

RESOLUCION DE ESTRUCTURAS RETICULADAS PLANAS POR UNA ANALOGIA ELECTRICA

Por CARLOS LAFFITTE MESA
Ingeniero de Caminos

El estudio de la presente analogía está basado en la teoría de la elipse de elasticidad. Esta teoría, aunque antigua, está poco divulgada, pues en las aplicaciones prácticas ha quedado desplazada por otras que conducen a métodos de resolución más viables aunque también más artificiosos.

El método analógico que constituye el objeto de este estudio, resuelve el problema hiperestático de las estructuras reticuladas planas cargadas en sus nudos, determinando para cada sistema de cargas el sistema de reacciones sobre cada pieza de la estructura.

Estas reacciones vienen, además, referidas a los ejes de inercia de las piezas correspondientes, estando entonces sus componentes íntimamente relacionados con el esfuerzo cortante, el esfuerzo axil y el momento flector en la sección central de la pieza.

El problema más general de las estructuras reticuladas planas se plantea cuando los sistemas de cargas actúan no solamente sobre los nudos, sino también sobre las piezas.

El paso de este caso general al que nos ocupa se hace aplicando en cada uno de los casos de piezas cargadas, la superposición de los dos siguientes estados:

- a) Empotramiento de los nudos extremos de las piezas cargadas y carga de la pieza.
- b) Acción sobre los dos nudos citados de sistemas de fuerzas equivalentes a las reacciones de empotramiento de las piezas biempotradas cambiadas de signo.

El primer estado conduce al problema clásico de la pieza biempotrada resuelto y tabulado en los casos más corrientes. En casos más complicados, puede resolverse por el mismo método que tratamos, subdividiendo la pieza lo suficiente para distribuir la carga en los nuevos nudos creados.

Se han ideado muchos tipos de analogías para resolver este problema de muy diversa índole, que, en general, no constituyen una verdadera analogía del problema elástico, sino de un método determinado de cálculo, tal como el método de Cross. Estas analogías tienen, por lo tanto, todas las limitaciones que tienen la aplicación de cualquiera de esos métodos, los cuales sólo son adecuados para determinados tipos de estructuras y determinados sistemas de cargas.

Los computadores digitales pueden emplearse también para resolver este tipo de problemas.

El método que nos ocupa no se basa en un para-

lelismo entre un método analítico de cálculo de la estructura y el análisis del fenómeno eléctrico que estudiaremos, aunque, como es lógico, puedan dar lugar a las mismas ecuaciones, sino que es, en realidad, una verdadera analogía entre el fenómeno elástico y el fenómeno eléctrico.

En la estructura elástica existen una serie de elementos estáticos que son las piezas unidas unas con otras de una manera determinada. En la red eléctrica análoga que estudiaremos existen también unos elementos estáticos que son los tridipolos, conectados entre ellos de una forma determinada.

En la estructura, el fenómeno de la acción de sistemas de fuerzas sobre los nudos produce una acomodación de los movimientos de éstos de forma que la energía elástica almacenada en las piezas en virtud de su deformación, iguala al trabajo realizado por las fuerzas exteriores, trabajo que es mínimo en virtud del teorema de Castigliano.

En la red eléctrica, la inyección en los polos de corrientes senoidales puras en fase o fase opuesta, produce una acomodación de las tensiones en los polos, en cuadratura con las corrientes y una repartición de éstas en los tridipolos, de forma que la energía electromagnética oscilante, almacenada en éstos, la cual es la proporcional a los cuadrados de los flujos en los núcleos magnéticos de que se componen los tridipolos, equivale a la energía reactiva que se suministra a la red de tridipolos desde el exterior, energía que es mínima en virtud de un principio general el principio de mínima acción de Maupertuis.

Cualquier fenómeno en el campo de la estructura elástica tiene su fenómeno análogo en el campo de la red de tridipolo: fuerzas exteriores, reacciones de los nudos sobre las piezas, movimientos absolutos de los nudos, deformaciones intrínsecas de las piezas, son análogos a corrientes inyectadas, corrientes en los tridipolos, tensiones absolutas en los polos, tensiones en los devanados de medida de los tridipolos, etc.

El desarrollo del método se basa en los siete capítulos siguientes:

1.º Deformaciones de los nudos y reacciones sobre las piezas de una estructura reticulada plana.

2.º Tensiones en los tripolos de una red de tridipolos y corrientes en los mismos.

3.º Analogía entre la estructura reticulada y la red de tridipolos.

4.º Reacciones y movimientos intrínsecos de las piezas.

5.º Obtención de los valores propios de la estructura y red análoga.

6.º Conexiones, medidas y obtención de las reacciones.

7.º Realización y limitaciones del método.

I. Deformaciones de los nudos y reacciones sobre las piezas de una estructura reticulada plana.

Consideremos un sistema de ejes coordenados como el de la figura 1-1, en la que se indican también los

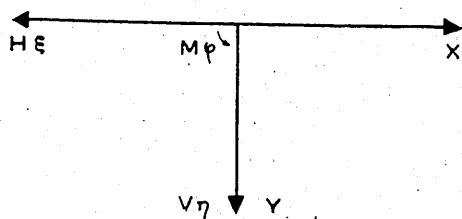


Figura 1-1.

sistemas de referencia para fuerzas, momentos, traslaciones y giros.

Definiremos los movimientos de los nudos de una estructura y los sistemas de fuerzas, ya sean exteriores (S) actuando sobre los nudos, o interiores, o sea, reacciones (R) sobre las piezas por los vectores $\bar{d}$ y $\bar{S}$.

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \eta \text{ traslación vertical.} \\ \xi \text{ } \rightarrow \text{ horizontal.} \\ \varphi \text{ giro.} \end{matrix}$$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} V \\ H \\ M \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} V \text{ componente vertical.} \\ H \text{ } \rightarrow \text{ horizontal.} \\ M \text{ momento.} \end{matrix}$$

Supongamos ahora la estructura reducida a una ménsula y que sobre su extremo libre actúa un sistema de fuerzas $\bar{S}$. Dicho extremo experimentará un movimiento $\bar{d}$.

La relación entre las componentes de $\bar{d}$ y las de $\bar{S}$

las podemos deducir de la aplicación de los teoremas de CULMANN, resultando:

$$\begin{matrix} \eta^V = V. I^{\eta V} & \eta^H = H. I^{\eta H} & \eta^M = M. M^{\eta} \\ \xi^V = V. I^{\xi V} & \xi^H = H. I^{\xi H} & \xi^M = M. M^{\xi} \\ \varphi^V = V. M^V & \varphi^H = H. M^H & \varphi^M = M. G \end{matrix}$$

En las que I representan momentos recíprocos, las M momentos estáticos y G el peso elástico del sistema de masas elásticas de la pieza, sistema que queda definido por G y la elipse central de inercia.

Estas fórmulas las podemos condensar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{VV} & I^{VH} & M^V \\ I^{HV} & I^{HH} & M^H \\ M^V & M^H & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ H \\ M \end{pmatrix}$$

o bien en la forma reducida: $\boxed{\bar{d} = \{A\} \cdot \bar{S}} \quad [1-1]$ donde $\{A\}$ es la matriz simétrica:

$$\{A\} = \begin{pmatrix} I^{VV} & I^{VH} & M^V \\ I^{HV} & I^{HH} & M^H \\ M^V & M^H & G \end{pmatrix}$$

matriz elástica de la pieza que contiene seis parámetros independientes.

Tres de estos parámetros son parámetros intrínsecos de la pieza: su peso elástico G y las longitudes de los dos semiejes, a y b , de su elipse central de inercia.

Un parámetro corresponde a la orientación θ del semieje mayor " a " de la elipse y dos a la posición de su centro, o centro elástico de la pieza, coordenadas (x, y) .

En función de estos parámetros, la matriz $\{A\}$ se escribe:

$$\{A\} = G \begin{pmatrix} x^2 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta & x y + (b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta & (y^2 + b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) \\ (y x + (b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta) & x & y \\ x & y & y^2 + b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Adaptando por convenio la notación:

$$((x y z)) = \begin{pmatrix} x^2 & x y & x z \\ y x & y^2 & y z \\ z x & z y & z^2 \end{pmatrix}$$

y poniendo:

$$\begin{matrix} a_x = a \cos \theta & b_x = b \sin \theta \\ a_y = -a \sin \theta & b_y = b \cos \theta \end{matrix}$$

Resulta:

$$\{A\} = G((a_x \ a_y \ 0)) + G((b_x \ b_y \ 0)) + G((x y \ 1))$$

En lo que sigue introduciremos indistintamente una longitud arbitraria z en los vectores $\bar{d}$ y $\bar{S}$ de la forma:

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ z\varphi \end{pmatrix} \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} V \\ H \\ M \\ z \end{pmatrix}$$

Con lo cual la relación (1-1) se verifica para un valor de $\{A\}$.

$$\{A\} = G((a_x \ a_y \ 0)) + G((b_x \ b_y \ 0)) + G((xyz)) \quad [1-2]$$

Consideremos ahora una estructura sobre cuyos nudos "i" actúan sistemas de fuerzas $\bar{S}_i$, experimentando movimientos $\bar{d}_i$. Sea también $\bar{R}_{ij}$ la reacción del nudo "i" sobre la pieza A_{ij} .

La condición de equilibrio de los nudos de la estructura se escribe para el nudo i:

$$\sum_{j \text{ cont } i} \bar{R}_{ij} = \bar{S}_i \quad [1-3]$$

en la que $\sum_{j \text{ cont } i} \bar{R}_{ij}$ es la suma de todas las reacciones del nudo "i" sobre las piezas que concurren en él.

En virtud de la ecuación [1-1], la condición de equilibrio elástico de las piezas, escrita para la A_{ij} , se escribe:

$$\bar{d}_i - \bar{d}_j = \{A_{ij}\} \bar{R}_{ij} \quad [1-4]$$

Ya que la deformación intrínseca de la pieza A_{ij} es la misma que la de una ménsula A_{ij} empotrada en j sobre cuyo extremo "i" actúa $\bar{R}_{ij}$.

La ecuación [1-3], escrita para los N nudos de la estructura, y la [1-4] para las P piezas, nos suministran un sistema de $N + P$ ecuaciones vectoriales con $N + P$ incógnitas vectoriales (P reacciones y N movimientos) cuya solución teórica puede obtenerse fácilmente en forma matricial, pero cuya resolución numérica resulta inabordable.

Apartándonos del objetivo de esta sección, la resolución teórica del sistema de ecuaciones [1-3] y [1-4] se efectúa eliminando las reacciones $\bar{R}_{ij}$, despejadas de la [1-4]:

$$\bar{R}_{ij} = \{A_{ij}\}^{-1} (\bar{d}_i - \bar{d}_j) \quad [1-4']$$

y sustituidas en [1-3]:

$$\left[\sum_{j \text{ cont } i} \{A_{ij}\}^{-1} \right] \bar{d}_i - \sum_{\text{cont } i} \{A_{ij}\}^{-1} \bar{d}_j = \bar{S}_i$$

Sistema de ecuaciones que puede expresarse en forma matricial:

$$\{B\} \bar{d} = \bar{S} \quad [1-5]$$

En la cual $\bar{d}$ y $\bar{S}$ son los vectores de vectores

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \vdots \\ \bar{d}_N \end{pmatrix} \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \vdots \\ \bar{S}_N \end{pmatrix}$$

y $\{B\}$ es una matriz cuadrada simétrica $N \times N$, cuyas componentes $\{B_{ij}\}$ son, a su vez, matrices cuadradas 3×3 simétricas:

$$\text{si } i \neq j \quad \{B_{ij}\} = \begin{cases} -\{A_{ij}\}^{-1} & \text{si } j \text{ e } i \text{ son contiguas.} \\ 0 & \text{si } j \text{ e } i \text{ no son contiguas.} \end{cases}$$

$$\text{si } i = j \quad \{B_{ii}\} = \sum_{j \text{ cont } i} \{A_{ij}\}^{-1} \quad (\text{incluyendo el empotramiento como nudo } j=0)$$

Multiplicando los dos miembros de [1-5] por $\{B\}^{-1}$, nos resulta:

$$\bar{d} = \{B\}^{-1} \bar{S} \quad [1-6]$$

Fórmula que nos resuelve el problema de la determinación de los movimientos de los nudos, cuando actúan sistemas de fuerzas sobre ellos. La determinación de las reacciones se hará posteriormente utilizando las [1-4'].

La matriz $\{B\}$ es inmediata de obtención. No así la $\{B\}^{-1}$, que requiere la resolución de un sistema de $3N$ ecuaciones con $3N$ incógnitas.

II. Tensiones en los tripolos de una red de tripolos y corrientes en los mismos.

Consideremos un núcleo magnético como el de la figura 2-1, sobre el que se colocan tres arrollamientos de números de espiras $n_1 \ n_2 \ n_3$.

Si los tres arrollamientos forman parte de tres circuitos recorridos por corrientes senoidales puras de pulsación ω , dicho sistema de corrientes puede caracterizarse por el vector $\bar{i} = \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix}$, cuyas componentes

I, J, K son las expresiones complejas de las corrientes en cada uno de los circuitos.

Caracterizaremos igualmente las tensiones senoidales puras en los extremos de los devanados por los

vectores $\bar{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \bar{v}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$, cuyas componentes

uvw son las expresiones complejas de dichas tensiones.

Supondremos que el núcleo magnético no tiene pérdidas en el hierro ni los devanados en el cobre, y

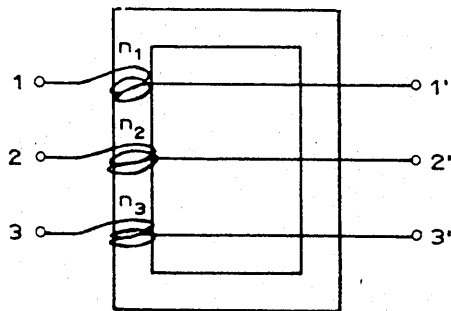


Figura 2-1.

que el coeficiente de acoplamiento de las bobinas es la unidad.

La circulación del sistema de corrientes $\vec{i}$, crea en el núcleo un flujo alterno senoidal, cuya expresión compleja es:

$$\Phi = \Lambda (n_1 I + n_2 J + n_3 K)$$

donde Λ es la permeancia magnética del circuito, que supondremos constante.

La variación senoidal del flujo induce en los arrollamientos una f.e.m. también senoidal retrasada 90° respecto al flujo. En un devanado de una espira la expresión de dicha f.e.m. es:

$$e = (j \Lambda \omega) (n_1 I + n_2 J + n_3 K)$$

o bien, poniendo $\Lambda \omega = H$ (reactancia de un devanado de una espira):

$$e = j H (n_1 I + n_2 J + n_3 K)$$

Las diferencias de tensiones entre las bornas ter-

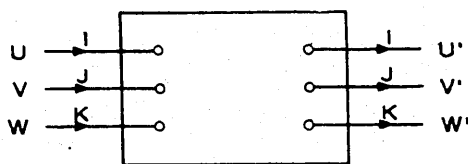


Figura 2-2.

minales de los arrollamientos las expresaremos (figura 2-2).

$$\begin{aligned} u - u' &= j H (n_1^2 I + n_1 n_2 J + n_1 n_3 K) \\ v - v' &= j H (n_2 n_1 I + n_2^2 J + n_2 n_3 K) \\ w - w' &= j H (n_3 n_1 I + n_3 n_2 J + n_3^2 K) \end{aligned}$$

En forma matricial expresaremos estas fórmulas:

$$\vec{v} - \vec{v}' = j H \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{pmatrix} \vec{i}$$

o bien en su forma reducida:

$$\boxed{\vec{v} - \vec{v}' = j H ((n_1 n_2 n_3)) \vec{i}} \quad [2-1]$$

Consideremos ahora el tridipolo formado por la yuxtaposición indicada en la figura 2-3 de tres núcleos, $H_p H_q H_n$, con arrollamientos de números de espiras $(p_1 p_2) (q_1 q_2) (n_1 n_2 n_3)$.

La relación que liga los vectores tensiones $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ con el vector intensidad $\vec{i}$, es:

$$\boxed{\vec{v} - \vec{v}' = j \{X\} \vec{i}} \quad [2-2]$$

donde $\{X\}$ es la matriz característica del tridipolo:

$$\boxed{\{X\} = H_p ((p_1 p_2 0)) + H_q ((q_1 q_2 0)) + H_n ((n_1 n_2 n_3))} \quad [2-3]$$

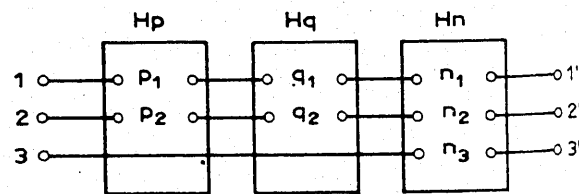


Figura 2-3.

Consideremos ahora una red de tridipolos cuyos nudos están formados por los tripolos "i" de los tridipolos X_{ij} . Sobre estos tripolos, inyectamos sistemas de corrientes $\vec{i}_i$, estableciéndose entonces sistemas de corrientes $\vec{i}_{ij}$ y de tensiones $\vec{v}_i$ en los tridipolos y en los tripolos, respectivamente.

Las leyes de los circuitos eléctricos, aplicadas a los tripolos, se escribe para el tripolo "i":

$$\boxed{\sum_{j \text{ cont } i} \vec{i}_{ij} = \vec{i}_i} \quad [2-4]$$

Aplicadas a los tridipolos, se escribe para el tridipolo X_{ij} como la [2-2]:

$$\boxed{\vec{v}_i - \vec{v}_j = j \{X_{ij}\} \vec{i}_{ij}} \quad [2-5]$$

La [2-4], escrita para los N tripolos de la red, y la [2-5], escrita para los P tridipolos, nos plantean un sistema de $(N+P)$ ecuaciones vectoriales con $(N+P)$ incógnitas vectoriales, N tensiones y P corrientes.

Si las corrientes inyectadas $\bar{i}_i$ tienen expresión real, es decir, su parte compleja es nula y, por lo tanto, dichas corrientes $\bar{i}_i$ están en fase o fase opuesta con la intensidad patrón, entonces el factor j afecta a todas las tensiones, es decir, que todas ellas estarán en cuadratura con la intensidad patrón, y el sistema puede plantearse con vectores cuyas componentes son reales, convirtiéndose la [2-5] en:

$$\boxed{\bar{v}_i - \bar{v}_j = \{X_{ij}\} \bar{i}_{ij}} \quad [2-5']$$

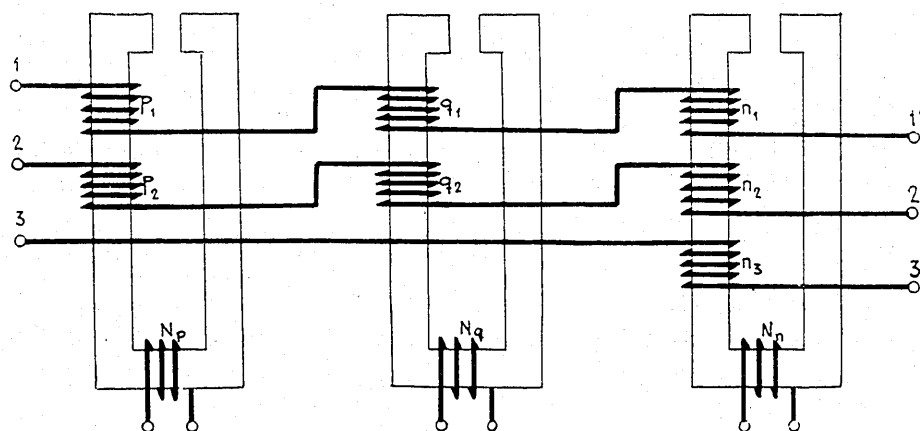


Figura 2-3 bis.

donde las componentes de $\bar{v}$ e $\bar{i}$ representan los valores algébricos de los valores eficaces.

La resolución del sistema de las [2-4] y [2-5] se efectúa como se hizo con [1-3] y [1-4], conduciendo a la solución análoga a la [1-6]:

$$\boxed{\bar{v} = j \{B\} \bar{i}} \quad [2-6]$$

con el mismo significado para los vectores de vectores:

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_N \end{pmatrix} \quad \bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \vdots \\ \bar{i}_N \end{pmatrix}$$

y para la matriz de matrices $\{B\}$.

Si el sistema de corrientes $\bar{i}$ está en fase o fase opuesta, entonces el sistema de tensiones $\bar{v}$ estará en cuadratura con ellas, pudiéndose escribir:

$$\boxed{\bar{v} = \{B\} \bar{i}} \quad [2-6']$$

III. Analogía entre la estructura reticulada plana y la red de tridipolos.

Las ecuaciones [1-3] y [1-4] presentan la misma forma que las [2-4] y [2-5'], de acuerdo con las descomposiciones de las matrices $\{A\}$ y $\{X\}$ dadas en [1-2] y [2-3].

Si construimos una red de tridipolos semejantes

a la de piezas de la estructura, el sistema de dichas ecuaciones [1-3], [1-4], [2-4] y [2-5'] se escribirá también de la misma forma, con tal que inyectemos en los tripolos de la red correspondiente a los nudos de la estructura, corrientes alternas senoidales puras, en fase o fase opuesta que se correspondan con los sistemas de fuerzas.

En estas condiciones resulta fácil plantear la analogía entre la pieza y el tridipolo, es decir, la semejanza entre sus características, y entre acciones y deformaciones, en la estructura y corrientes y tensiones en la red.

Esto lo hacemos escribiendo correlativamente las ecuaciones de la estructura y de la red:

$$\sum_{j \text{ cont } i} \bar{R}_{ij} = \bar{S}_i \quad \bar{d}_i - \bar{d}_j = \{A_{ij}\} \bar{R}_{ij}$$

$$\sum_{\text{cont } i} \bar{i}_{ij} = \bar{i}_i \quad \frac{l}{g} \bar{v}_i - \frac{l}{g} \bar{v}_j = \frac{l}{g} \{X_{ij}\} \bar{i}_{ij}$$

donde g es una constante.

Es decir, identificamos:

$$\begin{aligned} \overline{S_i} &\equiv \overline{i_i} \\ \overline{R_{ij}} &\equiv \overline{l_{ij}} \\ \overline{d_i} &\equiv \frac{l}{g} \overline{v_i} \end{aligned} \quad [3-1] \quad y$$

$$\{A_{ij}\} \equiv \frac{l}{g} \{X_{ij}\} \quad [3-2]$$

La [3-2] nos da la clave de la semejanza entre la pieza y el tridipolo.

$$\frac{\frac{p_1}{a_x}}{\sqrt{G/H_p}} = \frac{\frac{p_2}{a_y}}{\sqrt{G/H_p}} = \frac{\frac{q_1}{b_x}}{\sqrt{G/H_q}} = \frac{\frac{q_2}{b_y}}{\sqrt{G/H_q}} = \frac{\frac{n_1}{x}}{\sqrt{G/H_n}} = \frac{\frac{n_2}{y}}{\sqrt{G/H_n}} = \frac{\frac{n_3}{z}}{\sqrt{G/H_n}} = \sqrt{g} \quad [3-3]$$

Si todas las H de los tridipolos son iguales, entonces las [3-3] las escribiremos:

$$\frac{l}{\sqrt{G}} \left[\frac{p_1}{a_x} = \frac{p_2}{a_y} = \frac{q_1}{b_x} = \frac{q_2}{b_y} = \frac{n_1}{x} = \frac{n_2}{y} = \frac{n_3}{z} \right] = \sqrt{g/H} = \text{constante.} \quad [3-4]$$

IV. Reacciones y movimientos intrínsecos de las piezas.

Sean $\bar{d}^* = \begin{pmatrix} \eta^* \\ \xi^* \\ \varphi^* \end{pmatrix}$ y $\bar{R}^* = \begin{pmatrix} V^* \\ H^* \\ M^* \end{pmatrix}$ respectivamente, la deformación relativa del extremo frontal respecto al dorsal, y la reacción sobre el extremo frontal referi-

das a las de $\bar{R}^*$ y las de $\bar{R}^*$ con las de $\bar{R}$, son:

$$\begin{aligned} \eta^* &= G a^2 \cdot V^* \\ \xi^* &= G b^2 \cdot H^* \\ \varphi^* &= G \cdot M^* \end{aligned} \quad [4-1]$$

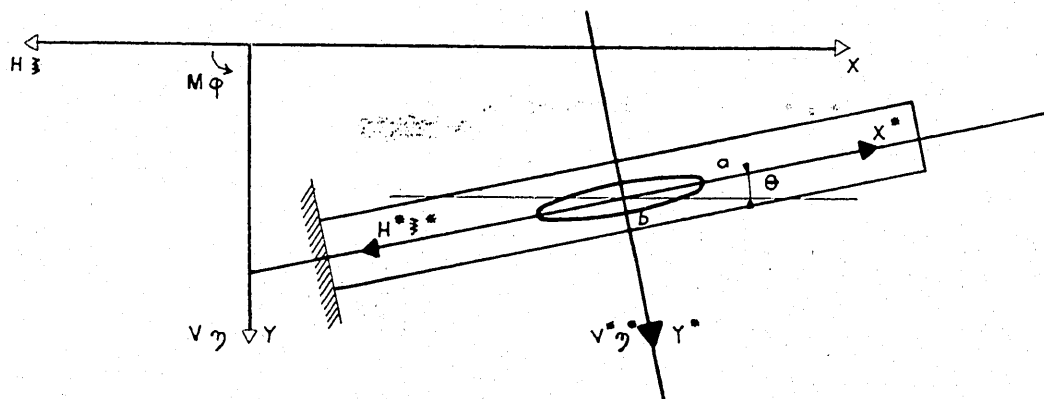


Figura 4-1.

dos al sistema de ejes que define la elipse central de inercia, orientada como se indica en la figura 4-1.

El significado de las componentes de $\bar{R}^*$ y $\bar{d}^*$ es, en la pieza recta de sección uniforme,

- V^* esfuerzo cortante (Q) cambiado de signo $V^* = -Q$
- H^* esfuerzo axial (N) de tracción cambiado de signo $H^* = -N$
- M^* momento flector (M_{fl}) en la sección central $M^* = M_{fl}$
- η^* traslación vertical del centro elástico
- ξ^* traslación horizontal del centro elástico
- φ^* giro del extremo frontal respecto al dorsal

$$\begin{aligned} V^* &= V \cos \theta - H \sin \theta \\ H^* &= V \sin \theta + H \cos \theta \\ M^* &= x \cdot V + y \cdot H + M \end{aligned} \quad [4-2]$$

Definamos en la red eléctrica los vectores tensión $\bar{v}^* = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{pmatrix}$ cuyas componentes son los valores eficaces de las tensiones inducidas en unos devanados de

medida abiertos, colocados sobre cada núcleo magnético de los tridipolos y de números de espiras N_p , N_q , N_n , respectivamente.

La relación que liga las componentes de $\bar{v}^*$ con las de $\bar{i}$ es:

$$\begin{aligned} u^* &= H_p \cdot N_p \cdot (p_1 I + p_2 J) = \frac{p}{N_p} (H_p \cdot N_p^2) \left(\frac{p_1}{p} I + \frac{p_2}{p} J \right) = \frac{N_p}{p} (H_p \cdot p^2) \left(\frac{p_1}{p} I + \frac{p_2}{p} J \right) \\ v^* &= H_q \cdot N_q \cdot (q_1 I + q_2 J) = \frac{q}{N_q} (H_q \cdot N_q^2) \left(\frac{q_1}{q} I + \frac{q_2}{q} J \right) = \frac{N_q}{q} (H_q \cdot q^2) \left(\frac{q_1}{q} I + \frac{q_2}{q} J \right) \\ w^* &= H_n \cdot N_n \cdot (n_1 I + n_2 J + n_3 K) = \frac{n_3}{N_n} (H_n \cdot N_n^2) \left(\frac{n_1}{n_3} I + \frac{n_2}{n_3} J + K \right) = \frac{N_n}{n_3} (H_n \cdot n_3^2) \left(\frac{n_1}{n_3} I + \frac{n_2}{n_3} J + K \right) \end{aligned} \quad [4-3]$$

Sustituyendo en estas fórmulas los valores de

$$\frac{p_1}{p} = \frac{q_2}{q} = \cos \theta, \quad -\frac{p_2}{p} = \frac{q_1}{q} = \sin \theta, \quad \frac{n_1}{n_3} = x, \quad \frac{n_2}{n_3} = y,$$

deducidas de [3-3] y aplicando la semejanza entre sistema de fuerzas y de corrientes [3-3] y la [4-2]:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{N_p}{p} (p^2 H_p) V^* = \frac{p}{N_p} (N_p^2 H_p) \cdot V^* \\ v^* &= \frac{N_p}{q} (q^2 H_q) H^* = \frac{q}{N_q} (N_q^2 H_q) \cdot H^* \\ w^* &= \frac{N_n}{n_3} (n_3^2 H_n) M^* = \frac{n_3}{N_n} (N_n^2 H_n) \cdot M^* \end{aligned} \quad [4-4]$$

Si en estas fórmulas hacemos $N_p = p \gg N_q = q \gg N_n = n_3$, y tenemos en cuenta las expresiones de $p^2 H_p$, $q^2 H_q$, $n_3^2 H_n$, dadas en [3-3], nos resulta:

$$u^* = g G \cdot a^2 \cdot V^* = g \cdot \eta^*$$

$$v^* = g G \cdot b^2 \cdot H^* = g \cdot \xi^*$$

$$w^* = g G \cdot M^* = g \cdot \varphi^*$$

que vectorialmente escribiremos:

$$\bar{d}^* = \frac{l}{g} \bar{v}_{pqn}^* \quad [4-5]$$

Si en las fórmulas [4-4] ponemos:

$$X_{mp} = N_p^2 \cdot H_p, \quad X_{mq} = N_q^2 \cdot H_q, \quad X_{mn} = N_n^2 \cdot H_n$$

y despejamos los valores de las componentes de $\bar{R}^*$:

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{N_p}{p} \frac{u^*}{X_{mp}} \\ H^* &= \frac{N_q}{q} \frac{v^*}{X_{mq}} \\ M^* &= \frac{N_n}{n_3} \frac{w^*}{X_{mn}} \end{aligned} \quad [4-6]$$

La fórmula [4-5] pone claramente de manifiesto que la analogía estudiada se extiende también a la correspondencia entre $\bar{d}^*$ y $\bar{v}_{pqn}^*$.

Las [4-6] se prestan muy bien al cálculo de las reacciones intrínsecas y se aplica muy sencillamente en el caso en que todas las N_p , N_q , N_n , son iguales a N :

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{N}{p} \frac{u^*}{X} \\ H^* &= \frac{N}{q} \frac{v^*}{X} \\ M^* &= \frac{N}{n_3} \frac{w^*}{X} \end{aligned} \quad [4-7]$$

V. Obtención de los valores propios de la estructura y red análoga.

La ordenación sistemática de los cálculos para la obtención de los valores propios de las piezas de una estructura, está indicada en el cuadro núm. 1, preparado para la estructura de la figura 5-1, de 5 piezas y 3 nudos de piezas normales.

Todos los tridipolos de la red están constituidos por núcleos magnéticos de la misma H , por lo que aplicaremos las fórmulas de semejanza [3-4] para la obtención de los 7 números de espiras (p_1 , p_2) (q_1 , q_2) (n_1 , n_2 , n_3), únicas características de cada tridipolo.

La ordenación de los cálculos es la siguiente:

1.º Nomenclatura de las piezas y obtención de las características elásticas intrínsecas:

(1) $\gamma = \sqrt{G/G_0}$, donde G_0 es un peso elástico patrón.

(2) y (3), semiejes a y b de la elipse central de inercia, en cm.

2.º Numeración de los nudos, con la consiguiente elección del sentido de las piezas.

3.º Elección de un sistema coordenado como el de la figura 1-1.

(4) Definición del ángulo θ , formado por el semi-eje a y OX .

(5) y (6) Coordenadas x e y (en cm.) de los centros elásticos de las piezas.

(7) Elección de la longitud Z para toda la estructura.

Hasta aquí todos los datos han sido primarios, característico de las piezas. (8), (9), (10), (11), (12) y (13), a_x , a_y , a , b_x , b_y , b , datos deducidos de los anteriores.

4.º Deducción de las líneas (14) a (22).

5.º Elección de la constante λ , que relacionará las

$$a \sim \frac{L/1 \text{ cm.}}{\sqrt{12}}; \quad b \sim \frac{C/1 \text{ cm.}}{\sqrt{12}}.$$

$$\text{Piezas A B y C } \gamma^2 = \frac{600}{125} = 4,8 \quad \gamma = 2,19;$$

$$a = \frac{600}{\sqrt{12}} = 173; \quad b = \frac{50}{\sqrt{12}} = 14,4.$$

$$\text{Piezas D y E } \gamma^2 = \frac{1000}{125} = 8 \quad \gamma = 2,83;$$

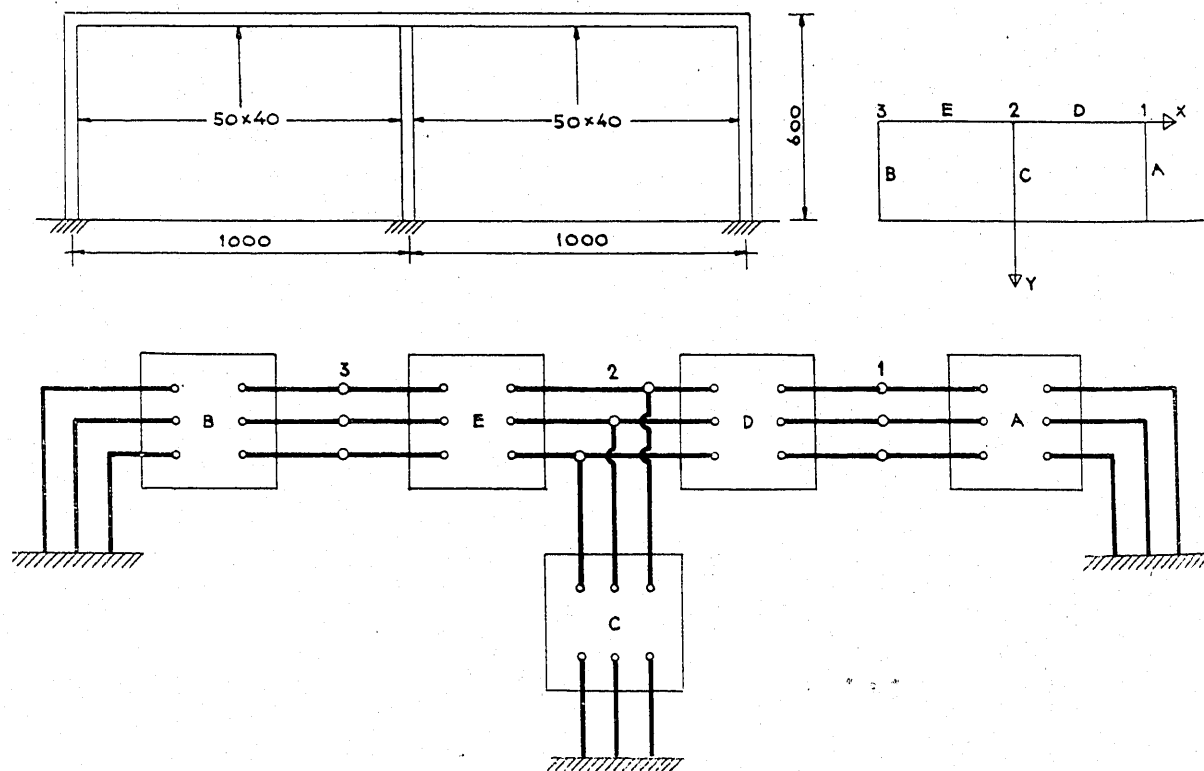


Figura 5-1.

líneas (14) a (22) con las (23) a (31), de forma que los números de espiras resultantes caigan dentro del campo de las que disponemos en las bobinas:

$$\text{La relación entre } \lambda \text{ y } g \text{ es } g = \frac{H}{G_0} \lambda^2.$$

Conviene señalar bien los signos de las espiras para conectar debidamente los circuitos. Además se habrá de verificar $p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0$.

Para el pórtico de la figura 5-1, los datos iniciales son:

$$G = \frac{L}{E I} = \frac{12}{E b} \frac{L}{C^3} \quad G_0 = \frac{12}{E b} =$$

$$= 1,5 \times 10^{-7} \quad \gamma^2 = \frac{L/1 \text{ cm.}}{(c/1 \text{ cm.})^3};$$

$$a = \frac{1000}{\sqrt{12}} = 289; \quad b = \frac{50}{\sqrt{12}} = 14,4.$$

VI. Conexiones, medidas y obtención de las reacciones.

Obtenidos del cuadro I los números de espiras de los núcleos, no queda ya sino conectarlos debidamente, primero, formando los tridipolos, y luego, acoplado éstos análogamente a como lo están las piezas de la estructura, como se indica, por ejemplo, en el esquema de la figura 5-1.

Un sistema de cargas cualquiera viene represen-

CUADRO I.—Piezas normales.

		Piezas	A.	B.	C.	D.	E.
1		G/G_0	2,19	2,19	2,19	2,83	2,83
2	a (cm.)		173	173	173	289	289
3	b (cm.)		14,4	14,4	14,4	14,4	14,4
4	θ		90°	90°	90°	180°	180°
5	x (cm.)		1 000	— 1 000	0	500	500
6	y (cm.)		300	300	300	0	0
7	z (cm.)	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000
8	a_x	$a \cos \theta$	0	0	0	— 289	— 289
9	a_y	$-a \sin \theta$	— 173	— 173	— 173	0	0
10	(a)	a	173	173	173	289	289
11	b_x	$b \sin \theta$	14,4	14,4	14,4	0	0
12	b_y	$b \cos \theta$	0	0	0	— 14,4	— 14,4
13	(b)	b	14,4	14,4	14,4	14,4	14,4
14	x		2 190	— 2 190	0	1 415	— 1 415
15	y		657	657	657	0	0
16	z		2 190	2 190	2 190	2 830	2 830
17	a_r		0	0	0	— 818	— 818
18	a_y		— 379	— 379	— 379	0	0
19	a		379	379	379	818	818
20	b_x		31,5	31,5	31,5	0	0
21	b_y		0	0	0	— 40,7	— 40,7
22	b		31,5	31,5	31,5	40,7	40,7
23	n_1	x	+ 2 190	— 2 190	0	+ 1 415	— 1 415
24	n_2	y	+ 657	+ 657	+ 657	0	0
25	n_3	z	+ 2 190	+ 2 190	+ 2 190	+ 2 830	+ 2 830
26	p_1	a_x	0	0	0	— 818	— 818
27	p_2	a_y	— 379	— 379	— 379	0	0
28	p	a	379	379	379	818	818
29	q_1	b_x	32	32	32	0	0
30	q_2	b_y	0	0	0	— 41	— 41
31	q	b	32	32	32	41	41

tado por los elementos de un cuadro como el siguiente:

Hipótesis de carga.

NUDO		1	2	3
Componente vertical . . .	V.			
» horizontal . . .	H.			
Momento	$\frac{M}{Z}$			

A dicho sistema de cargas corresponderá un sistema de corrientes inyectadas en los nudos, representado en el cuadro siguiente:

Corrientes inyectadas en los nudos.

NUDO		1	2	3
Intensidad.	I			
»	J			
»	K			

El sistema de corrientes inyectadas nos producirá en las bobinas de medida de los núcleos, que supondremos todas del mismo número de espiras, N , un sistema de tensiones $\bar{v}^*$, que representaremos en el cuadro:

Sistema de tensiones.

Pieza	A.	B.	C.	D.	E.
u^*					
v^*					
w^*					

A este cuadro de sistema de tensiones corresponderá un cuadro de sistema de reacciones R^* , dado por las fórmulas [4-7].

Para determinarlo, partiremos del cuadro II, que es un cuadro de valores propios de la red de tridipolos.

CUADRO II.

Pieza	A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{N}{P} \frac{l}{X_m}$					
$\frac{N}{q} \frac{l}{X_m}$					
$\frac{N}{M_s} \frac{l}{X_m}$					

Multiplicando los elementos del cuadro "Sistema de tensiones" por los elementos análogos del cuadro II, obtendremos el cuadro de "Reacciones R^* ":

"Reacciones R^* ".

Piezas	A.	B.	C.	D.	E.
V^*					
H^*					
$\frac{M^*}{Z}$					

Que constituye el final del proceso de cálculo.

VII. Realización y limitaciones del método.

Las limitaciones que tiene este método son las que resultan de la comparación del tridipolo ideal que sirve de base a la analogía y el tridipolo material que nosotros podremos construir.

Este último estará constituido por tres núcleos de

hierro con un cierto entrehierro y las siete bobinas de números de espiras $p_1 p_2, q_1 q_2, n_1 n_2 n_3$.

La forma óptima de los núcleos, desde el punto de vista teórico, es la toroidal, la cual no es conveniente desde el punto de vista constructivo y de las dificultades para la colocación de los arrollamientos.

Desde el punto de vista práctico, la forma más conveniente es la "EI". Los arrollamientos, organizados en bobinas independientes, se alojan en la parte intermedia de la E, de sección cuadrada o rectangular.

No necesitaremos disponer más que de un cierto número de núcleos, todos iguales (tantos como tres veces el número de piezas), y un juego de bobinas.

Los puntos de discrepancia entre estos tridipolos y el ideal son los cuatro siguientes:

1.º La variación de la permeancia magnética del circuito y, por lo tanto, de la reactancia por espira // Esta variación, que deforma la forma de la onda senoidal, se disminuye aumentando el entrehierro, que debe ser el sumando principal entre los que determinan la resistencia magnética del circuito. Se disminuye también utilizando materiales cuya permeabilidad magnética varíe poco con la inducción.

2.º El factor de acoplamiento de las bobinas no es la unidad, puesto que siempre existen flujos de fugas no concatenados con todas las espiras. La disminución del entrehierro y del espesor de las bobinas favorece la aproximación a las condiciones ideales, así como la utilización de materiales de alta permeabilidad.

3.º La resistencia óhmica de los devanados no es nula. La influencia puede medirse por el parámetro

$Q = \frac{X}{R_e}$ (reactancia de un arrollamiento dividido por su resistencia óhmica). Favorecen a este factor el aumento de dimensiones de los núcleos y de las bobinas, la disminución del entrehierro y el aumento de la frecuencia de las corrientes inyectadas.

4.º Las pérdidas en el hierro no son nulas. Puede medirse su influencia por el parámetro $h = \frac{P}{P_h}$ (co-

eficiente de las pérdidas en el cobre de las bobinas, a las pérdidas en el hierro para la frecuencia utilizada y la inducción máxima). Conviene que tenga valores discretos, del orden de la unidad o menores, lo cual se favorece aumentando el entrehierro y disminuyendo la frecuencia, utilizando materiales especiales.

De estas cuatro consideraciones resulta un compromiso entre las variables que intervienen en el diseño de los tridipolos y de la frecuencia conveniente: forma geométrica, entrehierro, espesor de las bobinas, frecuencia, etc.

Solamente el volumen del núcleo y la utilización de materiales especiales de alta permeabilidad, favorecen de todas formas la realización del núcleo ideal, pudiéndose lograr con núcleos de tamaño discreto, del orden de 500 gr.