

LAS DEFORMACIONES PLASTICAS EN LAS ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

Por LUIS ANGULO Y PROTA

Ingeniero de Caminos

Se comentan las posibilidades de mejorar las condiciones de resistencia de este tipo de estructuras al admitir su deformación plástica.

I

Los cuerpos naturales se deforman por causas muy diversas, cambiando su forma y dimensiones, y al deformarse, manifiestan tan gran variedad en su comportamiento mecánico, que hace demasiado difícil que puedan expresarse matemáticamente en su conjunto fenómenos de tal complejidad.

Por este motivo es preciso prescindir de parte de ellos, eligiendo únicamente aquellos que nos interesan en el problema concreto considerado, analizando las leyes restringidas que los rigen y comprobando que éstas se confirman experimentalmente.

Entre las causas que originan las deformaciones están, en primer lugar, las fuerzas exteriores, y en las deformaciones por ellas producidas podemos distinguir una parte que desaparece al hacerlo la causa y que llamamos "deformación elástica", existiendo, por el contrario, otra parte que subsiste al desaparecer las fuerzas exteriores y que se designa como "deformación plástica o residual". La deformación total, o "deformación elastoplástica", es la suma de ambas, y según una notación usual viene dada por:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad [1-1]$$

estando representadas sus magnitudes en el diagrama esfuerzos-deformaciones del cuerpo considerado (figura 1.^a).

Además de estas deformaciones que pudiéramos llamar instantáneas, se comprueba que, al persistir la acción de las fuerzas exteriores en el tiempo, se producen otras nuevas que se acumulan a las instantáneas y en las que intervienen fenómenos plásticos, ya que parte de ellas subsisten al retirarse las cargas. Estas deformaciones pueden desaparecer al cabo de cierto tiempo de producirse la descarga, y son las llamadas "deformaciones elastoviscosas", que producen en el cuerpo estados tensionales proporcionales a la velocidad de deformación. La constante de proporcionalidad suele designarse como "coeficiente de viscosidad" del cuerpo en cuestión.

Al admitirse como elástico el comportamiento de la mayoría de los cuerpos en el proceso de descarga, quedarán deformaciones "residuales" en aquellos elementos que hayan sido cargados por encima de un valor más o menos definido, que conocemos como "límite elástico".

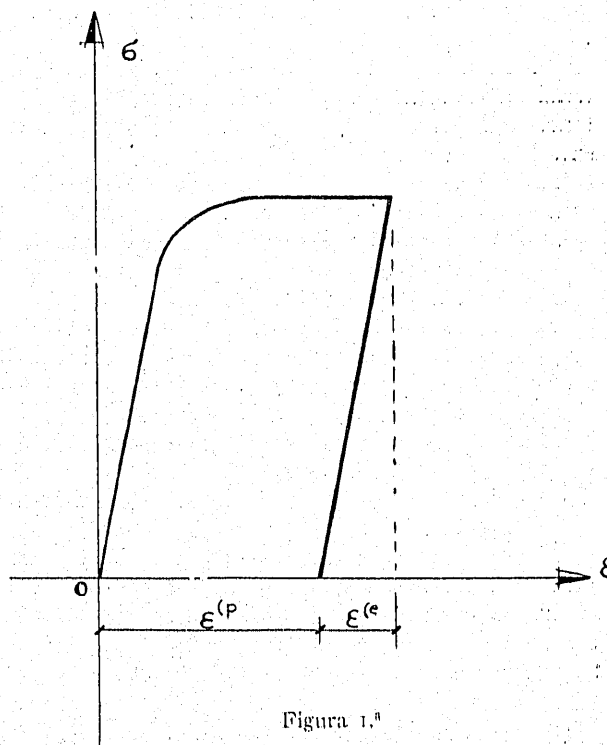


Figura 1.^a

Ahora bien, no sólo estas deformaciones plásticas pueden existir en ausencia de las fuerzas exteriores, sino que, al formar todo cuerpo sólido de una sola pieza un sistema hiperestático, los enlaces entre sus elementos de volumen impiden a éstos dilatarse libremente y originan que las deformaciones plásticas residuales que se habrán producido en sólo algunos de sus elementos den lugar a otras deformaciones elásticas en elementos contiguos. Parte de estas defor-

maciones elásticas subsisten igual que aquéllas al desaparecer las fuerzas exteriores en forma de energía potencial elástica, y sólo podrán anularse por la destrucción de los enlaces de la estructura interna del cuerpo (1).

Otras deformaciones de características elastoplásticas y elastoviscosas pueden producirse por causas distintas de las fuerzas exteriores. Tales son las producidas por cambios en el medio ambiente como alternancias de temperatura o estado higrométrico, cambios de la estructura interna del cuerpo, como la retracción del hormigón, etc. (2).

En general, podemos asimilar todos estos casos de naturaleza tan distinta a la existencia de unas deformaciones impuestas en el cuerpo considerado, en ausencia de las fuerzas exteriores. El estado de equilibrio así definido suele llamarse por algunos autores "estado de coacción", y el estado tensional que acompaña a la deformación impuesta, como estado de tensiones propias o de "autotensión".

Ejemplo clásico de estados de tensión propia son los que se producen debidos al enfriamiento irregular de los perfiles laminados y por el temple de los aceros, que hoy se tratan de eliminar con la técnica del recocido.

Si consideramos la existencia de un sistema material en un sentido más amplio, que pueda ser isostático o hiperestático por carecer o no de enlaces exteriores en exceso, observaremos que, al cargarse alguno de sus elementos más allá del que hemos llamado límite elástico, se producirán en dicho elemento deformaciones plásticas que, al efectuarse la descarga, darán lugar a deformaciones residuales y estados de tensión propia.

Si se trata de un sistema isostático, la consecuencia de estas deformaciones residuales queda limitado a ellas mismas, y por lo que antes hemos expuesto, a unas tensiones propias en el elemento o sección deformado y los contiguos que vienen afectados, pero al poder dilatarse libremente el sistema, no afectará a otros elementos más alejados ni al equilibrio general del sistema.

Si al alcanzar el límite elástico en dicho elemento para un valor determinado de la fuerza exterior, seguimos aumentando ésta, seguirá dicho elemento deformándose plásticamente (fig. 1.), sin admitir prácticamente aumentos apreciables de tensión y aumen-

tando ésta, en cambio, en otros elementos que se encontraban aún en régimen elástico, hasta ir en forma asintótica alcanzando progresivamente valores muy próximos a dicho límite elástico todos los elementos, y al seguir aumentando la fuerza exterior, llegar al estado de rotura.

En un sistema hiperestático caracterizado por la existencia de un número determinado, m , de enlaces superabundantes, existirán análogamente deformaciones residuales por las mismas causas citadas para los sistemas isostáticos, pero, en cambio, la consecuencia de estas deformaciones afectará al equilibrio de todo el sistema al no poder dilatarse éste libremente debido a los m enlaces superabundantes.

Por ello, las tensiones propias podrán darse con una exactitud de hasta m parámetros correspondientes a dichas incógnitas superabundantes. Si las deformaciones impuestas vienen caracterizadas en forma lineal y biunívoca por otros h parámetros independientes ($h \leq m$) en ausencia de las fuerzas exteriores, tendremos, al establecer las ecuaciones que nos definen el equilibrio, un sistema lineal y no homogéneo de m ecuaciones con $m + h$ incógnitas, que nos permite determinar las m incógnitas hiperestáticas si nos son conocidas las h deformaciones impuestas. O bien si se conocen h incógnitas hiperestáticas (o h relaciones lineales entre ellas), determinar los h parámetros de las deformaciones y las $m - h$ incógnitas restantes.

Igualmente sucede si consideramos el equilibrio en la actuación conjunta de las fuerzas exteriores y las tensiones propias o de autotensión que se añaden a ellas. Debido a la indeterminación del sistema hiperestático de grado m , podemos hacer variar el estado de tensión propia dependiente de los m parámetros, buscando aquel que más nos convenga y tal que las deformaciones plásticas correspondientes sean posibles en el equilibrio del sistema.

Esta propiedad es fundamental en los métodos para la determinación de la carga límite del sistema y para la explicación de multitud de fenómenos plásticos que, según las teorías de la mecánica clásica, llevaban a resultados completamente discordantes entre éstas y el comportamiento real de las construcciones.

En lo que sigue vamos a establecer el sistema de ecuaciones del equilibrio en la actuación de las fuerzas exteriores, conjuntamente con unas deformaciones impuestas. No hacemos más hipótesis básicas que la de ser suficientemente pequeñas las deformaciones en relación con las dimensiones del cuerpo, así como la existencia de isotropía y equilibrio durante todo el proceso de deformación, hipótesis que, como sabemos, son fundamentales en toda la teoría de las deformaciones elastoplásticas (1).

(1) Una demostración muy sugestiva de este fenómeno en el equilibrio de una sección de hormigón armado puede verse en la interesante obra de G. Colonnetti: "L'équilibre des corps déformables". París, 1955.

(2) Weingarten y más tarde V. Volterra con su teoría de las distorsiones en cuerpos múltiplemente conexos, estudiaron los estados tensionales que en ausencia de las fuerzas exteriores pueden producirse en los cuerpos al someterlos a una serie conveniente de cortes que se vuelven a soldar posteriormente. (Ver Gode: "Elasticidad lineal y funciones de tensión", págs. 106 a 113, o la memoria clásica de Volterra: "Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes", que en la anterior se cita.)

(1) Los fundamentos teóricos de la plasticidad con el establecimiento de las leyes que rigen las deformaciones, pueden verse con todo detalle en la conocida obra de H. von Karman: "Plasticidad".

Recordemos el método clásico para el cálculo de estructuras o sistemas hiperestáticos de grado m , caracterizados por la existencia de m incógnitas o reacciones superabundantes $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_m$, y supongamos que dicho sistema está compuesto por n elementos en que puede generalizarse el valor de n hasta un número infinito de elementos.

Por ejemplo, en la figura 2.^a, *a* se tiene un sistema hiperestático de primer grado ($m = 1$), caracterizado por la existencia de una barra sobrante y que está formado por 6 elementos ($n = 6$), mientras que en la figura 2.^a, *b* se tiene un sistema del mismo tipo y grado, pero de un número infinito de elementos (considerando a cada sección de la viga como elemento del sistema).

Por supresión de las incógnitas o reacciones hiperestáticas puede reducirse el sistema considerado a otro llamado "principal" o isostático, en el que, por medio de la estática, se pueden calcular los esfuerzos T_{ip} que se producen en cada elemento i al someter este sistema "principal" a un sistema de cargas exteriores genérico p . (Puede tratarse de cargas aisladas P en algún elemento, como sucede en el ejemplo de la figura 2.^a, *a*, o bien tratarse de una carga uniforme sobre todos los elementos de la estructura, como sucede en la figura 2.^a, *b*.)

En el caso de tratarse de una estructura triangulada como la 2.^a, *a*, los esfuerzos T serán los normales (tracciones o compresiones) en las barras, y en el caso 2.^a, *b*, los esfuerzos serán los de flexión producidos por los momentos M en las secciones de la viga.

Si designamos con T_{ij} el esfuerzo que en el

elemento i del sistema "principal" produce un valor unidad de la incógnita hiperestática $X_j = 1$, sabemos que el esfuerzo total que se ejerce en dicho elemento i , debido a la actuación conjunta del sistema de cargas exteriores p y de la totalidad de las incógnitas hiperestáticas $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_m$, puede expresarse en la forma:

$$T_i = T_{ip} + \sum_{j=1}^m X_j T_{ij}, \quad [II-1]$$

Análogamente puede obtenerse el recorrido eficaz o desplazamiento (en el término "recorrido" se incluye, por supuesto, el caso de giro o desviación angular), generalizado en dirección de una incógnita hiperestática, como suma de los producidos en dicha dirección, y sucesiva y conjuntamente por cada una de las incógnitas hiperestáticas consideradas como cargas exteriores que restablecen el equilibrio en la estructura "principal".

Si designamos con $\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{jn}, \dots, \delta_{jm}$, los recorridos del punto de aplicación de X_j , medidos en la dirección de X_j y producidos, respectivamente, por la actuación en el sistema "principal" de $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_j = 1, \dots, X_m = 1$, e igualmente designamos con $\delta_{1p}, \delta_{2p}, \dots, \delta_{jp}, \dots, \delta_{mp}$ los recorridos de los mismos puntos de aplicación de $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_m$ medidos en dirección de dichas incógnitas al someter la estructura "principal" al sistema de cargas p , y finalmente designamos con $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j, \dots, \delta_m$ los recorridos totales generalizados en dirección de $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_m$, respectivamente, debidos a un cambio de temperatura o cualquier otra deformación impuesta como las definidas en [I], podemos expresar el conocido sistema lineal de grado m , que nos

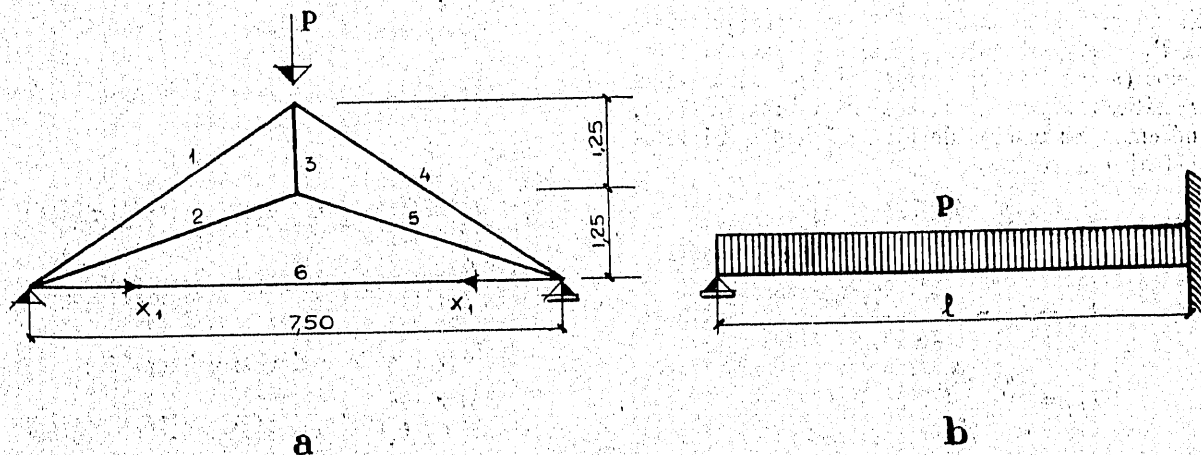


Figura 2.^a

permite obtener los valores de las incógnitas hiperestáticas:

[illegible]

Por el teorema de Maxwell sabemos que entre los coeficientes del sistema [II-2] se verifica: $\delta_{kj} = \delta_{jk}$, y por aplicación del teorema de los trabajos virtuales, pueden obtenerse los valores de todos los coeficientes. En efecto, si e_{jx} es la deformación absoluta del elemento i del sistema "principal" debida a una causa cualquiera T_x que produce en dicho elemento el esfuerzo T_{ix} y es e_i el valor del coeficiente de elasticidad $\left(e_y = \frac{EF_i}{l_i} \right)$ en dicho elemento, se verificará:

$$\varepsilon_{ix} = \frac{T_{ix}}{e_i},$$

y si conjuntamente con la causa cualquiera T_x , hacemos actuar sobre el sistema "principal" la incógnita hiperestática unitaria $X_j = 1$, se producirá en los puntos i unos esfuerzos que hemos llamado T_{ij} y un desplazamiento del punto de aplicación de X_j que, proyectado en su dirección, designamos como $\delta_{j,x}$, y por aplicación del citado teorema de los trabajos virtuales, se verificará:

$$1. \delta_{jx} - \sum_{i=1}^n T_{ij} \cdot \varepsilon_{ix} = 0, \quad [11-3]$$

y sustituyendo ε/x por su valor, resulta:

$$\delta_{jx} = \sum_{i=1}^n \frac{T_{ij} T_{ix}}{e_j}, \quad [11-4]$$

Si suponemos ahora que el sistema cualquiera de carga T_x es sucesivamente el sistema p , para valores unitarios ($p = 1$), o una cualquiera de las incógnitas hiperestáticas $X_x = 1$, incluso la misma $X_j = 1$, obtendremos los valores de los coeficientes del sistema [II-2], que serán:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{jp} &= \sum_{i=1}^n \frac{T_{ij} T_{ip}}{e_i}; \\ \delta_{jk} &= \delta_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{T_{ij} T_{ik}}{e_i}; \\ \delta_{jj} &= \sum_{i=1}^n \frac{T_{ij}^2}{e_i}. \end{aligned} \right\} \quad [11 - 5]$$

En el caso más general de un número infinito de

elementos en que se desee tener en cuenta no sólo los esfuerzos de flexión sino también los normales y cortantes, la expresión general de las [II-5] serán las conocidas fórmulas:

$$\begin{aligned}\delta_{jK} &= \int M_j M_K \frac{ds}{EI} + \int N_j N_K \frac{ds}{EF} + \int \alpha Q_j Q_K \frac{ds}{GF}; \\ \delta_{jj} &= \int M_j^2 \frac{ds}{EI} + \int N_j^2 \frac{ds}{EF} + \int \alpha Q_j^2 \frac{ds}{GF}.\end{aligned}$$

Igualmente, la [II-3] se convertirá en:

$$\delta_i = \iiint_V \sigma_i \cdot \varepsilon_i^{(p)} \cdot dV,$$

en la que δ_i es el desplazamiento en un punto i del cuerpo debido a un sistema de deformaciones plásticas, ϵ_i^p y σ_i es la componente del estado de tensión determinado por una fuerza unidad aplicada en dicho punto i y según su dirección.

Al mismo sistema [II-2] llegamos de forma inmediata por la aplicación del teorema general del equilibrio a un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas exteriores y de deformaciones no elásticas y que se deduce de la aplicación del de los trabajos virtuales, al expresar que el trabajo de deformación total es idénticamente nulo para toda variación suficientemente pequeña del estado de equilibrio, o sea con la notación de [I-1]:

$$\int \int \int_V [(\epsilon_x^{(e)} + \epsilon_x^{(p)}) \delta \phi_x + (\epsilon_y^{(e)} + \epsilon_y^{(p)}) \delta \phi_y + (\epsilon_z^{(e)} + \epsilon_z^{(p)}) \delta \phi_z + \dots + (\gamma_{x2}^{(e)} + \gamma_{x2}^{(p)}) \delta \tau_{x2}] dV = 0,$$

es decir :

$$\begin{aligned} & \iint \int_v [\varepsilon_x^{(e)} \delta \delta_x + \varepsilon_y^{(e)} \delta \delta_y + \dots + \gamma_{x2}^{(e)} \delta \tau_{x2}] dV + \\ & + \iint \int_v [\varepsilon_x^{(p)} \delta \delta_x + \varepsilon_y^{(p)} \delta \delta_y + \dots + \gamma_{x2}^{(p)} \delta \tau_{x2}] dV = 0, \end{aligned}$$

expresión que es la variación primera de:

$$W^{(e)} + \iiint_V [\varepsilon_x^{(p)} \sigma_x + \varepsilon_y^{(p)} \sigma_y + \varepsilon_z^{(p)} \sigma_z + \gamma_{xy}^{(p)} \tau_{xy} + \gamma_{yz}^{(p)} \tau_{yz} + \gamma_{xz}^{(p)} \tau_{xz}] dV = 0, \quad [11-6]$$

cuya variación segunda es positiva y que permiten expresar el citado teorema, generalización del de trabajo mínimo (1):

"El estado de tensión en un cuerpo en equilibrio sometido a un sistema arbitrario de fuerzas exteriores y de deformaciones plásticas es tal que hace mínimo a la función [II-6], cuyo primer sumando $W^{(e)}$ es la energía potencial elástica de dicho cuerpo" (2).

En nuestro caso, la expresión [II-6] será:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \epsilon_i^{(e)} l_i T_i + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^{(p)} l_i T_i = 0,$$

ya que

$$dV = l_i F_i; \quad \sigma_i = \frac{T_i}{F_i},$$

y al expresar la condición de mínimo para cada una de las m incógnitas hiperestáticas, obtenemos el sistema de grado m :

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \epsilon_i^{(e)} l_i T_i + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^{(p)} l_i T_i \right] = 0;$$

$$(j = 1, 2, \dots, m),$$

y teniendo en cuenta que $\epsilon_i^{(e)} = \frac{T_i}{e_i}$ que según [II-1]

$\frac{\partial T_i}{\partial X_j} = T_{ij}$ y los valores [II-4] y [II-5], sustituyendo y haciendo operaciones, el sistema anterior se convierte en el antes hallado [II-2]:

$$\delta_{jp} + \delta_{j1} X_1 + \delta_{j2} X_2 + \dots + \delta_{jm} X_m +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \epsilon_i^{(p)} l_i T_{ij} = 0;$$

$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

La resolución de este sistema lineal y no homogéneo de grado m nos permite, como ya habíamos anticipado, para $h \leq m$ deformaciones no elásticas impuestas, determinar las m incógnitas hiperestáticas superabundantes del sistema en equilibrio.

(1) Sobre la generalización de los principios de reciprocidad y trabajo virtuales fuera del dominio elástico, pueden consultarse, entre otras, las obras antes citadas de Colonnietti e Illouchine.

(2) La expresión general de $W^{(e)}$, energía potencial elástica, es la que conocemos de la teoría de la Elasticidad (véase Torroja: "Elasticidad", págs. 65 y sigs.), y cuyo valor es:

$$W^{(e)} = \iiint_V \left[\frac{6_x^{(e)} + 6_y^{(e)} + 6_z^{(e)}}{2E} - \frac{\nu}{E} (6_x^{(e)} 6_y^{(e)} + 6_x^{(e)} 6_z^{(e)} + 6_y^{(e)} 6_z^{(e)}) + \frac{\tau_{xy}^{(e)} + \tau_{xz}^{(e)} + \tau_{yz}^{(e)}}{2G} \right] dV.$$

Si bien por haberse producido la descarga tras sobrepasar el límite elástico o por hallarnos en algún caso de autotensión en ausencia de las fuerzas exteriores como los citados en [I], se verifica que $\delta_{jp} = 0$, el sistema [II-2] se reduce al:

$$\delta_{j1} X_1 + \delta_{j2} X_2 + \dots + \delta_{jm} X_m + \delta_j = 0;$$

$$(j = 1, 2, \dots, m), \quad \text{[II-7]}$$

que nos permite obtener las m incógnitas superabundantes en función de las deformaciones impuestas.

Tanto este sistema como el anterior son susceptibles de una interesante simplificación. En efecto, sabemos que dado un sistema finito o infinito, de funciones linealmente independientes, se puede, por combinación lineal entre ellas, obtener otra sucesión de funciones linealmente independientes que sean ortogonales y normalizadas (1).

En nuestro caso podremos, por transformación lineal de las X_j , obtener unas (T_{ij}) tales que se cumplan las condiciones de ortogonalidad y normalización, o sea, respectivamente:

$$\delta_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{(T_{ij})(T_{ik})}{e_i} = 0; \quad \delta_{jj} = \sum_{i=1}^n \frac{(T_{ij})^2}{e_i} = 1.$$

Análogamente puede obtenerse que:

$$\delta_{jp} = \sum_{i=1}^n \frac{(T_{ij}) \cdot (T_{ip})}{e_i} = 0.$$

Las condiciones de ortogonalidad tienen un significado mecánico muy claro. En efecto, teniendo en cuenta que, según hemos visto, $\epsilon_i = \frac{T_{ij}}{e_i}$, las expresiones anteriores nos dicen que el trabajo realizado por los estados de tensión propia o de autotensión (T_{ij}) , en las deformaciones virtuales de cualquier otro estado de autotensión (T_{ik}) , o en las deformaciones elásticas del sistema, son nulos.

Al cumplirse las condiciones de ortogonalidad y normalización, el sistema [II-7] queda reducido al:

$$(X_j) + \delta_j = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \text{[II-8]}$$

en el que, según hemos visto, $\delta_j = \sum_{i=1}^n (T_{ij}) \cdot l_i \cdot \epsilon_i^{(p)}$, por lo tanto, todas las incógnitas superabundantes nos vienen dadas directamente en función de las deformaciones plásticas (2).

(1) Navarro Borrás: "Análisis matemático", pág. 112 y siguientes.

(2) El método de transformar linealmente el sistema [II-2] en forma ortogonal para simplificarlo y obtener directamente el valor de las incógnitas hiperestáticas sin necesidad de resolverlo, se emplea en la resistencia de materiales tradicional en diversos ejemplos clásicos, como en el procedimiento seguido para el cálculo de arcos hiperestáticos al referirse al centro elástico.

Los sistemas [II-7] y [II-8] nos dan para cada conjunto de deformaciones impuestas (iniciales o residuales) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ($n \leq m$) un conjunto de valores de los estados unitarios de autotensión, ortogonales y normalizados, $(T_{11}), (T_{12}), \dots, (T_{1m})$. Si sometemos al cuerpo, además, a un sistema genérico de fuerzas exteriores P , cuyos valores de esfuerzos ortogonales y normalizados para cada elemento i designamos con (T_{ip}) , podremos expresar el esfuerzo conjunto debido a ambos estados tensionales en el elemento i , con una fórmula similar a la [II-1]:

$$T_i = (T_{ip}) \cdot P + \sum_{j=1}^m X_j \cdot (T_{ij}) \quad [\text{III-1}]$$

Vamos a aclarar con unos sencillos ejemplos cuanto hemos expuesto. Consideremos en primer lugar la estructura hiperestática de primer grado de la figura 2.^a, a, con una barra o elemento superabundante, ($j = 1$) y que suponemos está construida con acero de límite elástico aparente igual a 2400 Kg./cm.².

En el cuadro adjunto se recogen las características geométricas l_i, F_i , de cada elemento o barra i y los esfuerzos en cada uno de los elementos del sistema "principal" (obtenido por supresión de la barra sobrante) debidos a una fuerza exterior unitaria ($P = 1$), o bien a un valor unitario de la incógnita hiperestática ($X_j = 1$) que se obtienen por dos cremonas según el procedimiento clásico de la resistencia de materiales.

Con estos datos se tienen de forma inmediata los valores de los coeficientes del sistema de ecuaciones [II-2], que en este caso se reduce a la ecuación única:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1p} + \delta_1 = 0. \quad [\text{III-2}]$$

En el supuesto de no haber deformaciones impues-

tas $\delta_1 = 0$ y el valor de la incógnita hiperestática X_1 , está bien determinado siendo su valor:

$$X_1 = \frac{-\delta_{1p}}{\delta_{11}} = - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(T_{ip}) \cdot (T_{i1}) \cdot l_i}{E \cdot F_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i1})^2 \cdot l_i}{E \cdot F_i}} = - \frac{-216,36}{296} = 0,731.$$

Para cada valor P de la fuerza exterior, la [II-1] nos permite obtener el esfuerzo en cada elemento i , valores que se expresan en la columna del cuadro citado, comprobándose que el elemento más solicitado es el (6), en el cual se alcanzará el límite elástico para un valor de la fuerza exterior, $P = 2400/0,04873 = 49250$ Kg.

Las restantes barras sufren tensiones inferiores a su límite elástico y en especial las (2), (3) y (5) se encuentran débilmente solicitadas.

Creemos ahora, en ausencia de toda fuerza exterior, un estado de coacción o de autotensión, imponiendo a la barra sobrante [6] una deformación de valor ϵ_1 , que por conveniencia expresamos en la forma:

$$\epsilon_1 \cdot l_1 = \frac{P' \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{750 P'}{15 E} = \frac{50 P'}{E}.$$

Al no haber más deformación que en este elemento a la barra sobrante (6) una deformación de

$$\delta_j = \delta_1 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i l_i (T_{ij}) = 50 P' / E,$$

y sustituyendo en la [III-1] queda, ya que $\delta_{ip} = 0$:

$$\frac{296 X_1}{E} + \frac{50 P'}{E} = 0,$$

de donde, $X_1 = -0,17 P'$.

Elemento o barra (i)	l_i (cm.)	F_i (cm.)	T_{ip}	T_{i1}	$\frac{T_{ip} T_{i1} l_i}{F_i}$	$\frac{T_{i1}^2 l_i}{F_i}$	T_i	δ_i
(1)	450,75	31,25	-1,803	1,202	-31,24	20,8	-0,924	-0,02957
(2)	395,25	18,75	1,581	-2,108	-70,28	93,6	0,040	0,00213
(3)	125,00	12,50	1,000	-1,333	-13,52	17,8	0,025	0,00200
(4)	450,75	31,25	-1,803	1,202	-31,24	20,8	-0,924	-0,02957
(5)	395,25	18,75	1,581	-2,108	-70,23	93,6	0,040	0,00213
(6)	750,00	15,00	0,000	1,000	0,00	50,0	0,731	0,04873
					$E S_{1p} = -216,36$	$E S_{11} = 296,00$		

Las tensiones en cada una de las barras serán:

$$\sigma_i = \frac{(T_{i1}) \cdot X_i}{F_i} \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = -0,00653 P' \\ \sigma_2 = \sigma_5 = 0,0191 P' \\ \sigma_3 = 0,0181 P' \\ \sigma_6 = -0,0113 P' \end{cases}$$

Para cada valor de P' , o lo que es lo mismo, para cada valor ε_1 , de la deformación impuesta, tendremos un estado distinto de autotensión en el sistema hiperestático. Por ejemplo, para $P' = 80\,000$ Kg., se obtienen:

$$\sigma_1 = \sigma_4 = -520 \text{ Kg./cm.}^2; \quad \sigma_2 = \sigma_5 = 1528 \text{ Kg./cm.}^2 \\ \sigma_3 = 1448 \text{ Kg./cm.}^2 \text{ y } \sigma_6 = -904 \text{ Kg./cm.}^2$$

Si, por último, suponemos que al estado de autotensión obtenido por medio de la deformación impuesta definida por P' , se añade el estado de tensión debido a la fuerza exterior P variable obtenido en primer lugar, los esfuerzos en los elementos del sistema son dados por [III-1], que ahora se reduce a:

$$T_i = (T_{ip}) \cdot P + X_i (T_{i1}),$$

y de la que pueden obtenerse, sustituyendo valores, los de las tensiones totales en cada elemento, que son:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = -0,02957 P - 520 \text{ Kg./cm.}^2 \\ \sigma_2 = \sigma_5 = 0,00213 P + 1528 \text{ Kg./cm.}^2 \\ \sigma_3 = 0,002 P + 1448 \text{ Kg./cm.}^2 \\ \sigma_6 = 0,04873 P - 904 \text{ Kg./cm.}^2 \end{cases}$$

comprobando que debido al estado de autotensión inicial, al ir cargando la estructura con la fuerza exterior P , ya no es la barra o elemento (6) en el que primero se alcanza el límite elástico, sino que ahora lo es en los elementos (1) y (4), iguales por simetría, en que se alcanza dicho límite para $P = 53\,570$ Kg.

Hemos aumentado la resistencia de la estructura debido a la deformación impuesta en un

$$\frac{63570 - 49250}{49250} = 29,07\%$$

Ahora bien, aún no hemos agotado la capacidad de resistencia de la estructura, es decir, no hemos alcanzado la carga "límite" llamando así a la que produce la fluencia estructural o colapso de la obra (1).

Por muchos investigadores se propugna el definir como carga "límite" en una estructura hiperestática de grado m , la que al alcanzarse la fluencia en $m+1$ de sus elementos, es decir, formarse $m+1$ "rótulas plásticas", convierte la estructura en un mecanismo móvil.

(1) Véase L. Angulo: "Comentarios al cálculo plástico de estructuras", REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, marzo 1960.

Las cosas no suceden exactamente de esta manera, ya que el comportamiento de los cuerpos, por muy dúctiles que sea, no es exactamente el del cuerpo elastoplástico "ideal" y para deformaciones suficientemente grandes, pero finitas, de un elemento, no se habrá alcanzado su plastificación total, a la que nos vamos acercando, como dijimos al principio, en forma asintótica. Por lo tanto, el estado de rotura de la estructura corresponderá a una deformación suficientemente grande, pero finita, del elemento correspondiente, sin que podamos asegurar tampoco que en los m elementos anteriores se hayan formado rótulas plásticas en un sentido estricto, sino que posiblemente se encuentren en un estado que produce deformaciones finitas, pero lo suficientemente grandes para que podamos considerar el método aplicable.

Hemos visto que modificando el estado de autotensión por medio de la deformación impuesta, lo que podemos conseguir en este caso, acortando o alargando la barra para que su longitud sea $l_i (1 \pm \varepsilon_i)$, modificamos el estado de tensión total de la estructura, por lo que actuando en forma conveniente con dichas deformaciones, podremos sacar el máximo partido a este fenómeno y aumentar la resistencia de la estructura.

Si suponemos ahora que la deformación impuesta, en vez de conseguirse aumentando o disminuyendo la longitud de la barra o elemento, es resultado de haberse rebasado en magnitud necesaria el límite elástico de dicho elemento, obtendremos el mismo efecto, es decir, un estado de autotensión que al variar y combinarse con el estado tensional debido a la fuerza exterior también variable, modifica el estado de tensión total de la estructura y sus posibilidades o capacidad de resistencia.

Al expresar que para todo elemento del sistema i , el esfuerzo debido a un estado cualquiera de tensión (producido por una deformación impuesta, por una fuerza exterior o por una combinación de ambas) no ha de rebasar el correspondiente al límite elástico de dicho elemento en ambos sentidos, tendremos:

$$T_{Fi(-)} \leq T_i \leq T_{Fi(+)} \quad [III-3]$$

siendo $T_{Fi(+)}$ y $T_{Fi(-)}$ los esfuerzos correspondientes a los límites elásticos positivo y negativo del elemento i . (En acero dulce $T_{Fi(-)} = -T_{Fi(+)}$).

En virtud de [III-1] la fórmula anterior se desdobla en las dos ecuaciones:

$$(T_{ip}) \cdot P + \sum_{j=1}^m X_j \cdot (T_{ij}) = T_{Fi(+)} \quad [III-4]$$

$$(T_{ip}) \cdot P + \sum_{j=1}^m X_j \cdot (T_{ij}) = T_{Fi(-)}$$

cada una de las cuales nos divide un hiperespacio de $m+1$ dimensiones en dos zonas de las que sólo los puntos de coordenadas $(P, X_1, X_2, \dots, X_m)$ situados

en una de ellas, verifican la correspondiente inequación.

Este fenómeno, que en general es de difícil concepción para espacios de más de tres dimensiones ($m = 2$), se simplifica notablemente para los sistemas hiperestáticos de primero y segundo grado, llevándonos a una representación gráfica, que debida originalmente al investigador ruso Rjanitsyn, nos aclara el proceso de muchos fenómenos plásticos y nos permite la obtención de la carga "límite" antes definida, como valor extremo del dominio de casos posibles de la tensión conjunta del sistema debida a las fuerzas exteriores y a la autotensión (1).

Para aclarar el método, volvamos a la estructura hiperestática de la figura 2.^a, a , en la que la doble expresión [III-4] para cada uno de sus seis elementos nos da las inequaciones siguientes:

$$\text{Para (1) y (4)} \quad -2400 \leq -0,0296 P + 0,0384 X_1 \leq 2400;$$

$$\text{(2) y (5)} \quad -2400 \leq 0,0021 P + 0,112 X_1 \leq 2400;$$

$$\text{(3)} \quad -2400 \leq 0,002 P + 0,006 X_1 \leq 2400;$$

$$\text{(6)} \quad -2400 \leq 0,0487 P + 0,066 X_1 \leq 2400.$$

Dibujadas en un sistema de coordenadas (X_1, P) las parejas de rectas (fig. 3.^a) que para cada elemento nos definen las inequaciones anteriores, tendremos un polígono convexo que contiene el origen (ya que el punto 0,0 correspondiente al estado neutro es un caso posible) y que llamamos "polígono de plastificación" y que es tal que al llegar el punto imagen del estado tensional a uno de sus lados, se alcanza el límite elástico en el elemento correspondiente.

El estado inicial puede no corresponder al estado neutro, sino que debido a una deformación impuesta, como vimos anteriormente, puede existir una autotensión en ausencia de fuerzas exteriores. Supongamos que sea ésta la que creamos en párrafos anteriores al imponer dicha deformación inicial al elemento (6) de la estructura y cuyo valor era:

$$X_1 = -0,17 P' = -0,17 \times 80\,000 = -13\,600 \text{ Kg.}$$

El punto imagen estará en A (fig. 3.^a), ya que $P = 0$, y si ahora suponemos que se va cargando la estructura con la fuerza exterior P creciente, se desplazará según una paralela al eje OP hasta llegar a la posición B , en que por estar en el lado correspondiente del polígono de plastificación, se habrá alcan-

zado el límite elástico en el elemento (1) para un valor de P tal que verifique:

$$\left. \begin{aligned} -0,02957 P + 0,0384 X_1 &= -2400 \\ X_1 &= -13600 \end{aligned} \right\} \text{ que da } P = 63570 \text{ Kg.}$$

es decir, el valor que ya obtuvimos.

A partir de este momento y para aumentos ulteriores de P , el elemento (1) no admitirá, dentro de la aproximación del método, aumentos de esfuerzos, deformándose plásticamente y modificando, por tanto, el estado de autotensión de la estructura. El punto imagen recorrerá el lado del polígono de plastificación en el sentido de las P crecientes hasta llegar en C a cortar otro lado, el (6), para un valor de P dado por:

$$\left. \begin{aligned} -0,02957 P + 0,0384 X_1 &= -2400 \\ +0,0487 P + 0,066 X_1 &= +2400 \end{aligned} \right\} \text{ que da } P = 65400 \text{ Kg.} \\ X_1 = -11400 \text{ Kg}$$

Para cualquier otro aumento de P , el punto imagen se saldrá del polígono de plastificación, lo que nos dice que por encontrarse $m + 1$ (en este caso 2) de sus elementos en su límite plástico, se habrá convertido la estructura en un mecanismo móvil, produciéndose su colapso sin nuevos aumentos de P . Hemos alcanzado la carga "límite", que es el valor obtenido de $P = 65400 \text{ Kg.}$, mayor que el obtenido por la deformación inicial impuesta y un $\frac{65400 - 49250}{49250} = 30,66$ por 100 mayor que el que nos da la teoría clásica.

De la simple observación del polígono de plastificación y del recorrido del punto imagen $OABC$ en los sucesivos estados tensionales, se desprenden propiedades muy interesantes.

En primer lugar, vemos que existe la posibilidad de que a pesar de ir aumentando la carga exterior P de forma monótona, como sucede en el trayecto BC , pueda producirse la descarga momentánea en algún elemento, como sucede respecto a los (2) y (3) al alejarnos de sus correspondientes rectas de equilibrio, lo que supone disminución en los valores de la tensión total.

Igualmente comprobamos la propiedad fundamental en la teoría de la plasticidad de que la tensión depende no solamente del valor de la carga instantánea de la historia de dicha carga. En efecto, todos los puntos situados en una paralela al eje X , de valor $P = P_1$, y que se encuentran dentro del polígono de plastificación, corresponden a casos posibles de estado tensional, a los que puede llegarse por diferentes caminos del punto imagen y para los que para un mismo valor de P , la tensión total es diferente por depender de X , es decir, de la autotensión.

En general, la expresión del trabajo elástico de

(1) El procedimiento gráfico de obtención de la carga límite fué dado a conocer por Rjanitsyn en su obra "Problemas de mecánica de los sistemas deformables" y completado en su obra posterior "Cálculo a la rotura y plasticidad de las construcciones". También ha sido comentado por Prager en "Problemas de plasticidad teórica", y Franciosi, "Sul calcolo a rottura delle strutture monodimensionali in regime elasto-plástico", etc.

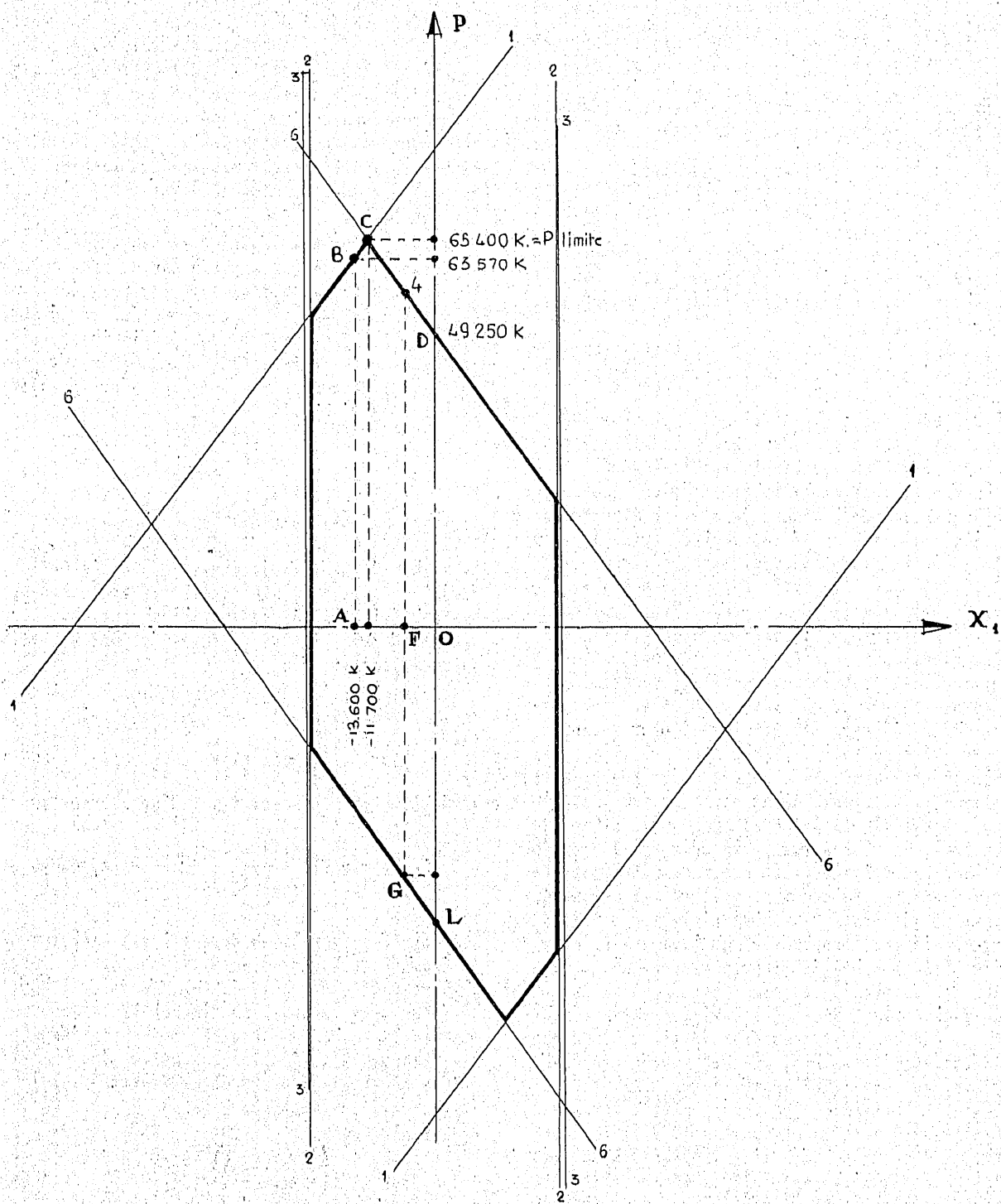


Figura 3.^a

deformación debido a la tensión total será, según [III-1]:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(T_i)^2}{e_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{[(T_{ip})P + \sum_{j=1}^m (T_{ij})X_j]^2}{e_i},$$

que en virtud de las condiciones de ortogonalidad y normalización se convierte al desarrollarla en:

$$W = \frac{1}{2} (P^2 + \sum_{j=1}^m X_j^2),$$

cuyo segundo miembro es la mitad de la distancia al origen del punto imagen en el hiperespacio de $m+1$ dimensiones. En nuestro ejemplo anterior se reduce a $2W = P^2 + X_1^2$.

Esta propiedad del punto imagen nos confirma diversas propiedades de máximo y mínimo en las deformaciones elastoplásticas.

Entre ellas, las de "que mientras no se produzca una descarga (disminución del valor de la fuerza exterior) de todos los estados de equilibrio posibles, se verificará únicamente el que hace mínimo al trabajo de deformación elástico, sin rebasar el límite de plastificación". En efecto, al recorrer el punto imagen en el sentido de las P crecientes las sucesivas rectas de equilibrio sin salirse del polígono plastificación, su posición en cada una de ellas es tal que su distancia al origen (y por tanto, el trabajo de deformación elástico) es mínima.

Igualmente, los teoremas de Bleich generalizados por Melan (1), tan importantes para el caso de cargas variables, tienen una confirmación muy interesante en la representación gráfica.

Si partiendo del estado neutro (fig. 3.^a) aumentamos la fuerza exterior hasta un valor representado por la posición H del punto imagen y seguidamente descargamos la estructura e invertimos el sentido de la fuerza exterior hasta alcanzar los valores representados por las posiciones G y I , nos encontramos con que el elemento (6) habrá alcanzado su límite elástico positivo deformándose plásticamente en el recorrido DH , se habrá descargado después manteniendo una autotensión y, por lo tanto, una deformación plástica para alcanzar posteriormente su límite elástico negativo. Una sucesión de ciclos de carga como éste, con inversión de las deformaciones plásticas, lleva, como lo comprueba la experiencia, de forma segura a la rotura.

Igual sucede por acumulación de deformaciones plásticas del mismo sentido si al descargar la estructura hasta cero (posición F del punto imagen) volvemos a cargarla sucesivamente en la misma forma, lo que originará la rotura por fatiga del elemento (6).

(1) H. Bleich: "Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens der Baustoffes". *Bauingenieur*, 1932.

Si, por el contrario, encontramos uno o varios estados de autotensión, tal que cuantas veces repitamos la carga exterior P pueda repetirse el ciclo sin acumulación de deformaciones plásticas en ningún sentido, la estructura se habrá "adaptado" o "acomodado" para dicho valor de la carga exterior P , la que podrá repetirse cuantas veces se quiera sin temor a la rotura. Esto es, en esencia, el teorema de Bleich, y en la representación gráfica, por ejemplo, el punto F corresponde a una autotensión tal que la estructura de la figura 2.^a, a , se acomoda para valores de P entre los correspondientes a las posiciones H y G del punto imagen.

Este teorema de Bleich tiene una interesante aplicación para la obtención de la carga límite en el caso de estructuras sometidas a cargas alternadas o variables. En nuestros "Comentarios sobre la plasticidad en el cálculo de estructuras", publicado en esta REVISTA en marzo de 1960, dábamos un ejemplo de aplicación de este teorema a una viga hiperestática con carga variable.

* * *

Cuanto hemos expuesto para la estructura de la figura 2.^a, a , puede aplicarse a cualquier otra, como, por ejemplo, a la de la figura 2.^a, b , de un número infinito de elementos. En este caso tendremos un número infinito de rectas de equilibrio, por lo que parte o el total del polígono de plastificación se convierte en una curva continua.

Para el sencillo ejemplo de la figura 2.^a, b , se tiene que los esfuerzos que nos interesan son ahora los momentos de flexión en las secciones de la viga, por lo que la doble expresión [III-3] será, en función de la variable $x' = \frac{x_i}{l}$, que nos define el elemento i :

$$M_{F(-)} = p \cdot l^2 \left(\frac{3x' - 4x'^2}{8} \right) - X \cdot x' = M_{F(+)},$$

es decir, dos familias de rectas de un parámetro x' y el dominio de los casos posibles es el que se indica en la figura 5.^a (tomada de la obra citada de Rjanitsyn: "Cálculo a la rotura y plasticidad de las construcciones"), formada por dos segmentos rectilíneos (correspondientes al elemento $x' = 1$) y dos fragmentos de las curvas envolventes de las familias de rectas anteriores, cuyas ecuaciones son:

$$\left(\frac{3pl^2}{8M_F} - x' \right)^2 = \pm 2p.$$

La carga límite se obtiene para el valor máximo de p , y tiene lugar para los puntos definidos por $x' = 1$; $x' = \sqrt{2} - 1 = 0,414$, siendo su valor

$p = \frac{6 + 4 \sqrt{2} M_F}{l^2} = 11,659 M_F/l^2$, es decir, un $\frac{11,659 - 8}{8} = 46,7$ por 100 mayor que la que se obtiene por la resistencia de materiales clásica (1).
Para los sistemas hiperestáticos de segundo grado

Las inequaciones [III-3] nos definen ahora dos familias de planos que formarán un poliedro de plastificación o, en el caso más general, de un número infinito de elementos, una superficie en el espacio de tres dimensiones que encierra el dominio de los casos posibles.

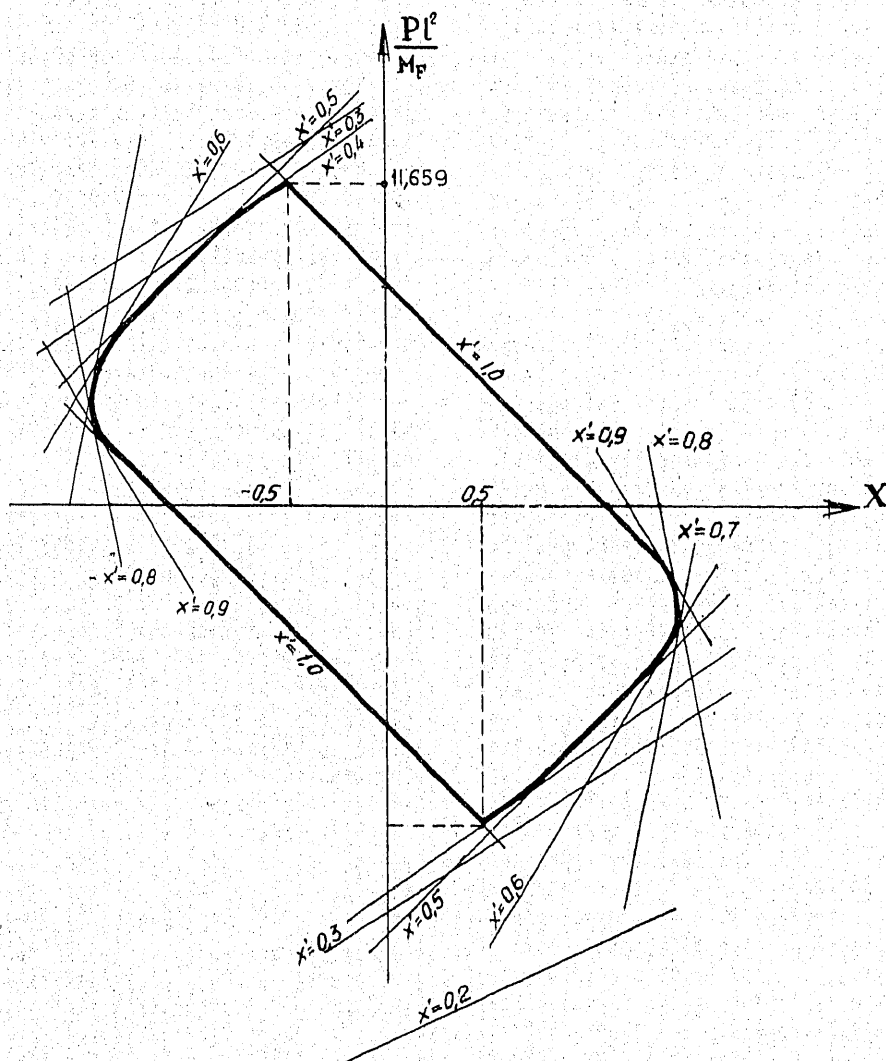


Figura 4.*

el sistema a seguir es el mismo, aunque algo más complicado.

(1) Esta economía es considerando el problema bajo un solo aspecto, ya que deberá tenerse en cuenta en cada caso la influencia de los esfuerzos normales y transversales y el factor de forma de la sección, fundamental en la resistencia a flexión y que viene definido por la relación entre los módulos resistentes plástico y elástico:

$$f = \frac{W_p}{W_e}$$

En general, como ya dijimos, en el espacio de $m + 1$ dimensiones correspondiente a la existencia de m incógnitas hiperestáticas, la frontera o condición de plastificación determina un dominio de casos posibles conteniendo al origen, que al ser convexo hace que en cada uno de los puntos de la superficie frontera exista un hiperplano que pasando por él, deje de un lado todo el dominio. Este hiperplano determina para cada punto de la superficie frontera el elemento i en que se ha alcanzado el límite elástico.

Hemos expuesto en forma resumida las enormes posibilidades que para mejorar su estabilidad tienen las estructuras hiperestáticas mediante la creación de un estado de coacción o autotensión debido a unas deformaciones impuestas en forma conveniente. Esta propiedad hace inclinar la balanza de forma decisiva a favor de este tipo de estructuras con enlaces superabundantes, frente a las antiguas teorías que hacían a muchos proyectistas decidirse por construcciones isostáticas en que el equilibrio estuviese estáticamente determinado.

En el sencillo ejemplo de la estructura triangulada de cubierta, hemos visto cómo modificando la longitud de un elemento, se origina una autotensión de la estructura que la hace susceptible de aumentar su capacidad de resistencia. En muchos casos, la creación de una autotensión adecuada a estructura descargada, permitirá conseguir un aumento de resistencia. Tal es el caso del hormigón pretensado. Hemos visto también cómo de la consideración de las deformaciones plásticas producidas bajo carga y de la redistribución de tensiones que tiene lugar, se llega a la obtención de la carga límite que convierte a la estructura en mecanismo.

Debemos recordar que, como dijimos al principio, el fenómeno completo de la deformación es sumamente complejo, no habiendo considerado aquí más que un aspecto del mismo. Se ha supuesto en los ejemplos considerados que no existían fenómenos de fluencia lenta o de relajación, y lo que es muy importante, se ha eliminado la posibilidad de pandeo.

La representación gráfica, cuyos fundamentos he-

mos expuesto ligeramente, nos sirve para analizar el proceso completo de la deformación de la estructura para cada sistema de cargas exteriores y de autotensión. Nos permite obtener el valor de las deformaciones plásticas y la carga "límite". Sobre este último punto, en los casos prácticos, es más aconsejable seguir alguno de los diversos procedimientos en boga (1) basados esencialmente en los dos métodos fundamentales: "estático" y "cinemático". La economía que puede obtenerse es muy importante, por lo que su aceptación es cada día mayor, especialmente en el proyecto y cálculo de estructuras metálicas. En un reciente número del *Engineering News Record* leemos que a pesar del gran obstáculo que supone la inercia mental de los proyectistas para cambiar los métodos de cálculo tradicionales, tres de los cuatro Códigos de edificación más importantes de los Estados Unidos (2), han adoptado el cálculo plástico para las estructuras metálicas, y en una obra reciente, la construcción de una planta industrial en Nashville (Tennessee), con 27 000 metros cuadrados de planta edificada (la más importante calculada por el método plástico en dicho país), la economía en acero obtenida ha sido del 19 por 100.

(1) Sobre estos métodos existe abundante bibliografía, debida, entre otros, a Greenberg, Prager, Neal, Symonds, Beedle, Hill, Colonnetti, Gartner, etc. Aconsejamos especialmente la lectura de la reciente obra de Carlos Benito: "Cálculo plástico. Vigas y pórticos", publicada por el Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento.

(2) Son los siguientes: "Basic Building Code of the Building Officials of America", "Uniform Building Code of the International Building Officials Conference" y el "Southern Building Code of the Southern Building Congress".