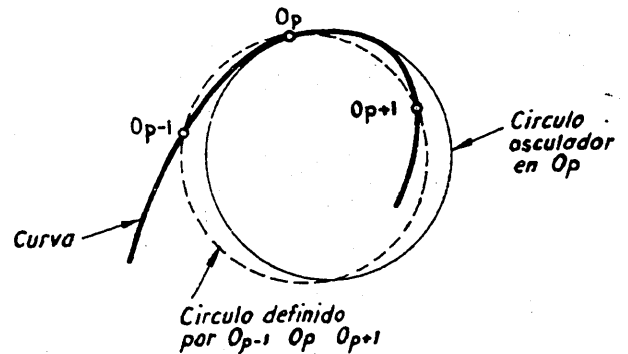


Figura 19.

Ejemplo: Para una tolerancia en las flechas de 0,5 mm.:

$$\left| f_{p+1} - f_p - (f_p - f_{p-1}) \right| \leq 6 \times 0,5 = 3 \text{ mm.}$$

es la condición a cumplir entre cada tres flechas consecutivas para que pueda admitirse la proporcionalidad entre curvaturas y flechas.

## II. REGULARIZACIÓN DE CURVATURAS.

Como se ha visto, puede admitirse proporcionalidad entre flechas y curvaturas si se cumple la condición:

$$\left| C_{p+1} - C_p - (C_p - C_{p-1}) \right| \leq \frac{12A}{L^2},$$

o bien su equivalente:

$$\left| f_{p+1} - f_p - (f_p - f_{p-1}) \right| \leq 6A.$$

que relacionan, respectivamente, las curvaturas o las

flechas en tres vértices consecutivos de la poligonal inscrita en la curva.

Así, pues, la regularización de curvaturas queda reducida a una regularización de flechas.

## 12. REGULARIZACIÓN DE FLECHAS.

Se miden sobre el terreno las flechas  $f$  de la curva a regularizar. En papel milimetrado se dibuja el diagrama de dichas flechas. Suele ser práctico tomar como escala de abscisas 1 cm.  $\equiv$  1 equidistancia, y de ordenadas la escala natural.

El problema a resolver es obtener otro diagrama de flechas  $F$  regularizado que cumpla las condiciones de cierre, equivalencia de los sistemas  $\Sigma \vec{f}$  y  $\Sigma \vec{F}$ , y que, a la escala de proporcionalidad  $\frac{f}{C} = \frac{L^2}{2}$  entre flechas y curvaturas, cumpla las condiciones que se indican en el apartado 2.

Es importante hacer observar que, dentro de la regularización buscada, conviene adoptar un diagrama de flechas  $F$  que se adapte, todo lo posible, al de las flechas  $f$  medidas en el terreno, pues de no hacerlo así, es probable que los desplazamientos a aplicar resulten excesivos para la explanación de terreno disponible.

## 13. FÓRMULAS QUE SE APLICAN.

Velocidad máxima en función del radio:

$$V(\text{Km./h.}) = 4,5 \sqrt{R} \text{ (m.)}$$

Peralte:

$$h(\text{mm}) = 9,1 \frac{V^2}{R} \quad V(\text{Km./h.}) \quad R(\text{m.})$$

El peralte no debe exceder de 160 mm.

Longitud de las curvas de transición en S:

$$l(\text{m}) \geq 8 v h \quad (f \quad v(\text{Km./h.}) \quad h(\text{m}))$$

(para  $v \geq 100 \text{ Km./h.}$ )

ó

$$l(\text{m}) \geq 800 h$$

(para  $v < 100 \text{ Km./h.}$ ),

(g)

$v$  y  $h$  se calculan por las fórmulas anteriores.

Con estas fórmulas se prepara el cuadro de la (figura 20), tomado de la publicación de RENFE "Constitución de las alineaciones curvas y su rectificación", pág 17, abril de 1961.

La ley de curvaturas de la transición de Klein es:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2R} \left[ \frac{2}{L} S - \frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{L} S \right],$$

en la que:

$R$  es el radio de la curva circular.

$L$  la longitud de la transición, y

$S$  la longitud de arco.

Si se expresan  $r$  y  $R$  en función de las flechas, queda:

$$F = F_c \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{L} S - \frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{L} S \right],$$

## VELOCIDADES MÁXIMAS, PERALTES Y LONGITUDES DE LAS C. DE T. CON RAMPA DE PERALTE EN «S» (KLEIN)

VELOCIDAD MAX. 120 KM/H				Flecha para cuerda de 20 m. en la curva circular	VELOCIDAD MAX. 100 KM/H.		
Velocidad V	Peralte h	Longitud C. de T L	Radio R		Velocidad v	Peralte h	Longitud C de T. L
Km/h	mm.	m.	m.	mm	Km/h.	mm.	m.
75	160	130	300	167	75	160	130
80	160	130	350	143	80	160	130
90	160	130	400	125	90	160	130
95	160	130	450	111	95	160	130
100	160	130	500	100	100	160	130
105	160	135	550	91	100	160	130
110	160	140	600	83	100	150	120
115	160	150	650	77	100	140	115
115	160	150	700	71	100	130	105
120	160	155	750	66	100	120	100
120	160	155	800	63	100	115	100
120	155	150	850	59	100	110	100
120	145	140	900	55	100	100	100
120	140	135	950	53	100	95	100
120	130	125	1000	50	100	90	100
120	90	120	1500	33	100	60	100
120	65	120	2000	25	100	45	100
120	55	120	2500	20	100	40	100
120	45	120	3000	17	100	30	100

Figura 20.

( $F_c$  es la flecha en el final de la transición), o bien:

$$\frac{F}{F_c} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{L} S - \frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{L} S \right].$$

Con el nomograma correspondiente se calculan fácilmente las flechas en cualquier punto de división de la transición.

## 14. AJUSTE DEL DIAGRAMA A LAS CONDICIONES DE CIERRE.

Una vez calculada la flecha del diagrama rectangular equivalente, se determina su longitud, con la condición, de que las flechas de dicho diagrama sumen  $\Sigma f$ . Después, se señala a estima el centro de gravedad de las  $f$  y, con relación a él, se centra el diagrama rectangular. Se determinan a continuación, las longitudes de las transiciones, cuyos puntos medios

se harán coincidir con los extremos del diagrama rectangular. Así, quedan ya determinadas las abscisas de los piquetes con relación al origen de las transiciones, lo que permite calcular los valores  $\frac{S}{L}$  y, con el

conviene elegirlo con brazo grande, a fin de que los incrementos de flechas correctores sean pequeños. Para facilidad de cálculo es recomendable adoptar brazos que sean múltiplos de la distancia entre pi-

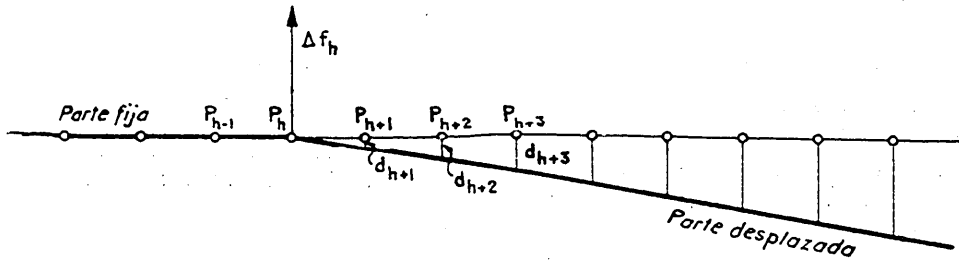


Figura 21.

auxilio del nomograma, calcular las flechas correspondientes. Una vez hecho esto, se dibuja el diagrama provisional y se calcula la suma  $\Sigma F$ . Esta suma puede no coincidir con  $\Sigma f$ , entonces la diferencia

quetos, e incrementos de flechas múltiplos de 0,5 milímetros. A veces, es ventajoso descomponer el par corrector en otros elegidos convenientemente. En el ejemplo final se hace una aplicación de ello.

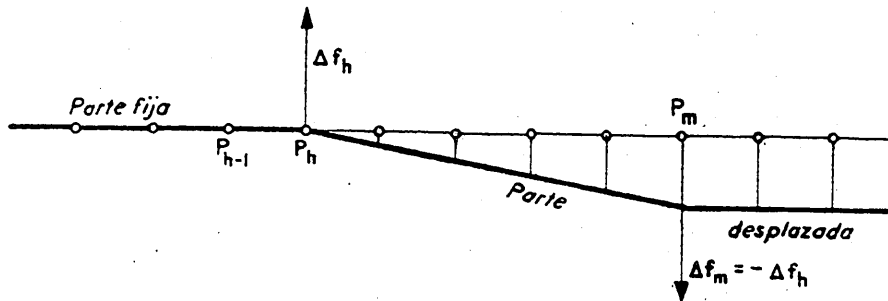


Figura 22.

$\Sigma \delta = \Sigma f - \Sigma F$  se distribuye simétricamente sobre las transiciones.

A continuación se calculan los semidesplazamientos. Si el semidesplazamiento final no es nulo, habrá

### 15. REDUCCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS EXCESIVOS.

Una vez que se han obtenido las flechas  $F$  de la curva rectificada, hay que estudiar si los despla-

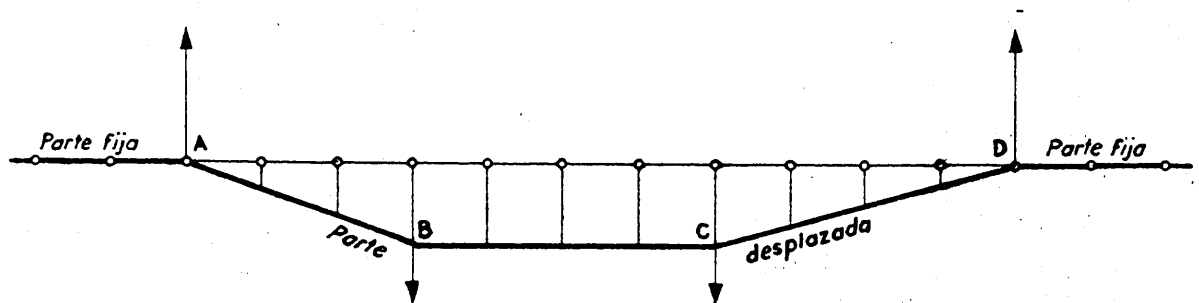


Figura 23.

que agregar a las  $F$  un par igual en valor y signo a dicho semidesplazamiento, con el convenio de considerar como pares positivos a los que dan giro en el sentido de las agujas del reloj. Este par de cierre,

mientos calculados pueden llevarse a la práctica sobre el terreno. Es muy frecuente el caso en que no es posible realizar algunos de los ripados obtenidos, bien porque se rebasaría el espacio disponible o incluso,

porque sea obligado que ciertos puntos de la vía permanezcan fijos, por ejemplo, un tramo metálico. Entonces se hace preciso modificar el diagrama de flechas calculado, de forma que las variaciones introducidas en el mismo hagan que los desplazamientos nuevamente calculados sean ya compatibles con las limitaciones del trazado.

Como norma general, para efectuar estas modificaciones en el diagrama de flechas calculadas, es recomendable alterar lo menos posible las diferencias

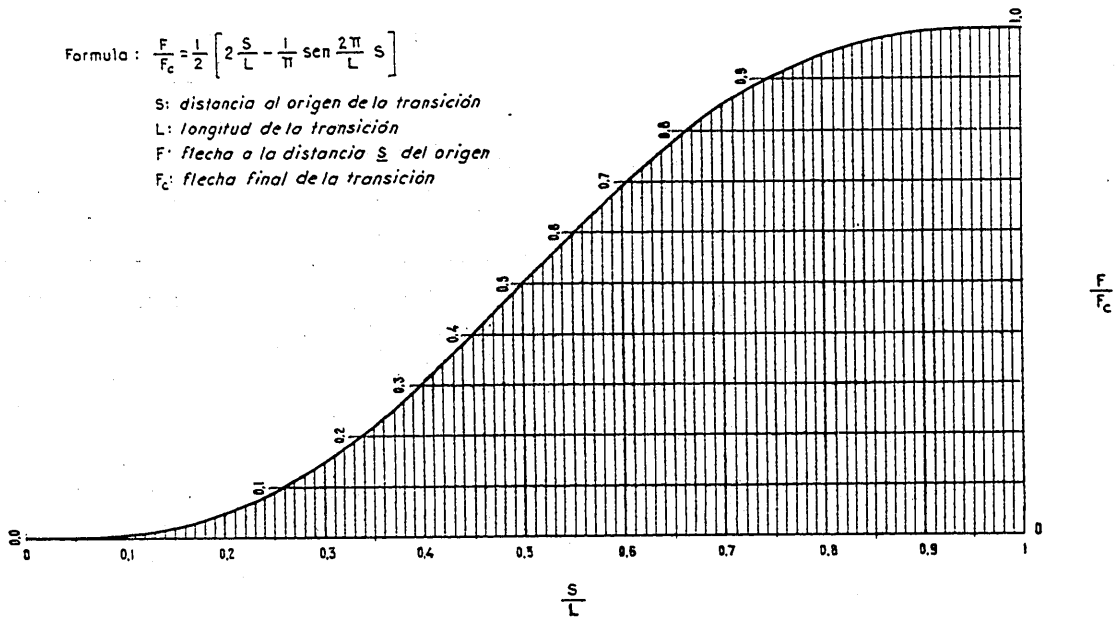
flecha en la misma cantidad, se produce en éste otro giro igual y contrario al anterior, con lo que, a partir de dicho vértice, los desplazamientos son negativos y constantes (fig. 22).

Los dos incrementos de flechas iguales y de signo contrario equivalen a un par. Si aplicásemos en otros dos vértices cualesquiera, otro par igual y contrario, restableceríamos las condiciones de cierre (figura 23) y tendríamos en la curva una zona *BC* que habríamos desplazado negativamente una canti-

### NOMOGRAMA PARA CÁLCULO DE TRANSICIONES DE KLEIN

$$\text{Formula: } \frac{F}{F_c} = \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{s}{L} - \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{L} s \right]$$

*s*: distancia al origen de la transición  
*L*: longitud de la transición  
*F*: flecha a la distancia *s* del origen  
*F<sub>c</sub>*: flecha final de la transición



existentes entre flechas consecutivas. Procediendo de esta forma, puede admitirse sin inconveniente, como definitivo, el diagrama de flechas modificado.

Para reducir un desplazamiento positivo en un vértice, hay que disminuir el momento de las diferencias de flechas respecto a dicho vértice. Conviene incrementar flechas correspondientes a vértices alejados, ya que así menores serán las modificaciones a introducir.

Esta corrección de desplazamientos excesivos, debe efectuarse en un diagrama que ya cumple las condiciones de cierre y, por consiguiente, los incrementos a aplicar a las flechas *F* han de formar sistema nulo.

Conviene corregir conjuntamente todos los desplazamientos excesivos.

Para mejor fijar las ideas hay que tener presente que, si se incrementa una flecha *F<sub>n</sub>* positivamente, supuesta fija la parte izquierda de la curva (figura 21), en el vértice correspondiente *P<sub>n</sub>* se produce un giro de la otra parte hacia el interior de la curva, es decir, desplazamientos negativos.

Si en otro vértice *P<sub>m</sub>* más avanzado se reduce la

dad constante y unas zonas *AB* y *CD* con incrementos negativos de crecimiento lineal. Si estos incrementos de flechas son apreciables, producen en el diagrama modificado unas discontinuidades inadmisibles. La forma de salvar este inconveniente consiste en distribuir uniforme y progresivamente cada uno de dichos incrementos de flechas sobre los vértices inmediatos.

### 16. REPLANTEO DE PUNTOS INTERMEDIOS ENTRE PIQUETES.

Podemos sustituir, con suficiente aproximación, una transición Klein por otra curva, cuyo diagrama de curvatura coincida con el de la transición Klein, en los puntos de división y en el que la curvatura varíe linealmente entre cada dos de dichos puntos (figura 24). Esta segunda curva estará constituida por arcos de clotoides osculadores entre sí. En esta hipótesis, la fijación de puntos intermedios entre cada dos piquetes se determina como a continuación se indica.

Sea un arco de clotoide  $MM'$  (fig. 25). Se tendrá, aproximadamente, para cualquier punto  $f = \frac{L^2}{2} C$ , en que  $f$  es la flecha correspondiente a la cuerda de longitud  $2L$ .

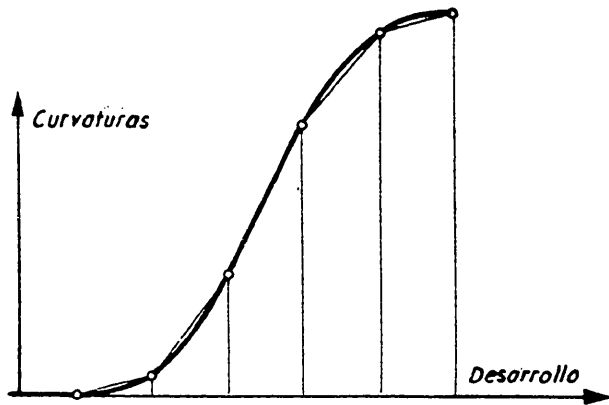


Figura 24.

Para cuerdas de longitud  $L$  las flechas quedan, evidentemente, reducidas a la cuarta parte, ya que poniendo  $\frac{L}{2}$  en lugar de  $L$  resulta:

$$f = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} C = \frac{1}{4} \cdot \frac{L^2}{2} C = \frac{f}{4} = s,$$

La ordenada  $r$ , correspondiente al cuarto de  $L$ , se puede descomponer en dos sumandos  $r = b + c$ , pero aproximadamente:

$$b = \frac{1}{4} \cdot \frac{s+d}{2} = \frac{s+d}{8} \quad \text{y} \quad c = \frac{s}{2},$$

luego:

$$r = \frac{s+d}{8} + \frac{s}{2} = \frac{5s+d}{8} = \frac{5 \frac{f_1+f_2}{8} + \frac{f_1}{4}}{8} = \frac{7f_1+5f_2}{64},$$

y análogamente:

$$t = \frac{5f_1+7f_2}{64}.$$

Resumiendo:

$r = \frac{7f_1+5f_2}{64}$	$s = \frac{f_1+f_2}{8}$	$t = \frac{5f_1+7f_2}{64}$
----------------------------	-------------------------	----------------------------

con el nomograma correspondiente se obtienen fácilmente estos valores.

#### 17. EJEMPLO DE REGULARIZACIÓN DE CURVATURAS.

Una vez calculados los desplazamientos a aplicar, es necesario medir las flechas en el nuevo trazado para obtener una regularización más precisa que la

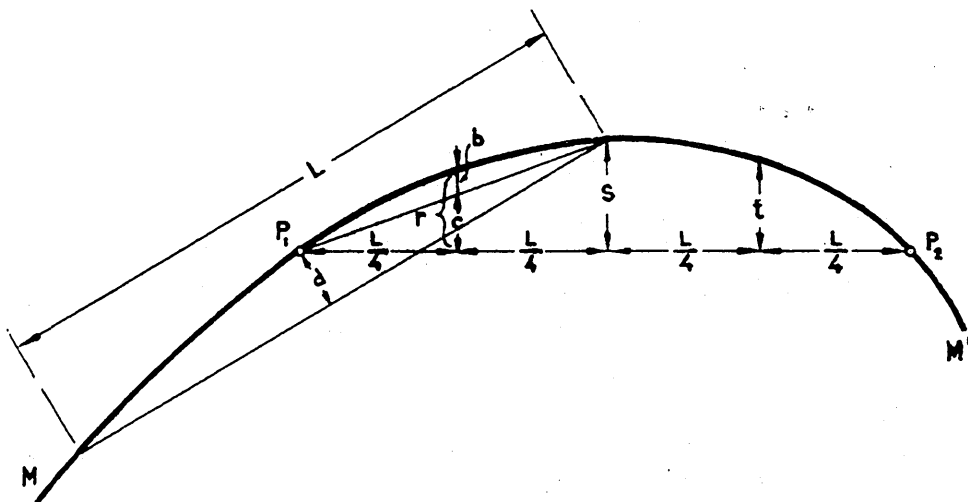


Figura 25.

luego el valor de  $s$ , correspondiente al punto medio entre  $P_1$  y  $P_2$  con cuerda  $L$ , será la cuarta parte de la semisuma de las flechas en  $P_1$  y  $P_2$  medidas con cuerda de longitud  $2L$ . Es decir:

$$s = \frac{1}{4} \cdot \frac{f_1+f_2}{2} = \frac{f_1+f_2}{8}.$$

primera y en la que los nuevos desplazamientos a aplicar serán muy pequeños con relación a los primeros. Como vemos, se procede por aproximaciones sucesivas que, normalmente, son de muy rápida convergencia.

En vías ya existentes y para el primer flechado, puede ser más sencillo adoptar como equidistancia

la longitud del carril. En el ejemplo que a continuación se desarrolla, se adopta como equidistancia la longitud de 12 m. y se flecha en este primer cálculo por el hilo exterior de la curva.

Se han medido sobre el terreno 18 flechas con cuerda de 24 m. A estima y redondeando, se supone que el diagrama rectangular equivalente tiene de flecha la media:

$$f_m = \frac{f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 + f_{10} + f_{11}}{7} =$$

$$= \frac{61,5 + 77 + 75 + 87 + 85 + 77 + 48}{7} = 73 \text{ mm.}$$

$$R = 973 \text{ m.}$$

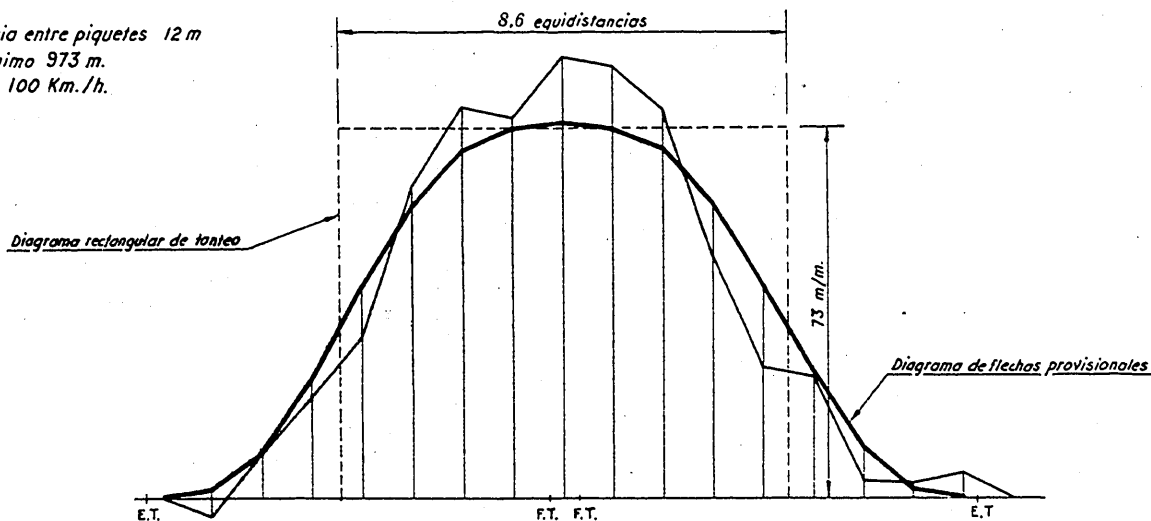
El cálculo de flechas en la transición de entrada se dispone así:

Piquetes	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{S}{L}$	0,037	0,162	0,288	0,414	0,539	0,662	0,79	0,912
$\frac{F}{F_c}$	0	0,025	0,13	0,33	0,575	0,795	0,943	0,998
F	0	2	9,5	24	42	58	69	73

Análogamente para la transición de salida:

Piquetes	9	10	11	12	13	14	15	16
F	73	69	58	42	24	9,5	2	0

Equidistancia entre piquetes 12 m  
Radio mínimo 973 m.  
Velocidad 100 Km./h.



PIQUETES	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
FLECHAS MEDIDAS	0	-4	9	20	31,5	41,5	51,5	61,5	75	87	85	77	48	26	24	3,5	3	5	0
FLECHAS CALCULADAS	0	1,5	9	23,5	41,5	57,5	68,5	73	74	73	69,5	48	26	24,5	10	2	0	0	0
DESPLAZAMIENTOS	0	0	-11	-22	-40	-78	-108	-121	-130	-113	-72	-16	+19	+21	+22	+10	0	0	0

Figura 26.

Como la suma de flechas es  $\Sigma f = 628,5$  mm. la longitud del diagrama rectangular será:

$$\frac{\Sigma f}{f_m} = \frac{628,5}{73} \sim 8,6.$$

equidistancias de 12 m.

El centro de gravedad del diagrama se estima a ojo sobre el piquete núm. 8 (fig. 26).

La longitud de transición, tipo Klein, correspondiente a  $R = 973$  m. y velocidad 100 Km./h. es, aproximadamente, de 8 equidistancias.

Si para las flechas  $F$  así obtenidas es  $\Sigma f \neq \Sigma F$ , se distribuye uniformemente la diferencia  $\Sigma \delta = \Sigma f - \Sigma F$  simétricamente respecto al centro de gravedad estimado. Normalmente convendrá hacer esta distribución sobre las flechas correspondientes a las transiciones.

En este caso:

$$\Sigma f = 628,5 \text{ mm. y } \Sigma F = 628,$$

luego:

$$\Sigma \delta = 628,5 - 628 = 0,5 \text{ mm.}$$

Si incrementamos la flecha  $F_8$  en 0,5 mm. queda  $F'_8 = 73 + 0,5 = 73,5$  mm.

Procedemos ahora al cálculo de los desplazamientos y obtenemos así un semidesplazamiento para los dos últimos piquetes de  $-23,5$  mm. Para reducirlo a cero (segunda condición de cierre) hay que agregar a las  $F$  un par corrector de valor  $-23,5$ , igual en valor y signo al semidesplazamiento obtenido.

Conviene adoptar un brazo de par grande, a fin de que sea pequeño el incremento de flechas.

Con los criterios adoptados, son pares positivos los que dan giro en el sentido de las agujas del reloj.

El par negativo  $-23,5$  mm.  $\times$  equidistancia, conviene descomponerlo en otros, de forma que, para cada uno de ellos los brazos sean múltiplos de equidistancias y los incrementos o fuerzas sean también

### CÁLCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN LOS DIFERENTES PIQUETES

N.º de Piquete	Flechas		DIFERENCIAS				SUMA DE DIFERENCIAS		SEMIDESPLAZAMIENTO		Desplazamiento en mm.
	Medidas	Medidas	Provisionales	Definitivos	Provisionales	Definitivos	Provisionales	Definitivos	Provisional	Definitivo	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-4	2	1,5		-6	-5,5	-6	-5,5	0	0	0
2	9	9,5	9		-0,5	0	-6,5	-5,5	-6	-5,5	-11
3	20	24	23,5		-4	-3,5	-10,5	-9	-12,5	-11	-22
4	31,5	42	41,5		-10,5	-10	-21	-19	-23	-20	-40
5	61,5	58	57,5	3,5		4	-17,5	-15	-46	-39	-78
6	77	69	68,5	8		8,5	-9,5	-6,5	-61,5	-54	-108
7	75	73	73	2		2	-7,5	-4,5	-71	-60,5	-121
8	87	73,5	74	13,5		13	6	+8,5	-78,5	-65	-150
9	85	73	73	12		12	18	+20,5	-72,5	-66,5	-113
10	77	69	68,5	8		7,5	26	+28	-54,5	-36	-72
11	48	58	58,5	-10		-10,5	16	+17,5	-28,5	-8	-16
12	26	42	42,5		-16	-16,5	0	+1	-12,5	+9,5	+19
13	24	24	24,5	0		-0,5	0	+0,5	-12,5	+10,5	+21
14	3,5	9,5	10		-6	-6,5	-6	-6	-18,5	+5	+10
15	5	0	0	5		5	-5	-5	-23,5	0	0
16	0	0	0	0		0	0	0	-23,5	0	0
17	0	0	0	0		0					
	628,5	628,5		53	53						

múltiplos de 0,5 mm. Una descomposición podría ser la siguiente:

$-23,5 = -2,5$  (incremento de flecha). 9 (equidistancias).

$-0,5$  (incremento de flecha). 2 (equidistancias) =  $-22,5 - 1$ .

El primer par ( $-22,5$ ) se aplica reduciendo en 0,5 mm. las flechas de los piquetes 1-2-3-4 y 5, e in-

crementando los de los números 10-11-12-13-14, 0,5 mm.

El segundo par ( $-1$ ) reduce en 0,5 mm. la flecha del número 6 e incrementa en 0,5 mm. la flecha del número 8.

Una vez aplicados estos pares de cierre calculamos los semidesplazamientos (véase cuadro).

### NUEVO CÁLCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN LOS DIFERENTES PIQUETES CON RIPADO NULO EN EL PIQUETE NÚM. 11

N.º de Piquete	Flechas		DIFERENCIAS				SUMA DE DIFERENCIAS		SEMIDESPLAZAMIENTO		Desplazamiento en mm.
	Medidas	Medidas	Provisionales	Definitivos	Provisionales	Definitivos	Provisionales	Definitivos	Provisional	Definitivo	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-4	2	1,5		-6	-5,5	-6	-5,5	0	0	0
2	9	9,5	9		-0,5	0	-6,5	-5,5	-6	-5,5	-11
3	20	24	23,5		-4	-3,5	-10,5	-9	-12,5	-11	-22
4	31,5	42	41,5		-10,5	-10	-21	-19	-23	-20	-40
5	61,5	58	57,5	3,5		4	-17,5	-15	-46	-39	-78
6	77	69	68,5	8		8,5	-9,5	-6,5	-61,5	-54	-108
7	75	73	73	2		2	-7,5	-4,5	-71	-60,5	-121
8	87	73,5	74	13,5		13	6	+8,5	-78,5	-65	-150
9	85	73	73	12		12	18	+20,5	-72,5	-66,5	-113
10	77	69	68,5	8		7,5	26	+28	-54,5	-36	-72
11	48	58	58,5	-10		-10,5	16	+17,5	-28,5	-8	-16
12	26	42	42,5		-16	-16,5	0	+1	-12,5	+9,5	+19
13	24	24	24,5	0		-0,5	0	+0,5	-12,5	+10,5	+21
14	3,5	9,5	10		-6	-6,5	-6	-6	-18,5	+5	+10
15	5	0	0	5		5	-5	-5	-23,5	0	0
16	0	0	0	0		0	0	0	-23,5	0	0
17	0	0	0	0		0					
	628,5	628,5		53	53						

Si, por ejemplo, el punto 11 fuera preciso que permaneciese fijo, habría que anular el correspondiente desplazamiento obtenido ( $-16$  mm.). Esto puede conseguirse agregando antes del punto 11 un par de valor  $-8 = -\frac{16}{2}$  y otro par de valor 8 después de dicho punto.

El par negativo  $-8$  se aplica según la distribución siguiente:

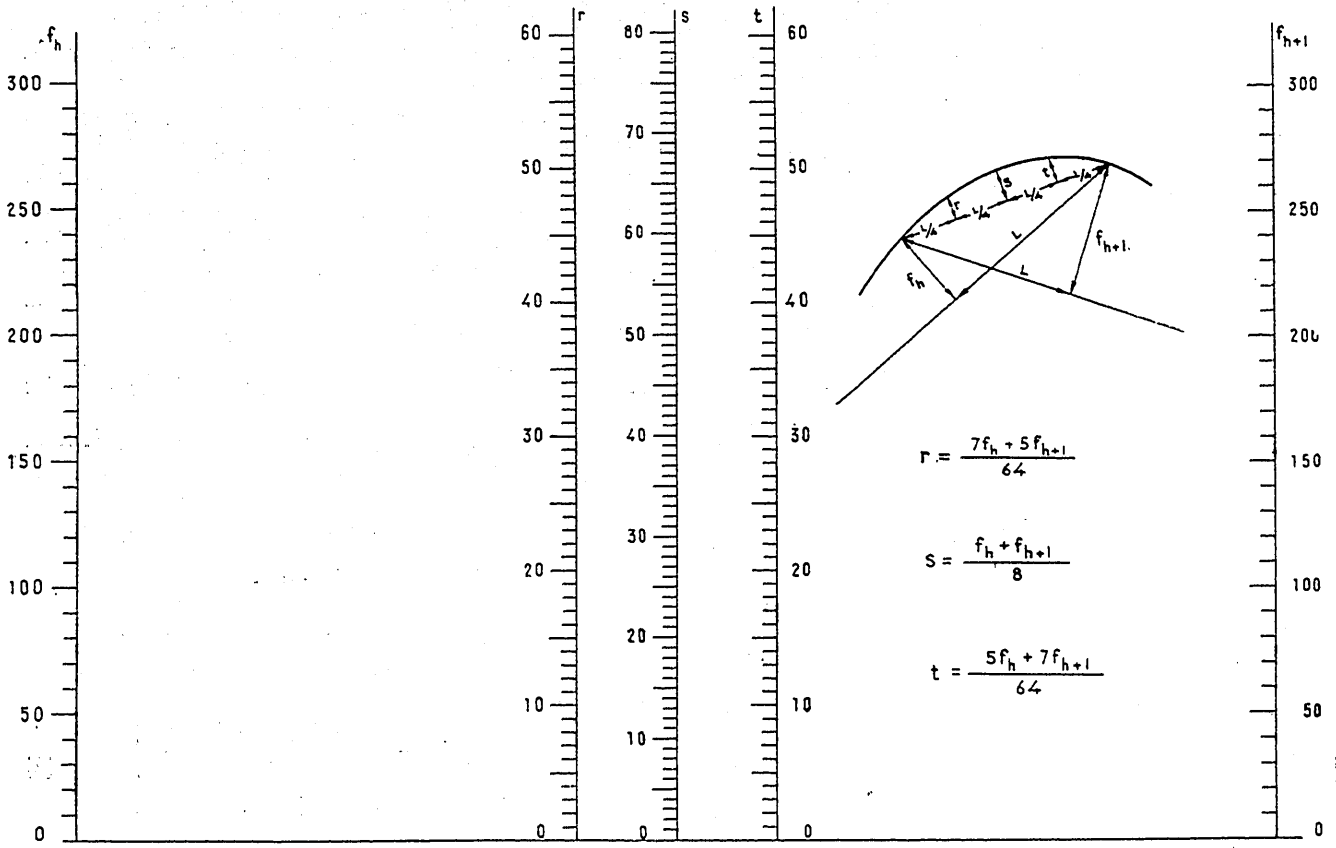
Piquetes	1	2	9	10
Incrementos de flechas	-0,5	-0,5	+0,5	+0,5

El par positivo  $+8$  se distribuye como a continuación se indica:

Piquetes	11	12	14	15
Incrementos de flechas	+1	+2	-2	-1

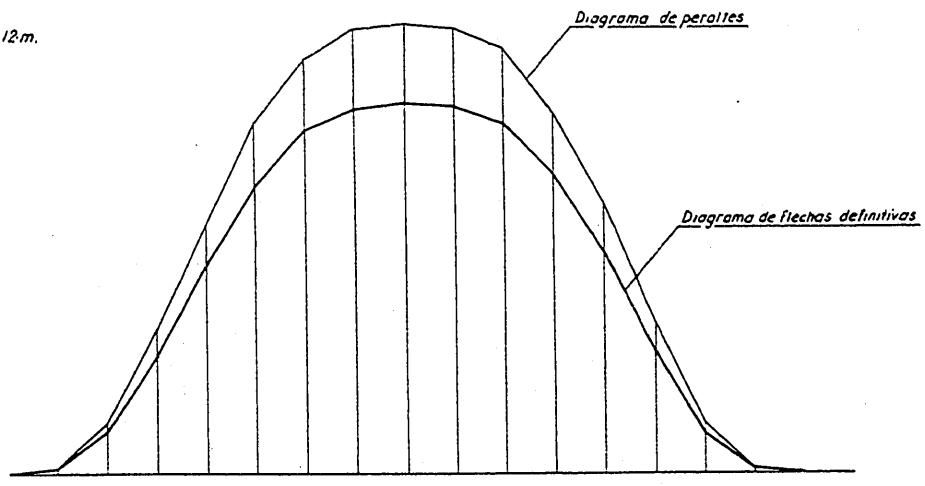
En el nuevo cálculo (véase cuadro), con las fle-

# NOMOGRAMA PARA DETERMINAR TRES PUNTOS ENTRE DOS PIQUETES CONSECUTIVOS



## GRAFICO DEFINITIVO

Equidistancia entre piquetes 12m.  
Radio minimo 973 m.  
Velocidad 100 Km./h.



PIQUETES	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
FLECHAS DEFINITIVAS	0	-	8,5	23,5	41,5	57,5	68,5	73	74	73,5	70	59,5	44,5	24,5	6	-	0	0
DESPLAZAMIENTOS	0	-0	-10	-19	-35	-71	-99	-110	-117	-98	-56	0	+33	+29	+24	+10	0	0
PERALTES	0	1	10	29	50	70	83	89	90	89	85	72	54	30	10	1	0	0

Figura 27.

chas ya modificadas, se obtiene un desplazamiento nulo para el punto II (fig. 27).

18. RESUMEN DE LA MARCHA GENERAL A SEGUIR EN LA REGULARIZACIÓN DE CURVAS.

- 1) Dibujo en papel milimetrado del diagrama de flechas medidas.
- 2) Cálculo de  $\Sigma f$ .
- 3) Cálculo de la flecha del diagrama rectangular equivalente.
- 4) Cálculo de la longitud del diagrama rectangular equivalente.
- 5) Centrado a estima del diagrama rectangular equivalente con relación al de flechas medidas.
- 6) Determinación de las longitudes de las curvas de transición a adoptar.
- 7) Fijación de los comienzos y finales de las transiciones. Los extremos del diagrama rectangular corresponderán a los puntos medios de las transiciones.
- 8) Cálculo de las flechas de las transiciones en los piquetes que abarcan.
- 9) Cálculo de la suma  $\Sigma F$ . Se calcula  $\Sigma f - \Sigma F = \Sigma \delta$  y se distribuye simétricamente sobre las transiciones.
- 10) Cálculo de semidesplazamientos. El error de cierre considerado como un par se agrega a las  $F$ .
- 11) Un desplazamiento excesivo se reduce en la cuantía precisa mediante una pareja de pares iguales y de signo contrario, distribuidos a izquierda y derecha, respectivamente, del punto considerado.
- 12) Nuevo cálculo de desplazamientos con las flechas  $F$  definitivas.

19. REGULARIZACIÓN DE UNA CURVA EN LA QUE SE MODIFICAN LAS ALINEACIONES RECTAS.

En este caso general serán distintos de cero  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_{n-1}$  y  $d_n$ .

Si movemos la curva dada de manera que  $P_1$  se desplace  $d_1$  y  $P_2$ ,  $d_2$ , los demás puntos tendrán desplazamientos que vienen dados por la expresión  $d'_h = d_1 + h(d_2 - d_1)$ .

En el cálculo de flechas referido a la curva desplazada, los desplazamientos obtenidos  $d''_h$  han de sumarse a los  $d'_h$  para que queden referidos a la curva primitiva, es decir, que será:

$$d_h = d'_h + d''_h = d_1 + h(d_2 - d_1) + d''_h \quad [1]$$

Los desplazamientos de los dos últimos piquetes referidos a la curva desplazada serán por consiguiente:

$$d''_{n-1} = d_{n-1} - d_1 - (n-1)(d_2 - d_1);$$

$$d''_n = d_n - d_1 - n(d_2 - d_1).$$

Las condiciones equivalentes a las de cierre, se convierten para este caso general en las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F &= \Sigma f - \frac{d_n - d_{n-1} + d_1 - d_2}{2} \\ d''_n &= d_n - d_1 - n(d_2 - d_1) \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

La expresión [1], que da los desplazamientos totales, y las de condición [2] para el cálculo de flechas  $F$ , permiten regularizar las curvas de forma análoga al caso en que se conservan las alineaciones rectas.