

COMENTARIO A LA LEY DE HOOKE

Por MANUEL OSSET MORENO

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Constituye el presente artículo, como se declara en el texto, un homenaje a nuestro inolvidable compañero Eduardo Torroja, al comentar una fórmula analítica por él propuesta, y al final expresa su deseo de que lleguen a publicarse los estudios y cálculos de las grandes obras de Ingeniería que realizó en su fecunda vida profesional.

La clásica ley tensión-deformación establecida en el siglo XVII por el inglés Hooke, se ha mostrado insuficiente en el transcurso de los últimos decenios para conducir a un dimensionamiento correcto de las secciones de las piezas de hormigón armado, o para explicar la plastificación o la fluencia de los diversos materiales de construcción.

En el extranjero, una pléyade de investigadores, entre los que figuran Steuermann, Whitney, etc., ha sido la promotora del cálculo anelástico o del cálculo a rotura de las piezas resistentes de una estructura.

En España, nuestro llorado maestro D. Eduardo Torroja, fué el más fecundo investigador de las teorías anelásticas del hormigón armado. Nuestro recuerdo emocionado al admirado y admirable ingeniero español ya citado, preside este artículo en el que pasamos a formular algunas objeciones a la conocida ley elástica de Hooke, y a comentar una fórmula anelástica propugnada por el Sr. Torroja.

La mencionada fórmula, que transcribiremos más tarde, cuenta con el apoyo de los diez mil ensayos realizados por Walker Stanton y con el aval de los resultados deducidos de los ensayos de Brandtzaeg, Röss y Schreyer.

La consagrada ley de Hooke se suele expresar en la forma:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \quad [1]$$

en donde:

ε = deformación unitaria de una pieza solicitada por una tensión.

Δl = deformación absoluta de la pieza.

l = longitud de la pieza antes de ser cargada.

σ = tensión aplicada a la pieza.

E = módulo de elasticidad del material constitutivo de la pieza.

Según es bien sabido, incluso el autor de la fórmula [1] señaló, cuando la estableció, el carácter em-

pirico de la misma y nunca contó con que se pudiera hacer uso de ella más allá de unos ciertos límites característicos para cada material.

Recordado lo indicado en el último párrafo, criticaremos la estructura de la fórmula básica de la teoría de la Elasticidad, despreocupándonos de la posibilidad de que lo que afirmamos haya ya sido dicho por otros o por el propio físico inglés Hooke.

La fórmula [1], sustituyendo al numerador Δl por $d l$, según sugiere el cálculo diferencial, se transforma en la siguiente:

$$\frac{d l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \quad [2]$$

en la que los símbolos empleados son los definidos anteriormente.

La primera objeción que salta a la vista en relación con la fórmula que comentamos es la incorrección formal de la misma.

En la expresión [2] aparece un término diferencial en su primer miembro, sin que exista otro homólogo en el segundo.

Nace de este defecto intrínseco de la fórmula la necesidad de atribuir al módulo E un valor muy grande y de proveerlo de la misma unidad de medida en la que venga evaluada la tensión.

A nuestro entender, E debería equivaler a un índice de refracción de las tensiones, que fuera adimensional, por semejanza con lo que sucede con los fenómenos luminosos.

Además, en [2] debería aparecer también un factor infinitesimal en su segundo miembro y la tensión σ debería incluir el estado tensional previo del material — su histéresis, podríamos decir brevemente — por lo cual, más que una tensión propiamente dicha, sería equiparable al incremento de tensión aplicado a la pieza, modificador de la tensión previa reinante en ella.

Los graves defectos formales que hemos apuntado no es extraño que hayan dado lugar al establecimiento de otras leyes representativas del estado tensión-deformación.

Comentaremos hoy la fórmula empírica:

$$1 - \frac{\sigma_h}{R} = \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^{2.33}$$

empleada algunas veces por D. Eduardo Torroja y en la que:

- σ_h = tensión de trabajo a compresión simple.
- R = tensión máxima de rotura del hormigón.
- δ = deformación o acortamiento unitario.
- Δ = deformación unitaria de rotura.

y trataremos de llegar, prácticamente, a su justificación teórica.

Consideremos, para ella, una barra AB de sección circular constante que, por razones de facilidad en nuestra exposición, supondremos metálica.

Las características iniciales de la barra AB serán las siguientes:

- l_0 = longitud de la barra.
- S = sección transversal de la misma.
- σ = tensión existente en ella cuando se halla descargada.

Admitiremos que la sección extrema que pase por A está empotrada en una recia masa metálica y que el enlace existente es tal, que garantice la invariabilidad del área de la sección extrema.

La sollicitación de la pieza actuará en el otro extremo B , permaneciendo siempre el extremo A inmóvil e indeformable.

Al cargar, las características de la pieza serán:

- $l_0 + d l_0$ = longitud de la barra.
- S = área de la misma sección correspondiente al extremo A .
- $S - d S$ = área de la sección de la pieza correspondiente al extremo B .
- $\sigma' + d \sigma'$ = tensión sollicitadora de la pieza cargada.

En estas condiciones, el volumen de la barra que estamos estudiando se podrá suponer sensiblemente igual a:

$$V = \frac{l_0 + d l_0}{3} (S + S - d S + \sqrt{S(S - d S)}),$$

y, desarrollando en serie el radical:

$$V = \frac{l_0 + d l_0}{3} \left(3S - \frac{3}{2} d S\right).$$

Si igualamos con el volumen primitivo de la pieza:

$$\frac{l_0 + d l_0}{3} \left(3S - \frac{3}{2} d S\right) = l_0 S.$$

Resulta fácilmente:

$$\frac{l_0 + d l_0}{l_0} = \frac{S}{S - \frac{d S}{2}} \approx 1 + \frac{d S}{2 S},$$

es decir:

$$d S = 2 S \frac{d l_0}{l_0}.$$

La tensión aplicada $\sigma + d \sigma$, medida con relación a una sección de área S , se modificará en el extremo B , al variar el área de la sección que pasa por él, hasta valer:

$$S \times \frac{\sigma' + d \sigma'}{S - 2 S \frac{d l_0}{l_0}} \approx (\sigma' + d \sigma') \left(1 + 2 \frac{d l_0}{l_0}\right).$$

Por consiguiente, tomando como referencia la sección modificada correspondiente al extremo B , el incremento real de tensión originador del alargamiento $d l_0$, habrá sido:

$$2 \frac{d l_0}{l_0} \sigma' + d \sigma'.$$

Si, inspirándonos en Hooke, establecemos:

$$2 \frac{d l_0}{l_0} \sigma' + d \sigma' = K \frac{d l_0}{l_0};$$

mediante una adecuada escala de medidas podremos conseguir que el coeficiente de proporcionalidad K se reduzca a la mitad.

Se verificará, por tanto:

$$\frac{d l_0}{l_0} = \frac{d \sigma'}{1 - 2 \sigma'},$$

e integrando:

$$\int_{l_0}^{l_1} \frac{d l}{l} = \int_0^{\sigma'_1} \frac{d \sigma'}{1 - 2 \sigma'}$$

$$\log \frac{l_1}{l_0} = \frac{-1}{2} \log (1 - 2 \sigma'_1)$$

o bien:

$$\left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{1 - 2 \sigma'_1}.$$

Cambiando de notación, podemos hacer:

$$2 \sigma'_1 = \frac{-\sigma}{R},$$

En donde R es la tensión unitaria de rotura de la barra.

Obtendremos:

$$\left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{R}} \quad [1]$$

Si desarrollamos en serie, aproximadamente, la última expresión, quedará:

$$1 - \frac{\sigma}{R} = \left(1 - \frac{\Delta l_n}{l_0}\right)^2 \quad [2]$$

Siempre que convengamos en asignar el signo positivo a las compresiones que darán lugar a acortamiento de la barra.

La fórmula [2], cuando $\sigma = R$, parece conducir a la anulación de sus dos términos. En tal supuesto debería ser:

$$\Delta l_0 = l_0 = l_R$$

siendo l_R la longitud de la pieza en el instante anterior a su rotura.

No hay, pues, inconveniente en reproducir la fórmula [2] con la siguiente notación:

$$1 - \frac{\sigma}{R} = \left(1 - \frac{\Delta l/l_0}{l_R/l_0}\right)^2 \quad [3]$$

o en denominar:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \delta = \text{alargamiento unitario producido por la tensión.}$$

$$\frac{l_R}{l_0} = \Delta = \text{alargamiento unitario correspondiente a la tensión de rotura } R.$$

Con estos convenios, la expresión [3] se transforma en la siguiente:

$$1 - \frac{\sigma}{R} = \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^2,$$

coincidente casi con la recomendada por D. Eduardo Torroja.

Si en [1] tomamos un término más del desarrollo en serie de su segundo miembro resultará:

$$1 - \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma^2}{R^2} = \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^2,$$

que equivale a:

$$1 - \frac{\sigma}{R} = \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^2 - \frac{\sigma^2}{R^2} \quad [4]$$

No es de extrañar que los resultados empíricos condujeran a la fórmula:

$$1 - \frac{\sigma}{R} = \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^{2.33}$$

porque el término negativo de [4] puede traducirse en un incremento en el exponente del factor $\left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)$, ya que por ser este número menor que la unidad, las potencias del mismo decrecerán al aumentar los exponentes.

No pretendemos en este artículo haber elaborado una demostración rigurosa de la fórmula anelástica que hemos analizado.

Tan sólo el autor de estas líneas se ha permitido redactarlas como homenaje al inolvidable maestro de la ingeniería española, D. Eduardo Torroja, para hacer ver el interés de los temas que abordó tan insustituible investigador de la técnica del hormigón armado.

Sería de desear, para profundizar en los surcos que nos dejó trazados nuestro insigne compañero desaparecido, que algún día se publicaran con todo detalle los proyectos y las memorias y anejos de cálculos de las grandes obras de ingeniería que realizó durante su vida el que fué el principal propulsor de las teorías modernas del hormigón armado en nuestro patria.

Rematamos nuestras cuartillas con este deseo que nos agradaría ver plasmado en la realidad, siempre que no pusieran impedimentos a la publicación de los trabajos de D. Eduardo Torroja sus familiares o las entidades o empresas en el seno de las cuales realizó el Sr. Torroja su meritisima labor.