

UNA CLASIFICACION DE LAS CORRELACIONES EN EL PLANO PROYECTIVO

Por IGNACIO CANALS NAVARRETE

Catedrático de Geometría Projectiva de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El objeto del presente trabajo es dar una clasificación completa de las correlaciones en el plano proyectivo, cosa que no se encuentra en los libros de Geometría Projectiva consultados. Se utilizará la teoría de matrices, que facilita mucho el dar una clasificación exhaustiva, y las definiciones ya conocidas de los elementos proyectivos que ofrecen la oportunidad de hacer tal clasificación.

1. Preliminares y notación.

Una matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2, 3$, la representaremos por la letra mayúscula A . Un punto P , cuyas coordenadas proyectivas son (p_1, p_2, p_3) , será considerado como vector columna, es decir, representará una matriz $(3 \times 1) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.

La traspuesta de una matriz, es decir, el resultado de cambiar las filas por las columnas, se designará por A' . Así $P' = (p_1, p_2, p_3)$.

Si A es una matriz cuadrada no-singular, es decir, su determinante $|A| \neq 0$, tendrá una matriz inversa, y la designaremos por A^{-1} .

Utilizaremos también la forma canónica de Jordan (1) para una matriz. Si A es una matriz cuadrada $(n \times n)$ y los divisores elementales de $A - \lambda I$ son:

$$(\lambda - \alpha_1)^{v_1}, (\lambda - \alpha_2)^{v_2}, \dots, (\lambda - \alpha_s)^{v_s} \quad \left(\sum_{i=1}^s v_i = n \right),$$

donde las α_i son las raíces características de A , no necesariamente todas distintas, entonces existe una matriz $P (n \times n)$ no-singular, tal que:

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

(1) Consultar "Introduction to the Theory of Determinants and Matrices". Edward Tankard Browne. The University of North Carolina Press (1958).

donde:

$$J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_i \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN I.I.

Correlación es una transformación lineal homogénea:

$$\rho V = C X, \quad [1.2]$$

que hace corresponder a un punto X del plano π una recta v , cuyas coordenadas son $C X$, del plano π' .

Veamos también que a una recta $u (U' X = 0)$ del plano π le corresponde un punto Y del plano π' . Si la correlación es no-singular, es decir, $|C| \neq 0$, entonces $U' X = 0$ se transforma por [1.2] en $U' \rho C^{-1} V = 0$; tomando traspuestas en ambos lados, obtenemos $\rho V' (C^{-1})' U = 0$, que nos dice que todas las rectas v transformadas de los puntos de u pasan por el punto:

$$\rho Y = (C^{-1})' U. \quad [1.3]$$

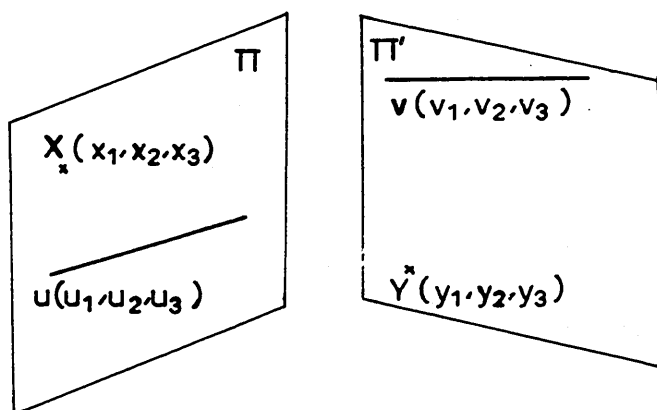
Despejando X y U de [1.2] y [1.3], obtenemos las transformaciones inversas:

$$1/\rho X = C^{-1} V, \quad [1.4]$$

$$1/\rho U = C' Y. \quad [1.5]$$

Un punto y una recta incidentes en π se transforman en una recta y un punto incidentes en π' . $U' X = 0$ expresa que el punto X y la recta u son

incidentes; sustituyendo X y U por los valores de [1.4] y [1.5], deducimos ${}_{\rho}Y' C {}_{\rho}C^{-1}V = 0$, $Y'V = 0$, $V'Y = 0$, que expresa que la recta v y el punto Y son incidentes.



DEFINICIÓN 1.2.

Cónicas de incidencia. — Supongamos ahora que los dos planos π y π' coinciden, y tomamos en ambos planos el mismo sistema de referencia para las coordenadas de los puntos y rectas de ambos planos.

Veamos si existen puntos X tales que sus rectas transformadas v pasan por él, es decir, $V'X = 0$. Despejando V de [1.2], obtenemos:

$$1/\rho X' C' X = 0,$$

tomando traspuestas

$$X' C X = 0, \quad [1.6]$$

que es una cónica que denominamos *cónica de incidencia*.

Igualmente buscamos rectas u , tales que sus puntos transformados Y estén sobre ella, es decir, $U'Y = 0$. Sustituyendo Y de [1.3], obtenemos:

$$U' 1/\rho (C^{-1})' U = 0, U' C^{-1} U = 0, \quad [1.7]$$

que es también una cónica, distinta de la anterior, pues C no es simétrica en general, y que denominamos también *cónica de incidencia*.

Observamos que la cónica [1.7] es la transformada de [1.6] por la correlación [1.2], lo cual nos dice que los puntos de [1.6] se transforman en rectas que pasan por él y son tangentes a la cónica [1.7].

DEFINICIÓN 1.3.

Pares involutivos. — Un punto X y su recta transformada V se dice que es un par involutivo si el trans-

formado Y , de v considerada como del plano π , coincide con X . Es decir:

$${}_{\rho}V = C X.$$

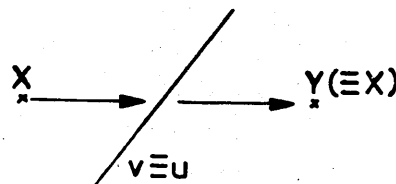
Y sustituyendo en $1/\rho U = C' Y$, teniendo en cuenta que $U = \sigma V$, obtenemos:

$$1/\rho \quad 1/\rho \sigma C X = C' Y, C X = \omega C' Y, \quad [1.8]$$

o bien:

$$\omega Y = (C')^{-1} C X, \quad [1.9]$$

que es una colineación, cuyos puntos dobles serán los puntos buscados.

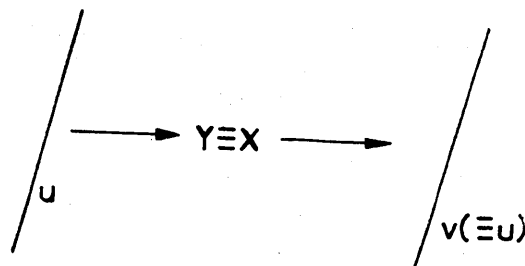


Análogamente, una recta u y su punto transformado Y decimos que es un par involutivo si la transformada de Y considerado como del plano π es una recta v que coincide con u .

${}_{\rho}Y = (C^{-1})' U$, y sustituyendo en $1/\rho X = C^{-1} V$, y teniendo en cuenta que $Y = \sigma X$ (porque $Y \equiv X$), obtenemos:

$$1/\rho (C^{-1})' U = \sigma {}_{\rho}C^{-1} V, \omega V = C (C^{-1})' U, \quad [1.10]$$

que es la misma colineación [1.9] para las rectas. Veamos que los puntos dobles de [1.9] y las rectas dobles de [1.10] constituyen los pares involutivos de



[1.2]. En efecto: demostraremos que si X es un punto doble de [1.9], entonces $V = C X$ es una recta doble de [1.10]; por ser X punto doble de [1.9], se verifica:

$$((C^{-1})' C - \rho I) X = 0, ((C^{-1})' C - \rho I) C^{-1} V = 0, \\ ((C^{-1})' - \rho C^{-1}) V = 0;$$

multiplicando por C , que es no-singular:

$$(C(C^{-1})' - \rho I) V = 0,$$

que demuestra que la transformada de X por C es una recta doble de [1.10].

Por tanto, los pares involutivos de [1.2] son los pares (X, CX) , siendo X un punto doble de [1.9].

DEFINICIÓN 1.4.

Correlaciones involutivas. — Son aquellas en que todos los puntos del plano y sus rectas transformadas son pares involutivos. Es decir, la colineación [1.9] debe ser la identidad; por tanto:

$$(C^{-1})'C = \omega I, C = \omega C',$$

tomando determinantes obtenemos:

$$|C| = \omega^3 |C'|,$$

y como $|C| \neq 0$, tenemos que $\omega^3 = 1$, que implica $\omega = 1$ y $C = C'$. Luego C es una matriz simétrica, y la correlación se llama *polaridad*, y las dos cónicas de incidencia coinciden.

Correlaciones no involutivas. — Las clasificaremos con relación a los pares involutivos, para lo cual debemos estudiar los elementos dobles de [1.9], es decir, los divisores elementales de $(C^{-1})'C = A$. Veamos primeramente que A tiene siempre una raíz característica igual a uno y las otras dos recíprocas. En efecto: como A es no-singular, si $|A - \lambda I| = 0$, entonces $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= (C^{-1})'C - \lambda I = (C^{-1})'C - \lambda C^{-1}C = \\ &= ((C^{-1})' - \lambda C^{-1})C = (C^{-1})'(I - \lambda C' C^{-1})C = - \\ &= -\lambda (C^{-1})'(C' C^{-1} - 1/\lambda I)C = -\lambda (C^{-1})'((C^{-1})'C - \\ &\quad - 1/\lambda I)'C, \end{aligned}$$

tomando determinantes:

$$|(C^{-1})'C - \lambda I| = (-\lambda)^3 |(C^{-1})'| |C| |(C^{-1})'C - 1/\lambda I|.$$

Y como

$$\lambda \neq 0, |C| \neq 0, |(C^{-1})'| \neq 0,$$

deducimos que si

$$|(C^{-1})'C - \lambda I| = 0,$$

entonces

$$|(C^{-1})'C - 1/\lambda I| = 0.$$

Luego si λ es raíz característica de A , también lo es $1/\lambda$. Y teniendo en cuenta que la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ es de grado tres y que el coeficiente del término de mayor grado es -1 , y el del término independiente, 1 , deducimos: $\lambda_1, 1/\lambda_1, \lambda_2 = 1$; es decir,

$\lambda_2 = 1$; λ_1 y $1/\lambda_1$ son las raíces características de la matriz A .

Tendremos los siguientes casos para la forma canónica de JORDAN de la matriz $A = (C^{-1})'C$:

2.1. $\lambda_1 \neq \pm 1$; los divisores elementales son $(\lambda - 1)$, $(\lambda - \lambda_1)$, $(\lambda - 1/\lambda_1)$; forma canónica de JORDAN:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

2.2. $\lambda_1 = -1$; divisores elementales:

$$a) (\lambda - 1); (\lambda + 1); (\lambda + 1).$$

$$b) (\lambda - 1); (\lambda + 1)^2,$$

forma canónica de JORDAN:

$$a) A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b) A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3. $\lambda_1 = 1$; divisores elementales:

$$a) (\lambda - 1); (\lambda - 1); (\lambda - 1).$$

$$b) (\lambda - 1); (\lambda - 1)^2.$$

$$c) (\lambda - 1)^3.$$

forma canónica de JORDAN:

$$a) A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Cambio de sistema de referencia para la correlación [1.2]. — En cada caso de los señalados existe una matriz P (3×3) no-singular, tal que $P^{-1}AP = A_0$. En cada caso tomamos como nuevo sistema de referencia el definido por P , de tal forma que el punto X tendrá ahora por coordenadas $\bar{X}$, tal que $X = P\bar{X}$, y la recta $V'X = 0$ tendrá por ecuación en el nuevo sistema de referencia $V'P\bar{X} = 0$; es decir, sus coordenadas serán $\bar{V}' = V'P$, $\bar{V} = P'V$, $V = (P')^{-1}\bar{V}$, y como $(P')^{-1} = (P^{-1})'$, nos queda finalmente $V = (P^{-1})'\bar{V}$.

La correlación [1.2] en el nuevo sistema de referencia será:

$$\rho (P^{-1})'\bar{V} = CP\bar{X}; \quad \rho \bar{V} = P'CP\bar{X}.$$

Hagamos $P'CP = B$ y veamos que $(B^{-1})'B = A_0$, con lo cual podremos calcular B en cada caso y ten-

dremos definida la correlación en el nuevo sistema de referencia. En efecto:

$$\begin{aligned} ((P' C P)^{-1})' P' C P &= (P^{-1} C^{-1} (P')^{-1})' P' C P = \\ &= P^{-1} (C^{-1})' (P^{-1})' P' C P = P^{-1} A P = A_0. \end{aligned}$$

La matriz A_0 en cada caso nos dará los pares involutivos, y la matriz B nos definirá la correlación, siendo $B = B' A_0$.

Caso 2.1:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b_{32} \\ 0 & 1/b_{23} & 0 \end{pmatrix}; \quad b_{32} = \lambda_1 b_{23}.$$

Pares involutivos:

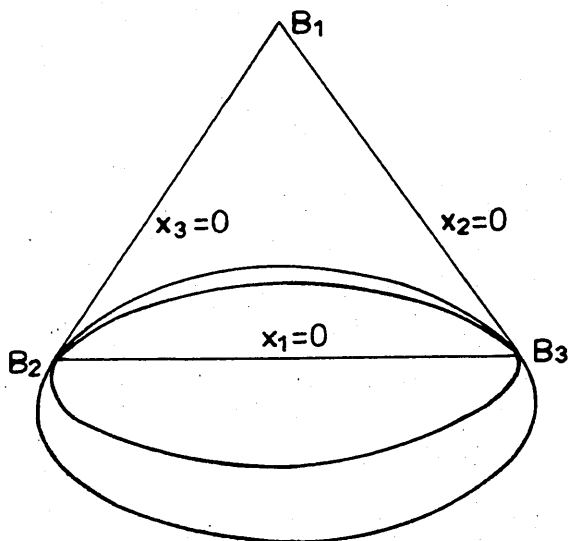
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1, \quad B B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (x_1 = 0); \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_2,$$

$$B B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{32} \end{pmatrix} (x_3 = 0); \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_3; \quad B B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{23} \\ 0 \end{pmatrix} (x_2 = 0)$$

Cónicas de incidencia:

$$\begin{aligned} b_{11} x_1^2 + (b_{23} + b_{32}) x_2 x_3 &= 0, \\ 1/b_{11} u_1^2 + (1/b_{23} + 1/b_{32}) u_2 u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hay tres pares involutivos, de los cuales dos son incidentes, y el otro, no; y los tres forman un triángulo. Las cónicas de incidencia son bitangentes entre sí y tangentes a los pares involutivos incidentes. El



otro par involutivo está en la relación de polo y polar respecto de las dos cónicas de incidencia.

Caso 2.2, a:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

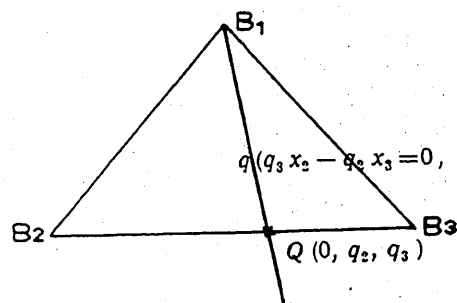
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/b_{23} \\ 0 & 1/b_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pares involutivos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = Q, \quad B Q = \begin{pmatrix} 0 & b_{23} & q_3 \\ b_{23} & 0 & q_2 \end{pmatrix} (q_3 x_2 - q_2 x_3 = 0),$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1, \quad B B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (x_1 = 0),$$

Cónicas de incidencia: $x_1^2 = 0$ y $u_1^2 = 0$,



que son singulares: una recta doble y un punto doble. Todos los puntos de la recta y todas las rectas que pasan por el punto son pares involutivos incidentes, y el punto y la recta (cónicas singulares) son también pares involutivos.

Caso 2.2, b:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & -b_{23} & b_{23}/2 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 b_{23} & -1/b_{23} \\ 0 & 1/b_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pares involutivos:

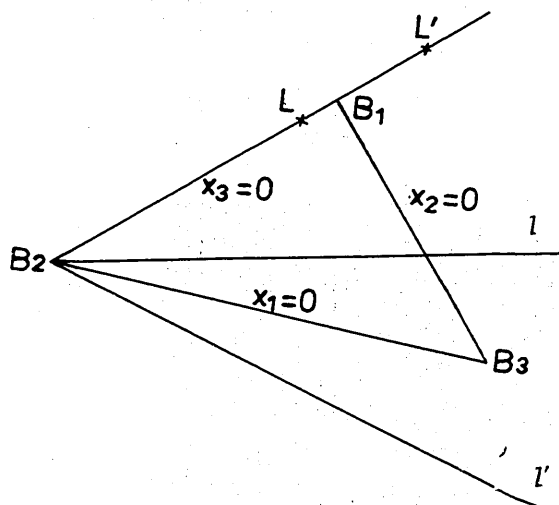
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_2, \quad B B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_{23} \end{pmatrix} (x_3 = 0),$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1, \quad B B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (x_1 = 0).$$

Cónicas de incidencia:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} x_1^2 + b_{23}/2 x_3^2 &= 0 \\ 1/b_{11} u_1^2 + 1/2 b_{23} u_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

que son singulares: dos rectas conjugadas l y l' respecto de $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$, y dos puntos conjugados L y L' respecto de B_1 y B_2 . De los dos pares involutivos, uno ($B_2, x_3 = 0$) es incidente y tangente a las cónicas de incidencia; el otro no es incidente y está en la relación de polo y polar respecto de las cónicas de incidencia.



Caso 2.3, a:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = B'; \text{ la correlación es involutiva.}$$

Caso 2.3, b:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

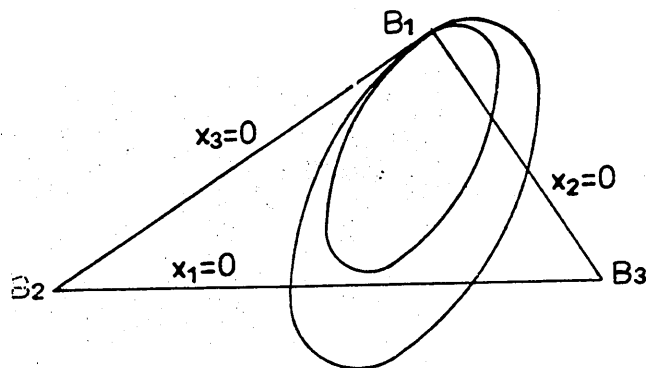
En este caso B es singular, lo cual es una contradicción; pues siendo $B = P'CP$, y P no-singular, implica que C es singular, contra lo supuesto.

Por tanto, una correlación no-singular no puede tener la forma A_0 de este caso.

Caso 2.3, c:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & -b_{13} & 0 \\ b_{13} & b_{13} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -b_{33}/b_{13}^2 & 1/b_{13} & 1/b_{13} \\ 0 & -1/b_{13} & 0 \\ 1/b_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Pares involutivos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1, \quad B B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{13} \end{pmatrix} (x_3 = 0).$$

Cónicas de incidencia:

$$\begin{aligned} -b_{13} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + 2b_{13} x_1 x_3 + b_{13} x_2 x_3 &= 0, \\ -b_{33}/b_{13}^2 u_1^2 - 1/b_{13} u_2^2 + 1/b_{13} u_1 u_2 + 2/b_{13} u_1 u_3 &= 0. \end{aligned}$$

En este caso hay un solo par involutivo y las cónicas de incidencia son tangentes entre sí a la recta involutiva en el punto involutivo.