

ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO CONSIDERADO COMO SUPERFICIE DE TRASLACION

Por IGNACIO CANALS y JORGE MOLINA MONTES

Ingeniero.

Arquitecto.

El presente artículo es una de las ponencias presentadas en la XII Asamblea Internacional del Instituto Americano del Hormigón, celebrada en México O. F. en noviembre de 1953.

Se hace una exposición teórica de cómo determinar las funciones que aparecen indeterminadas en la integración de la ecuación diferencial, para conseguir las condiciones de borde deseadas.

Se presenta un cálculo con todo detalle de un cascarón de 4 cm. de espesor, cubriendo una superficie de 15 x 15 m. Con los cuales se ha construido la fábrica de cartón "Empaques Modernos San Pablo, S. A.", en las cercanías de la ciudad de México, que se ha inaugurado en diciembre de 1960.

El cálculo se desarrolla con base en la teoría de A. Pucher para superficies de pequeño espesor.

Introducción.

El interés en los cascarones de hormigón armado ha venido aumentando rápidamente debido a que presentan características de importancia especial, entre las cuales se cuentan tanto las de índole económica cuanto las estéticas. Los paraboloides hiperbólicos se han empleado extensamente en su expresión más sencilla, limitados por una generatriz rectilínea; en tanto que el empleo de estas superficies, combinadas entre sí por medio de secciones parabólicas, no se ha llegado aún a desarrollar al grado que corresponde a sus excelentes posibilidades, y esto debido a las mayores dificultades que su cálculo implica.

En esta ponencia el paraboloides hiperbólico se considera como superficie de traslación, lo cual facilita su cálculo y la obtención de las funciones determinadas por las condiciones de borde.

Definición de la superficie.

Considérese la ecuación $Z = \frac{\gamma}{2} y^2 - \frac{\delta}{2} x^2$, que representa una superficie de traslación generada por la parábola $Z = \frac{\gamma}{2} y^2$, la cual, permaneciendo paralela al plano yz , se desliza a lo largo de la parábola $Z = -\frac{\delta}{2} x^2$.

En la figura 1.ª el origen de las coordenadas se encuentra en el punto "O":

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}; & \cos^2 \frac{\omega}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma + \delta}; & \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2} &= \frac{\delta}{\gamma + \delta}; \\ \cos \omega &= \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta}; & \operatorname{sen} \omega &= \frac{2\sqrt{\gamma\delta}}{\gamma + \delta}. \end{aligned} \quad [1.1]$$

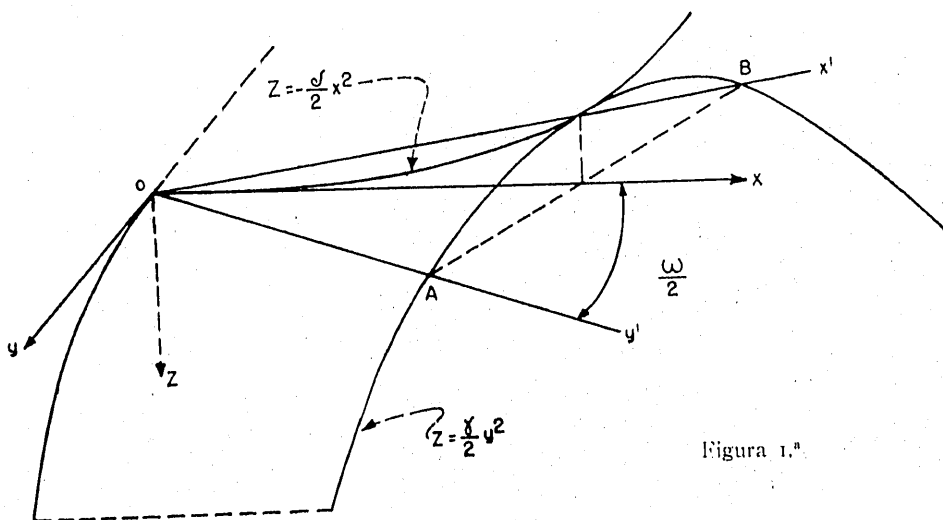


Figura 1.ª

Análisis de los esfuerzos.

En la publicación (*), Pucher definió la función de las fuerzas elásticas en una membrana mediante una sola ecuación diferencial considerando un tensor oblicuo de fuerzas elásticas. Si en dichas condiciones suponemos que todas las fuerzas externas actúan paralelamente al eje Z , tendremos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -Z_0. \quad [2.1]$$

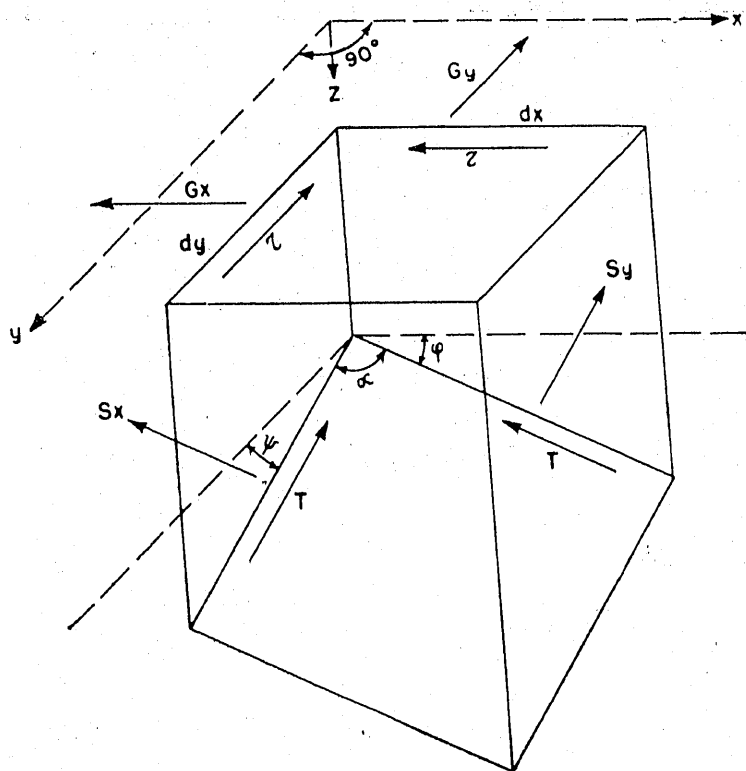


Figura 2.ª

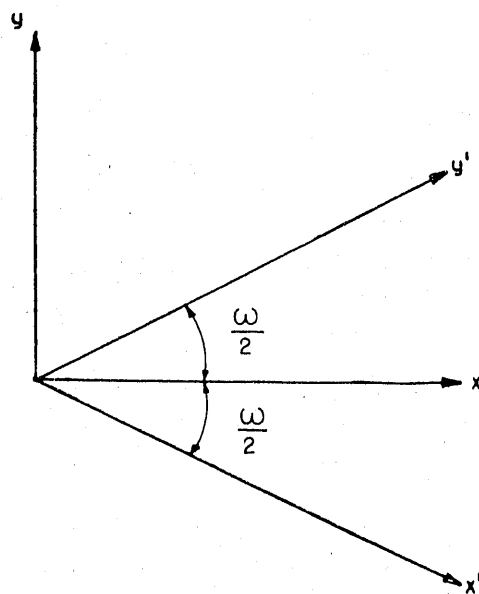


Figura 3.ª

En donde Z_0 es la fuerza por unidad de área proyectada, que en el presente caso es: $g dA = Z dx dy$; "g" es el peso por unidad de área del concreto, dependiendo del espesor que se le dé a la superficie:

$$\begin{aligned} g \frac{dx}{\cos \varphi} \frac{dy}{\cos \psi} \sin \alpha &= Z_0 dx dy; \\ Z_0 &= g \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi \cos \psi} = g \sqrt{1 + p^2 + q^2}; \\ \operatorname{tg} \varphi = p &= \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \operatorname{tg} \psi = q = \frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned} \quad [2.2]$$

Siendo F la función de las fuerzas elásticas, tendremos:

$$G_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad G_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad [2.3]$$

(*) Pucher, A.: "Ueber den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen". *Beton und Eisen*, v. 33, núm. 19, octubre 1934.

Aplicando la ecuación [2.1] al paraboloide hiperbólico:

$$Z = \frac{\gamma}{2} y^2 - \frac{\delta}{2} x^2,$$

obtenemos la siguiente ecuación:

$$\gamma \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -g \sqrt{1 + \delta^2 x^2 + \gamma^2 y^2}. \quad [3.0]$$

Mediante el siguiente cambio de variables:

$$x = (x' + y') \cos \frac{\omega}{2}; \quad y = (y' - x') \sin \frac{\omega}{2}, \quad [3.1]$$

del cual despejamos x' , y'

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{2 \cos \frac{\omega}{2}} - \frac{y}{2 \sin \frac{\omega}{2}}; & y' &= \frac{x}{2 \cos \frac{\omega}{2}} + \frac{y}{2 \sin \frac{\omega}{2}}; \\ \frac{\partial (x, y)}{\partial (x', y')} &= \sin \omega \text{ (Jacobiano de la transformación)}. \end{aligned} \quad [3.2]$$

Obtenemos la ecuación del paraboloide en la siguiente forma:

$$Z = -x' y' \sqrt{\gamma \delta} \sin \omega.$$

Expresando la segunda derivada de F con respecto a x e y como una función de las nuevas variables x' e y' y aplicando la ecuación [3.2], se tiene:

$$\left. \begin{aligned} G y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} \right) \frac{\partial (x, y)}{\partial (x', y')} \\ G x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} \right) \frac{\partial (x, y)}{\partial (x', y')} \\ -\tau &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4 \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega}{2}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \right) \frac{\partial (x, y)}{\partial (x', y')} \end{aligned} \right\} \frac{\partial (x, y)}{\partial (x', y')} = \sin \omega. \quad [3.3]$$

Sustituyendo [3.3] en [3.0], tomando en cuenta [1.1], y haciendo $k = \sqrt{\delta \gamma}$, obtenemos:

$$-\tau' = \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = -\frac{g}{2k} \sqrt{1 + k^2 x'^2 + k^2 y'^2 - 2k^2 x' y' \cos \omega}. \quad [3.4]$$

Ya con estos resultados podemos calcular el valor de $\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}$; y $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$; por consiguiente, podemos obtener los valores G_x , G_y y τ mediante la ecuación [3.3]:

$$\begin{aligned}
 G_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'^2} dx' = - \int \frac{g}{2k} \frac{k^2 y' - k^2 x' \cos \omega}{\sqrt{\Phi'}} dx'; \\
 \sqrt{\Phi'} &= \sqrt{1 + k^2 x'^2 + k^2 y'^2 - 2k^2 x' y' \cos \omega} = \sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega + (k x' - k y' \cos \omega)^2}; \\
 G_x &= \frac{g}{2k} \cos \omega \sqrt{\Phi'} - \frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e \left[\frac{k x' - k y' \cos \omega}{\sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega}} + \sqrt{1 + \left(\frac{k x' - k y' \cos \omega}{\sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega}} \right)^2} \right] + f_1(y'); \\
 \varphi_1(x', y') &= \frac{k x' - k y' \cos \omega}{\sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega}}; \quad \varphi_2(x', y') = \frac{k y' - k x' \cos \omega}{\sqrt{1 + k^2 x'^2 \sin^2 \omega}}; \\
 -G_x &= -\frac{g}{2k} \cos \omega \sqrt{\Phi'} + \frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e [\varphi_1 + \sqrt{1 + \varphi_1^2}] + f_1(y'); \\
 -G_y &= -\frac{g}{2k} \cos \omega \sqrt{\Phi'} + \frac{g}{2} x' \sin^2 \omega \log_e [\varphi_2 + \sqrt{1 + \varphi_2^2}] + f_2(x').
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Estas ecuaciones concuerdan con las publicadas por el Arquitecto D. Félix Candela (*), excepto que el señor Candela deja en el término $\frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e [k x' - k y' \cos \omega + \sqrt{\Phi'}]$ de la ecuación 17-a, una función de y' que puede incluirse en $f_1(y')$, en efecto:

$$\begin{aligned}
 &\frac{g}{2k} k y' \sin^2 \omega \log_e [k x' - k y' \cos \omega + \sqrt{\Phi'}]; \\
 &\frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e [k x' - k y' \cos \omega + \sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega + (k x' - k y' \cos \omega)^2}]; \\
 &\frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e \left[k x' - k y' \cos \omega + \sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{k x' - k y' \cos \omega}{\sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega}} \right)^2} \right]; \\
 &\frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e [\sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega}] + \frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e \left[\frac{k x' - k y' \cos \omega}{\sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega}} + \sqrt{1 + \left(\frac{k x' - k y' \cos \omega}{\sqrt{1 + k^2 y'^2 \sin^2 \omega}} \right)^2} \right].
 \end{aligned}$$

Como puede verse, el primer término de esta ecuación es función de y' , que puede incluirse en $f_1(y')$, con lo cual se llega a la ecuación [3.5] de esta ponencia.

Es interesante hacer notar que $\varphi_1(y', x') = \varphi_2(x', y')$; por consiguiente, G_x y G_y son simétricas respecto a la primera bisectriz, si prescindimos de f_1 y f_2 , teniendo en cuenta que: $\varphi_1(-y', -x') = \varphi_2(x', y')$ y

$$\log_e [-\varphi_2 + \sqrt{1 + \varphi_2^2}] = -\log_e [\varphi_2 + \sqrt{1 + \varphi_2^2}],$$

G_y y G_x son también simétricos con relación a la segunda bisectriz, lo cual hace que la ecuación [3.5] sea aplicable a todos los cuadrantes.

En el caso de que $\omega = 90^\circ$, $\varphi_1(x', y') = \frac{k x'}{\sqrt{1 + k^2 y'^2}}$; entonces $\varphi_1(-x', y') = -\varphi_1(x', y')$, y $G_x = -G_{-x'}$, es decir, que los esfuerzos son simétricos en relación con las generatrices que pasan por el origen.

(*) "Aplicaciones estructurales de los cascarones paraboloidales hiperbólicos". *Revista del Instituto Americano del Concreto*, título núm. 51-20.

Condiciones de borde bajo una carga uniformemente distribuida en el sentido del eje "Z".

Condición de borde para una sección vertical según una parábola principal.

La razón entre los esfuerzos de diseño y los esfuerzos reales es la siguiente:

$$S_x = G_x \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}; S_y = G_y \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}; T = \tau.$$

Como podemos observar en la ecuación [3.4], los esfuerzos tangenciales en la dirección de la generatriz no pueden anularse en punto alguno. En cambio, la ecuación [3.3] nos muestra que los esfuerzos tangenciales en

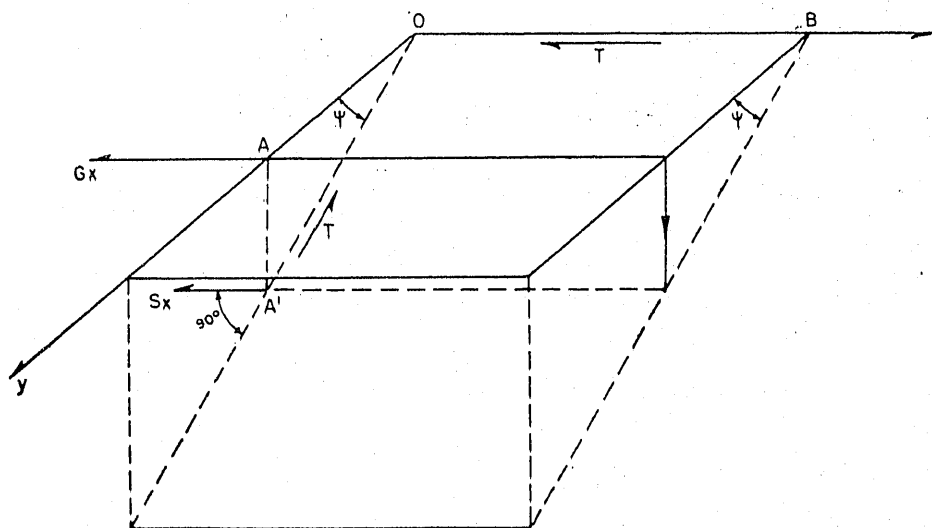


Figura 4.ª

la dirección de las parábolas principales pueden hacerse iguales a cero, simplemente realizando la igualdad $G_y' = G_x' y$, por tanto, obtener como una condición de borde, una parábola principal libre de empujes. Obtendremos así condiciones que nos permitan calcular el valor de las funciones $f_1(y')$ y $f_2(x')$ en la ecuación [3.5].

OAA' es la sección principal del paraboloides hiperbólico en el cual:

$$\varphi = 0; \frac{dz}{dy} = \gamma y = \lg \psi.$$

Como todavía nos resta otra condición de libertad que debemos fijar, veamos si con ello es posible anular los esfuerzos longitudinales G_x y G_y ; según la ecuación [3.3], para $G_x = 0$ se requiere que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}.$$

Resulta obvio que si deseamos dejar un borde constituido por un corte vertical según una parábola principal, que quede exento de cualquier esfuerzo, es suficiente que hagamos:

$$\begin{aligned} &\text{o bien} \quad \left. \begin{aligned} G_{x'} &= G_{y'} = \tau && \text{para} && x' = y' \\ G_{x'} &= G_y = -\tau && \text{para} && x' = -y' \end{aligned} \right\} \quad [4.2] \end{aligned}$$

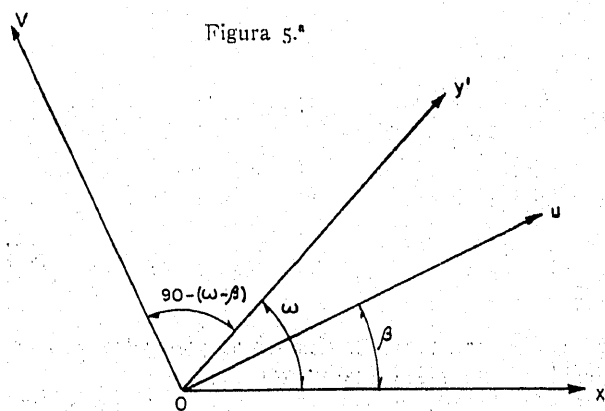


Figura 5.ª

Condición de borde para una sección vertical según cualquier parábola.

Deseamos tener libre de esfuerzos un miembro de borde obtenido por la intersección de un plano vertical con el paraboloides; supongamos que dicho plano forma un ángulo β con el eje x' .

Para obtener este resultado debemos hacer que:

$$G_v = 0 \quad y \quad \tau_v = 0,$$

pues si los esfuerzos proyectados sobre el plano x' o y' son nulos, también lo serán los esfuerzos reales sobre la membrana, excepto en el caso que alguno de ellos fuese perpendicular al plano de proyección:

$$u = x' \cos \beta + y' \cos (\omega - \beta); \quad v = -x' \sin \beta + y' \sin (\omega - \beta);$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= u \frac{\sin (\omega - \beta)}{\sin \omega} - v \frac{\cos (\omega - \beta)}{\sin \omega} \\ y' &= u \frac{\sin \beta}{\sin \omega} + v \frac{\cos \beta}{\sin \omega} \end{aligned} \right\} \frac{\partial (u, v)}{\partial (x', y')} = \cos \beta \sin (\omega - \beta) + \cos (\omega - \beta) \sin \beta = \sin \omega;$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\sin (\omega - \beta)}{\sin \omega} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\sin \beta}{\sin \omega};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \cdot \frac{\sin^2 (\omega - \beta)}{\sin^2 \omega} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \omega} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} \cdot \frac{2 \sin \beta \sin (\omega - \beta)}{\sin^2 \omega} \right) \frac{\partial (u, v)}{\partial (x', y')};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \cdot \frac{-\sin (\omega - \beta) \cos (\omega - \beta)}{\sin^2 \omega} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin^2 \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} \cdot \frac{\sin (\omega - \beta) \cos \beta - \sin \beta \cos (\omega - \beta)}{\sin^2 \omega} \right) \frac{\partial (u, v)}{\partial (x', y')}; \end{aligned}$$

$$G_v = G x' \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\sin \omega} + G y' \cdot \frac{\sin^2 (\omega - \beta)}{\sin \omega} - 2 \tau' \frac{\sin \beta \sin (\omega - \beta)}{\sin \omega} = 0;$$

$$\tau_v = G x' \cdot \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin \omega} + G y' \cdot \frac{-\sin (\omega - \beta) \cos (\omega - \beta)}{\sin \omega} - \tau' \frac{\sin (\omega - 2 \beta)}{\sin \omega} = 0;$$

$$G x' = \tau' \frac{\sin (\omega - \beta)}{\sin \omega}; \quad G y' = \tau' \frac{\sin \beta}{\sin (\omega - \beta)};$$

estas igualdades deben cumplirse a lo largo de:

$$y' = \frac{\sin \beta}{\sin (\omega - \beta)} x'; \quad m = \frac{\sin \beta}{\sin (\omega - \beta)}; \quad y' = m x'.$$

Sustituyendo τ' , $G x'$ y $G y'$ por los valores obtenidos según las fórmulas [3.4] y [3.5], tenemos:

$$f_1(y') = \frac{-g}{2km} \sqrt{\Phi' \left(\frac{y'}{m}, y' \right)} + \frac{g}{2k} \cos \omega \sqrt{\Phi' \left(\frac{y'}{m}, y' \right)} + \frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e \left[\varphi_1 \left(\frac{y'}{m}, y' \right) + \sqrt{1 + \varphi_1^2 \left(\frac{y'}{m}, y' \right)} \right];$$

$$f_2(x') = \frac{-g}{2k} m \sqrt{\Phi' (x', m x')} + \frac{g}{2k} \cos \omega \sqrt{\Phi' (x', m x')} + \frac{g}{2} x' \sin^2 \omega \log_e \left[\varphi_2 (x', m x') + \sqrt{1 + \varphi_2^2 (x', m x')} \right].$$

Condiciones de borde para un corte vertical paralelo a la generatriz.

Para estas condiciones de borde se ha demostrado que es imposible anular los esfuerzos tangenciales; sin embargo, los esfuerzos longitudinales pueden hacerse igual a 0, dando valores apropiados a $f_1(y')$ y a $f_2(x')$. Aplicando fórmulas [3.5]:

$$x' = a; \quad G x' = 0;$$

$$f_1(y') = \frac{g}{2k} \cos \omega \sqrt{\Phi' (a, y')} - \frac{g}{2} y' \sin^2 \omega \log_e \left[\varphi_1 (a, y') + \sqrt{1 + \varphi_1^2 (a, y')} \right].$$

Ejemplo numérico.

El problema consiste en cubrir un área de 15×15 m. con un cascarón paraboloides hiperbólico, en el cual todos sus bordes queden exentos de todo esfuerzo o empuje.

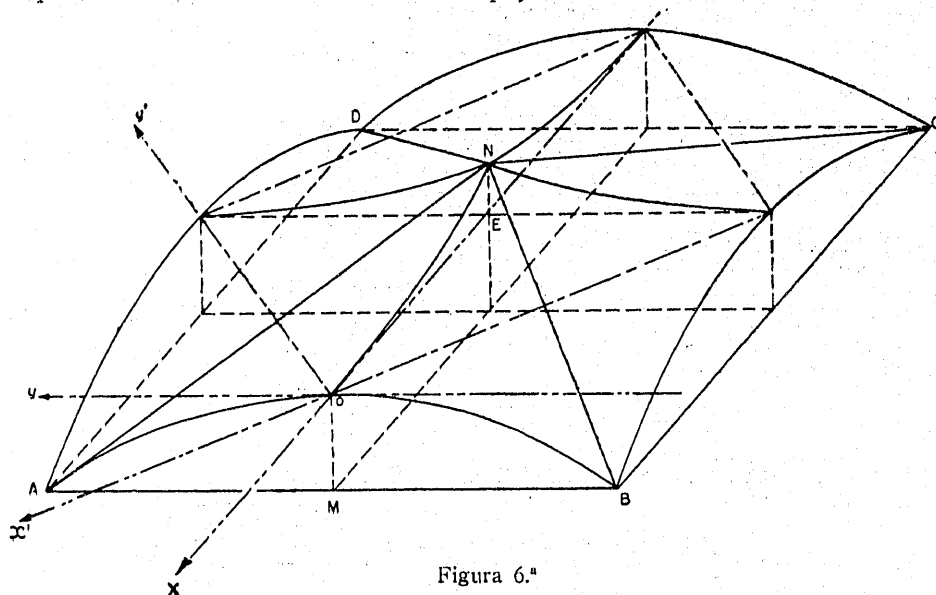


Figura 6.ª

Definición de la superficie.

$$OM = NE = 1.5 \text{ m.} \quad y = 0; \quad Z = -\frac{\delta}{2} x^2;$$

$$AM = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ m.} \quad x = 0; \quad Z = \frac{\gamma}{2} y^2,$$

por lo tanto:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\delta}{2} = \frac{OM}{(AM)^2}; \quad \delta = \frac{2 OM}{(AM)^2}; \quad k = \sqrt{\gamma \delta}; \quad \text{tg } \frac{\omega}{2} = 1; \quad \omega = 90^\circ; \quad k = 2 \frac{1.5}{\left(\frac{15}{2}\right)^2} = 0,053,$$

y la ecuación de un segmento del cascarón resulta ser $Z = 0,053 x' y'$. Dado que según antes expresamos, vamos a dejar libres de todo esfuerzo los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, el peso de la estructura debe transmitirse a los apoyos exclusivamente al través de los elementos de intersección $\overline{BN}$, $\overline{CN}$, $\overline{DN}$ y $\overline{AN}$. El cascarón por sí mismo transmite las fuerzas a dichos elementos de dos distintos modos: uno, según los esfuerzos tangenciales que actúan paralelamente a tales elementos, y otro, mediante los esfuerzos normales que debido a las condiciones de simetría sólo tiene componentes verticales sobre los elementos referidos. Por razones de simetría resulta obvio que sólo se requiere analizar una octava parte de la superficie total.

Esfuerzos tangenciales.

Como se demostró previamente, los valores de estos esfuerzos tangenciales, que son independientes de las condiciones de borde, presentan un valor indicado por la fórmula [3.4] y actúan paralelamente a los elementos de intersección. Es de interés especial conocer el valor máximo de la fuerza de compresión que actúa sobre los miembros y que en el presente caso se presenta en las cuatro esquinas. Las etapas que hay que seguir son, dado que $\omega = 90^\circ$, y según la ecuación [3.4], $\tau' = \frac{g}{2k} \sqrt{1 + k^2 x'^2 + k^2 y'^2}$; a lo largo de $\overline{AN}$: $y = c$, la longitud real del elemento puede expresarse como $ds = \frac{dx'}{\cos \varphi}$, siendo φ , en este caso, el ángulo que el elemento de intersección forma con el plano horizontal:

$$\text{tg } \varphi = \frac{3}{\sqrt{7.5^2 + 7.5^2}}; \quad \varphi = 15^\circ 47'.$$

Expresando la fuerza máxima de compresión como $C_{\text{máx.}}$, se tiene:

$$C_{\text{máx.}} = \int_{-a}^a \tau ds = \int_{-a}^a \frac{\tau dx'}{\cos \varphi} = \frac{g}{2k \cos \varphi} \int_{-a}^a \frac{1 + k^2 c^2 + k^2 x'^2}{\sqrt{1 + k^2 c^2 + k^2 x'^2}} dx' =$$

$$= \frac{g}{2k \cos \varphi} \left[\int_{-a}^a \frac{1 + k^2 c^2}{\sqrt{1 + k^2 c^2 + k^2 x'^2}} dx' + \int_{-a}^a \frac{k^2 x'^2}{\sqrt{1 + k^2 c^2 + k^2 x'^2}} dx' \right] =$$

$$= \frac{g}{4k \cos \varphi} \left[\frac{(1 + k^2 c^2)}{k} \log_e [kx' + \sqrt{1 + k^2(c^2 + x'^2)}] + x' \sqrt{1 + k^2(c^2 + x'^2)} \right]_{-a}^a$$

g representa el peso por unidad de área. En el presente caso se ha tomado $g = 200 \text{ Kg./m.}^2$, y $\pm a$ igual con $\pm 5,303$: sustituyendo en la fórmula precitada nos da para $C_{\text{máx.}} = 21,740 \text{ Kg.}$ Dado que en el elemento $\overline{AN}$ actúan fuerzas sobre ambos lados, el valor anterior hay que multiplicarlo por 2 para obtener la fuerza total que actúa sobre el punto $A = 43,480 \text{ Kg.}$

Esfuerzos longitudinales o normales.

Sobre la intersección de los miembros actúan también esfuerzos longitudinales libres $S y'$ del cascarón.
 $S y' = G y' \frac{\cos \alpha'}{\cos \psi'}$, dado que $\omega = 90^\circ$, y según la ecuación [3.5]:

$$-G y' = \frac{g}{2} x' \log_e \left[\frac{k y'}{\sqrt{1 + k^2 x'^2}} + \sqrt{1 + \frac{k^2 y'^2}{1 + k^2 x'^2}} \right] + f_2(x').$$

La función $f_2(x')$ se determina por las condiciones de borde que en el presente caso consisten en que los lados de un cuadrado formado por secciones, que son parábolas principales, queden libres de esfuerzos perimetrales y, por tanto, aplicando las ecuaciones [4.2] y considerando $x' = y'$:

$$G x' = G y' = \tau; -G y' = -\tau = -\frac{g}{2k} \sqrt{1 + 2k^2 x'^2} = \frac{g}{2} x' \log_e \left[\frac{k x'}{\sqrt{1 + k^2 x'^2}} + \sqrt{1 + \frac{k^2 x'^2}{1 + k^2 x'^2}} \right] +$$

$$+ f_2(x') \therefore f_2(x') = -\frac{g}{2k} \sqrt{1 + 2k^2 x'^2} - \frac{g}{2} x' \log_e \left[\frac{k x'}{\sqrt{1 + k^2 x'^2}} + \sqrt{1 + \frac{k^2 x'^2}{1 + k^2 x'^2}} \right].$$

Obtenidos los valores de $f_2(x')$, registrados en la primera parte del cuadro siguiente, los esfuerzos libres a lo largo del miembro $\overline{AN}$ los calculamos según fórmulas anteriores y los registramos en la segunda parte de este cuadro:

1.ª PARTE			2.ª PARTE			
x'	y'	$f_2(x')$	x'	y'	$G y'$	$S y'$
0,0	0,0	-1 875,0	0,0	5,3	0,0	0,0
1,0	1,0	-1 882,6	1,0	5,3	-1 854,6	-1 788,0
2,0	2,0	-1 917,4	2,0	5,3	-1 861,9	-1 801,7
3,0	3,0	-1 969,6	3,0	5,3	-1 886,9	-1 838,7
4,0	4,0	-2 041,3	4,0	5,3	-1 932,1	-1 900,9
5,3	5,3	-2 162,0	5,3	5,3	-2 019,4	-2 019,4
-1,0	-1,0	-1 882,6	-1,0	5,3	-1 910,6	-1 841,0
-2,0	-2,0	-1 917,4	-2,0	5,3	-1 972,9	-1 909,2
-3,0	-3,0	-1 969,6	-3,0	5,3	-2 052,3	-2 000,0
-4,0	-4,0	-2 041,3	-4,0	5,3	-2 150,6	-2 116,0
-5,3	-5,3	-2 162,0	-5,3	5,3	-2 304,6	-2 304,6

La dirección de los esfuerzos $S y'$ varía en cada punto, pero como antes se indicó, sólo las componentes verticales actúan sobre el miembro. Los valores son:

$$V = G y' \operatorname{tg} \psi = G y' \frac{dz}{dy} = G y' k x',$$

con lo que obtenemos la siguiente tabla:

x'	y'	$G y'$	$\frac{dz}{dy} k x'$	V	$2 V$
0,0	5,3	—	—	—	—
1,0	5,3	— 1 854,6	0,0533	— 98,2	— 196,4
2,0	5,3	— 1 861,9	0,1067	— 198,6	— 397,2
3,0	5,3	— 1 886,9	0,16	— 301,9	— 603,8
4,0	5,3	— 1 932,1	0,2123	— 412,2	— 824,4
5,3	5,3	— 2 019,4	0,2828	— 571,2	— 1 142,4
— 1,0	5,3	— 1 910,6	— 0,0533	101,9	203,8
— 2,0	5,3	— 1 972,9	— 0,1067	210,5	421,0
— 3,0	5,3	— 2 052,3	— 0,16	328,4	656,8
— 4,0	5,3	— 2 150,6	— 0,2123	458,8	917,6
— 5,3	5,3	— 2 304,6	— 0,2828	651,9	1 303,8

con lo que se llega a las condiciones de diseño finales para el miembro $\overline{AN}$.

Como una comprobación de nuestros cálculos, la suma de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el miembro $\overline{AN}$ deberá ser igual a una cuarta parte del peso del cascarón.

La componente vertical de la carga axial es: $43,480 \operatorname{sen} \varphi = 11,834$ Kg. La resultante vertical de los esfuerzos de arista = -290 Kg. La carga vertical total soportada por el miembro $\overline{AN} = 11,544$ Kg. La carga vertical total soportada por el miembro $\overline{AN} = 11,544$ Kg. En la figura 7.^a se expresa el diagrama de cargas para el cálculo del miembro, es decir, las acciones del cascarón sobre él. Mientras que en el cuadro superior se calculan las reacciones del cascarón debidas a las fuerzas exteriores, por eso el cambio de signo que se observa entre ellos.

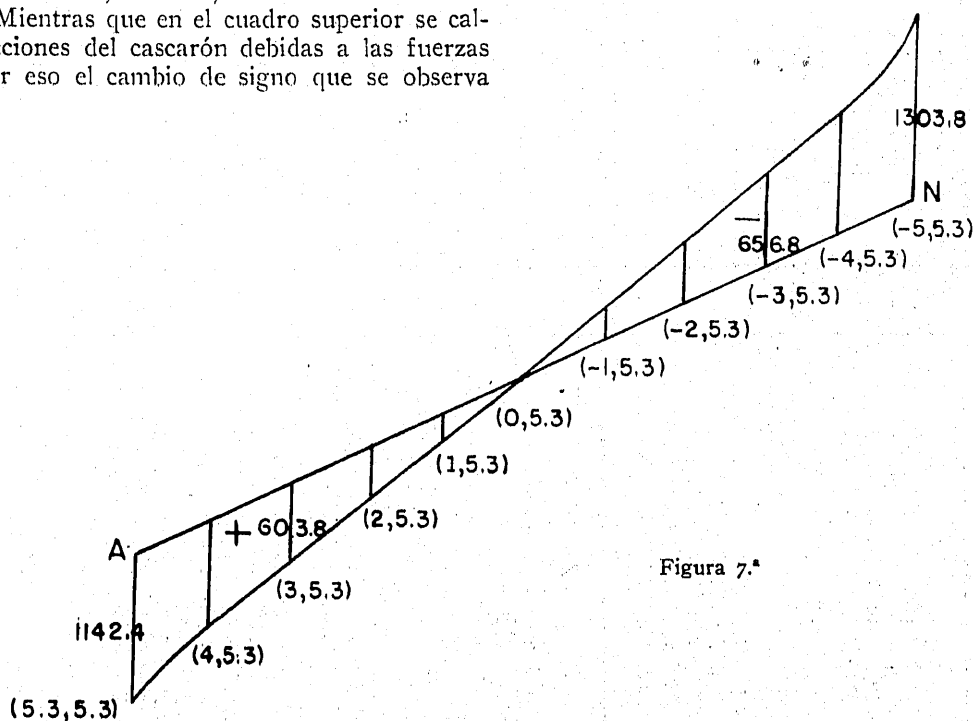


Figura 7.^a

La superficie de una octava parte de la estructura es (*):

$$A = \frac{1}{32 k^3} \left[(k^4 x^4 + 2 k^2 x^2 + 1) \log_e \left(\frac{k y + \sqrt{\varphi}}{\sqrt{1 + k^2 x^2}} \right) + \frac{2 k^2 y^2 + 5 k^2 x^2 + 5}{3} k y \sqrt{\varphi} \right]_0^x = 2880 \text{ m}^2.$$

Supongamos $g = 200 \text{ Kg./m}^2$. Tendremos que el peso de la cuarta parte del cascarón es de $28,80 \times 2 \times 200 = 11,520 \text{ Kg.}$, lo cual concuerda con los resultados antes indicados.

Esfuerzos en el cascarón.

Los esfuerzos de membrana en el cascarón son de poca monta, pues son muy pequeños y no es necesario calcularlos. Sin embargo, en el presente caso se calcularon los esfuerzos máximos normales en distintos puntos.

$$S_\theta = S_x \frac{\sin^2 \theta}{\sin \alpha} + S_y' \frac{\sin^2 (\alpha - \theta)}{\sin \alpha} - 2 \tau' \frac{\sin \theta \sin (\alpha - \theta)}{\sin \alpha}.$$

S_θ alcanzará un valor máximo cuando $\tau_\theta = 0$:

$$\tau_\theta = S_x' \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \alpha} + S_y' \frac{-\sin (\alpha - \theta) \cos (\alpha - \theta)}{\sin \alpha} + \tau' \frac{\sin (\alpha - 2\theta)}{\sin \alpha};$$

$$\lg 2 \theta = - \frac{2 \tau' \sin \alpha + S_y' \sin 2 \alpha}{S_x' + 2 \tau' \cos \alpha + S_y' \cos 2 \alpha} \begin{cases} \text{(I) } \theta; & S_I \\ \text{(II) } \theta + 90^\circ; & S_{II} \end{cases}$$

x'	y'	S_x'	S_y'	α	θ_I	θ_{II}	S_I	S_{II}
—1,0	1,0	—1885	—1885	90° 9'	44° 55'	134° 55'	—3754	—5
—2,0	2,0	—1896	—1896	90° 38'	44° 40'	134° 40'	—3793	—43
—3,0	3,0	—2016	—2016	91° 21'	44° 17'	134° 17'	—3842	—97
—4,0	4,0	—2124	—2124	92° 29'	43° 45'	133° 45'	—3908	—173
—5,3	5,3	—2304	—2304	94° 14'	42° 52'	132° 52'	—4015	—307
5,3	5,3	—2019	—2019	85° 45'	47° 7'	137° 7'	—4349	—
4,0	5,3	—2087	—1901	86° 44'	47° 53'	137° 58'	—4219	—3
3,0	5,3	—2135	—1839	87° 32'	48° 17'	138° 17'	—4138	—9
2,0	5,3	—2178	—1802	88° 21'	48° 29'	138° 29'	—4073	—21
1,0	5,3	—2215	—1790	89° 10'	48° 29'	138° 29'	—4028	—40
0,0	5,3	—2246	—1804	90°	48° 14'	138° 14'	—3987	—64
—1,0	5,3	—2272	—1841	90° 49'	47° 47'	137° 47'	—3962	—95
—2,0	5,3	—2290	—1909	91° 39'	47° 2'	137° 21'	—3952	—136
—3,0	5,3	—2302	—2000	92° 27'	46° 4'	136° 4'	—3955	—181
—4,0	5,3	—2304	—2116	93° 15'	40° 50'	130° 50'	—3972	—233
—5,3	5,3	—2304	—2304	94° 14'	42° 52'	132° 52'	—4015	—307
2,0	4,0	—2033	—1844	88° 44'	47°	137°	—3955	—9
—2,0	4,0	—2117	—1927	91° 16'	45° 49'	135° 49'	—3866	—95
0,0	1,0	—1888	—1872	90°	45° 7'	135° 27'	—3758	—3
0,0	2,0	—1928	—1864	90°	45° 20'	135° 20'	—3782	—10
0,0	3,0	—1994	—1851	90°	46° 4'	136° 4'	—3823	—23
0,0	4,0	—2087	—1833	90°	46° 53'	136° 53'	—3882	—39

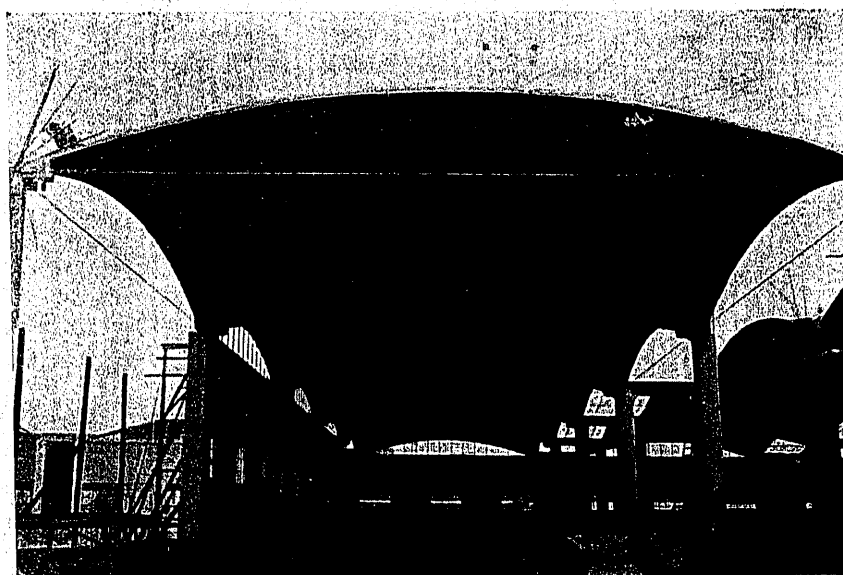
Para obtener los esfuerzos reales en el hormigón, ya que el espesor es de 4 cm., los valores indicados deben dividirse entre 400.

(*) De un estudio en preparación del Ingeniero D. Ramón Guerin Martí.

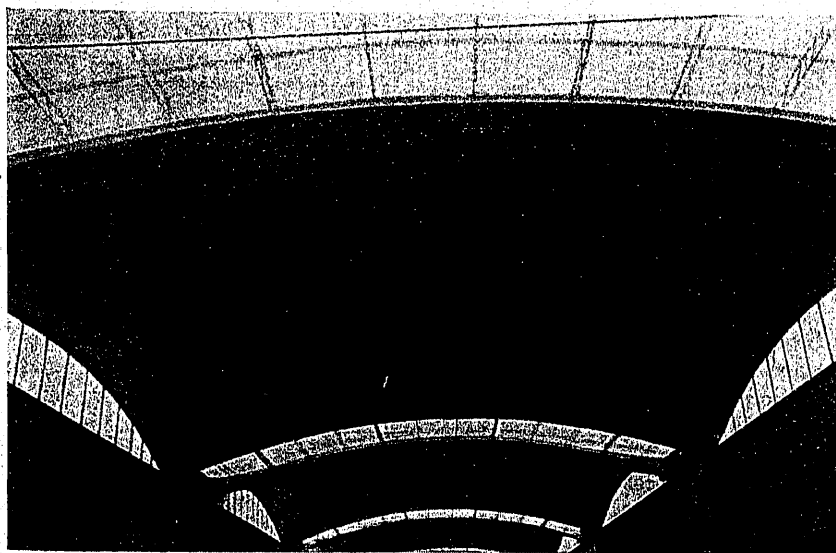


Vista general de la fábrica de cartón "Empaques Modernos San Pablo, S. A."

Se aprecia el pequeño espesor de los bordes. El espacio libre entre las dos naves es para la luz cenital.



Se observa las magníficas condiciones de luminosidad de la nave ya terminada.



Detalle de la bóveda. El borde se ve algo curvado para dirigir el agua a los puntos convenientes.

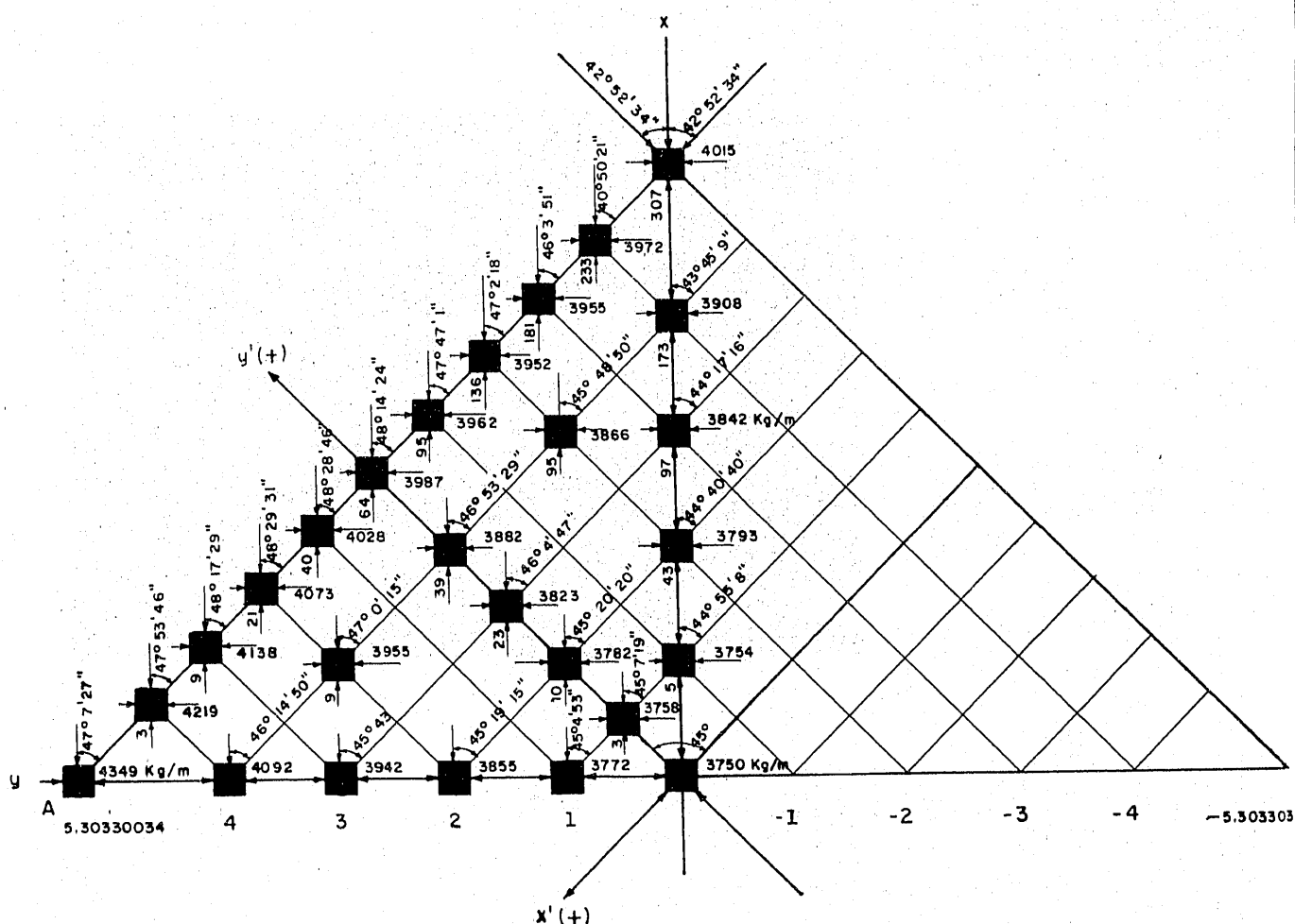


Figura 9.^a

Conclusiones.

Como hemos visto, todos los esfuerzos de membrana en los cascarones son de compresión, y esto es muy ventajoso, pues sólo requiere el empleo de acero de refuerzo exclusivamente para tomar los esfuerzos por contracción y por temperatura.

La construcción real del ejemplo numérico calculado de acuerdo con el procedimiento explicado en este estudio, fué hecha por el Ingeniero D. Ramón Guerin Marti para la Empresa "Empaques Modernos San Pablo", S. A. Las grietas por contracción y temperatura, tan comunes en estructuras del tipo de cascarones, que son tan molestas y difíciles de impermeabilizar, no aparecieron en absoluto en la estructura precitada. En realidad, fué posible dejar el concreto sin ningún tipo de impermeabilizante. Por lo tanto, puede afirmarse una vez más, que dicha estructura permitió obtener las grandes economías factibles cuando se construyen techados apropiados de concreto armado del tipo de cascarón.