

LAS MATEMATICAS DE SELECTIVO E INICIACION

Por ALBERTO DOU MAS DE XEXAS

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Catedrático numerario de la Escuela Técnica Superior del Cuerpo.

Trata este artículo de la reforma de la enseñanza matemática en nuestro país. Es ya hora de abandonar el clásico sistema de aprender matemáticas mediante recetas que apenas dan elementos de juicio al que las ha de emplear después, y se deben adoptar, en cambio, métodos didácticos más lógicos, basados en el estudio de los verdaderos fundamentos de la matemática moderna, que dan, a quien la debe manejar, posibilidades casi ilimitadas de razonar y de descubrir perspectivas ocultas a los que las han aprendido por los métodos antiguos. Así las matemáticas se convierten, además, en el magnífico auxiliar que verdaderamente son, de toda investigación científica y de la mayor parte de las investigaciones técnicas. El P. Dou facilita, como complemento de su proposición de reforma de los estudios matemáticos, un esquema de las nuevas materias que según él se deben estudiar, y lo complementa con una citas bibliográficas.

Fines generales.

El objetivo final de la estructuración de la enseñanza de las matemáticas en los cursos Selectivo y de Iniciación puede decirse es el máximo desarrollo científico y técnico del país. El cual se concreta en conseguir una máxima eficiencia en los futuros Ingenieros. Esta eficiencia parece puede valorarse considerando que consta de las tres capacidades siguientes:

a) Eficiencia adquirida al terminar la carrera. Es decir, conviene *ceteris paribus* que al terminar la carrera los recién Ingenieros se encuentren capacitados para el mayor número posible de óptimas actividades dentro de su rama o especialidad; y esto sin requerir nuevos estudios, requerimiento que de hecho se da y dará siempre en buena parte de los graduados:

b) Capacidad para mejorar de una manera sustancial su propia eficiencia, mediante un continuado interés y estudio de algunos problemas particulares de su especialidad. La capacidad a que nos referimos requiere un aparato matemático más profundo. Por ejemplo, el que quiera estudiar un problema físico a fondo, más aún, sólo con que pretenda comprender la situación actual de un problema físico — hidrodinámica, elasticidad, perturbaciones no lineales... —, necesita de un bagaje de Análisis funcional que le permita leer los libros de matemática pura o aplicada en que se tratan actualmente tales problemas. La adquisición de este bagaje es larga, costosa (no hay un camino regio para aprenderla en ocho días) y desgraciadamente en parte inútil para los ya satisfechos con la capacidad a) de la eficiencia adquirida.

c) Capacitación para poderse dedicar a la enseñanza de las disciplinas teóricas en las mismas Escuelas Técnicas Superiores, o a la investigación, aunque no sea con dedicación completa. En este nivel puede afirmarse simplemente que no existe una división en-

tre las matemáticas puras y las aplicadas a la física o a la técnica. En efecto, los problemas físicos han adquirido tal complejidad que los métodos exclusivamente basados en la intuición o en teoremas imprecisos no ofrecen ya suficiente garantía. Hay que acudir a métodos rigurosos, de donde resulta que la matemática pura es el único instrumento digno de confianza para abordar los modernos problemas físicos: aun reconociendo lo poco que ayuda, lo mucho que cuesta y la grosera aproximación que ofrece de la realidad, resulta ser el instrumento más útil.

Es difícil declarar dónde se separan las capacidades a) y b), o las b) y c); pero a) y c) se distinguen perfectamente y parece también que las tres son suficientemente distintas.

Para ver la importancia que para la Nación tienen las capacitaciones b) y c) copio el siguiente párrafo del señor L. Villena, que suscribo:

"Quiero terminar con una afirmación que quizá sea gratuita, y que, desde luego, hago a título completamente personal. Estoy seguro de que la investigación española no alcanzará su madurez mientras los Ingenieros, en bloque, no sientan la necesidad de la investigación y no se incorporen de verdad a ella." (Primer Seminario de Ens. Sup. Cient. y Téc., Madrid, 1960, pág. 166. Publicación del Ministerio de Educación Nacional).

Tres principios: I. Pragmatismo. II. Rigor moderno. III. Armonización.

I) A veces se invoca el valor formativo de algunas materias para su inclusión en los programas. Si por formación matemática se entiende una capacitación de tipo b), y creo que éste es el sentido en que generalmente se invoca el carácter formativo, el criterio es evidentemente razonable.

Pero parece que se usa también en un sentido superior, como formativo de las cualidades en sí mismas y con valores independientes de todo valor pragmático; por ejemplo, cuando se dice que tal parte de las matemáticas enseñan a discurrir o que familiarizan al estudiante con alguna noción demasiado vaga. Parece que esta razón es inadmisibles después del Bachillerato e incluso muy dudosa en conexión con el Bachillerato mismo. La apelación a este valor formativo superior parece inadmisibles porque comparando el máximo tiempo posible de dedicación a las matemáticas con los posibles temas de estudio, han de quedar siempre muchos temas útiles sin ser tratados; y sobre todo, es inadmisibles porque no se ve razón alguna por la que los temas inútiles hayan de ser más formativos que los pragmáticos, siendo así que han sido los temas con repercusiones prácticas los únicos que siempre y normalmente han sido incluidos en los textos de historia de las matemáticas. Por ejemplo, no se ve por qué pasarse las horas resolviendo triángulos dados tres datos, aunque sean inverosímiles, haya de ser más formativo que estudiar el grupo de movimientos y sus relaciones con el álgebra de matrices.

II) Las matemáticas de Selectivo e Iniciación han de empezar en los fundamentos y han de ser autónomas, sin depender en su estructuración ni en sus demostraciones de las matemáticas aprendidas en el Bachillerato. Constituyen una segunda etapa, o mejor, constituyen el comienzo de la segunda etapa y última en el desarrollo matemático del Ingeniero.

Esta segunda y definitiva etapa que empieza con el Selectivo difiere cualitativamente de la primera, que termina con el Bachillerato y Preuniversitario. No se trata tanto de efectuar un empalme de materias cuanto de reestructurar todo el edificio matemático sobre la base del método matemático, y ello de una manera definitiva en las materias que se tratan, de manera que ya no sean precisas en el futuro ninguna clase de rectificaciones.

Tanto por su edad como por los estudios de Bachillerato el alumno de Selectivo llevado de un buen profesor es perfectamente capaz de edificar esa estructura con un método, el matemático, que difiere esencialmente de todos los demás métodos propios de las otras ciencias, y que sólo guardándolo puro será capaz de prestarle los beneficios que caben esperar de él, quizá muchos años más tarde en plena actividad profesional.

Las matemáticas de Bachillerato han de ser y son más bien una parte de la física, en cuanto parece que jamás han de perder de vista la intuición y la aplicación práctica inmediata. Quizá pueda decirse que lo más importante sería que adquirieran hábitos de cálculo e ideas intuitivas lo más exactas posibles de las nociones que más tarde se han de mostrar las más potentes. Por ejemplo, que adquirieran automatismo en derivar e integrar las funciones más sencillas y

elementales y asimilasen las nociones intuitivas de función, límite y continuidad.

Si se considera que la Humanidad tardó dos siglos de Newton a Cauchy, en aprender a "epsilonizar", quizá se comprenda que en el Bachillerato es mejor renunciar a un concepto completo matemáticamente puro de continuidad, y que esto ha de ser el objeto de varias lecciones del curso Selectivo. A mi parecer, el alumno de Bachillerato sería capaz de entender bien el concepto más simple y radical de continuidad topológica, pero al menos por ahora no está el horno para bollos.

Parece, pues, que deben reconocerse dos etapas, esencialmente distintas porque difieren en el método, en la formación matemática de un Ingeniero, cuya división parece debe ponerse al fin del Preuniversitario y comienzo del Selectivo.

De ninguna manera se trata de parvificar la importancia de las matemáticas en el Bachillerato; si tal acaeciera habría que incluir el Selectivo en la etapa intuitiva y empezar la etapa abstracta con el curso de Iniciación.

La aceptación de estas dos etapas con sus distintos métodos y la consecuente necesidad de una estructuración a partir de los fundamentos parece es obvia en la formación de los Ingenieros en las Escuelas Técnicas Superiores. La segunda etapa matemática en la forma dicha es absolutamente indispensable para la adquisición de la capacidad b) y parece casi traición a la nación no suministrar esa eficiencia a los estudiantes capaces que no se nieguen a ella. Naturalmente, lo mismo hay que decir, y *a fortiori*, de las Secciones de Físicas y Matemáticas de nuestras Universidades; y es claro que así lo han entendido los catedráticos que han publicado textos o apuntes de Matemáticas para el curso Selectivo. Por el contrario, en las Escuelas de Peritos se debe empezar con un segundo ciclo matemático, continuación del anterior y basado en el mismo método intuitivo físico-matemático, pues no parece que el trabajo de la estructuración matemática pura fuera suficientemente compensado por los trabajos que de él se obtendrían. Lo mismo parece debe decirse, y también *a fortiori*, de las matemáticas de las Facultades de Medicina y Farmacia y de las Secciones de Geología y Biología.

Una vez empezada la segunda etapa, tanto por su naturaleza como por la edad de los estudiantes, no parece sea conveniente planear volver de propósito sobre las mismas materias en sucesivos ciclos. Ello representaría por lo menos pérdida de tiempo y probablemente también una disminución del rendimiento por parte de los estudiantes.

III) Las tres capacidades que hemos mencionado como integrantes de la eficiencia del Ingeniero no se desarrollan paralelamente a lo largo de la formación en buena simbiosis, sino que, por el contrario, se excluyen parcialmente de modo que a veces el máximo

desarrollo de la primera resulta incompatible con el máximo desarrollo de las otras dos. Ya en los años de la carrera antes del doctorado hay que tener en cuenta las capacitaciones *b)* y *c)*, aunque ello pudiera resultar en una merma de la capacitación *a)*; por otra parte no se sabe quiénes son los que con la carrera acabarán su interés o estudio, ni aunque se supiera sería posible separarlos.

Hay que establecer un compromiso y armonizar los diversos valores con el objetivo de una eficiencia total máxima. Una mayor estima de las capacidades *c)* y *b)* o un deseo de incrementar la investigación lleva a unos cursos con mayor base matemática que resultará muy útil y "práctica" para los que se dediquen luego a la investigación, pero parcialmente inútil a los que queden con la sola capacitación *a)*.

Cuanto más potente en profundidad o universalidad sea el bagaje matemático con el que se quiera equipar a los futuros Ingenieros, tanto más abstracto y aparentemente inútil ha de ser la base que hay que impartirles, y como esta base tiene que serles dada, por lo menos en gran parte, en los cursos que nos ocupan, de ahí que ese complejo problema afecta muy especialmente estos dos cursos.

He aquí algunas normas que parece deberían regir esa armonización:

A) Según el principio II) hay algo, que llamaremos materia puramente básica — porque es necesaria para dar a las matemáticas de la segunda etapa ese carácter riguroso y moderno de que hemos hablado —, que necesariamente debe ser enseñado a todos los alumnos, aunque tuviera que resultar parcialmente inútil para la capacitación *a)*. Es una concesión, o mejor, una obligación que se tiene con los que han de salir con las capacitaciones *b)* y *c)*, pues sin esa materia puramente básica explicada al comienzo se les dificultaría extraordinariamente su adquisición en el futuro. Algunos de los actuales graduados se lamentan de que no se les enseñó suficientemente esta materia cuando ellos estudiaron.

B) Las restantes materias de las matemáticas de esos dos cursos — que en casi su totalidad o en gran parte han de ser las matemáticas clásicas de nuestros antiguos programas — deberían darse de manera que la estructura rigurosa moderna no sufra quebranto.

C) No hay inconveniente en omitir demostraciones con tal que se comprendan los teoremas, lo cual no se opone al principio II). Aunque eso debe hacerse muy raramente en esos cursos fundamentales.

D) Tampoco hay inconveniente en que se usen nociones intuitivas adquiridas en el Bachillerato o se den expresamente para un determinado capítulo cuando así lo requiera una buena didáctica, con tal que más adelante y antes de que acabe el curso de Iniciación se entronquen esas nociones de una manera rigurosa moderna en la segunda etapa. Así, por ejemplo, es a veces recomendable mezclar álgebra y análisis, y las geometrías sintética, analítica y topológica,

explicando cuidadosamente la distinta naturaleza de cada concepto.

E) Parece que todas las matemáticas de Selectivo e Iniciación, sin exceptuar concepto ni teorema alguno, deberían ser estructuradas conforme al puro método matemático propio de la segunda etapa.

Aplicación a casos concretos.

1. Nociones de teoría de conjuntos. Parece que unas lecciones, quizá tres o cuatro, sobre la teoría de conjuntos deberían abrir el curso Selectivo y empezar con un léxico firme la segunda etapa. Deberían incluir las nociones y definiciones precisas de conjunto, función y operaciones, producto de conjuntos, reunión e intersección incluyendo la ley de dualidad. Quizá también las nociones de orden y equivalencia y aun el postulado de Zermelo, aunque estas nociones pueden también explicarse la primera vez que se necesitan (lo cual tampoco habría inconveniente en hacerlo con todas las mencionadas; convendría empero darlas todas relativamente pronto).

Claro que no se trata de dar una justificación (metamatemática) de las dificultades conexas con tales fundamentos, sino solamente de ofrecer una base sólida con los correspondientes simbolismos y terminología que hoy día son completamente del dominio común. La segunda etapa tiene que tener una base axiomática que hay que darla, sin más justificación que el sentido común o la historia, sin entrar, naturalmente, en teoría alguna sobre los fundamentos.

2. Nociones de Álgebra moderna. Este es el punto que me parece más esencial. Parece que esas lecciones deberían seguir inmediatamente a las de Teoría de Conjuntos e incluir las nociones de grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial y los espacios vectoriales euclídeos con número finito de dimensiones. Nociones de homomorfismo e isomorfismo. Quizá fuera muy conveniente estudiar todo esto en conexión con las nociones que ya se tienen de número entero, racional, real y complejo, con lo que estas nociones quedarían ya rigurosamente estructuradas.

Estas nociones son las que teníamos principalmente presentes cuando en III *A)* hablábamos de materias puramente básicas.

3. Álgebra lineal. Incluye el estudio de los operadores lineales en el espacio euclídeo y el correspondiente capítulo del álgebra de matrices, del grupo lineal y de la similitud de matrices. También el estudio de las formas cuadráticas. Parece importante se insista en los espacios vectoriales duales.

Quizá la Geometría del Selectivo podría terminar con un estudio suficientemente completo de las cónicas, y a estos efectos se podría dar la noción de espectro de una matriz y un teorema simplificado sobre la diagonalización de matrices, especialmente para el caso de una matriz simétrica. Entonces la discusión

de las cónicas en el Selectivo y de las cuádricas en el de Iniciación resultaría casi trivial.

Esta materia, en sus resultados, es totalmente clásica y supongo hay unanimidad en incorporarla a los programas de Selectivo o Iniciación. Parece también muy conveniente que estos resultados se enseñen siguiendo un esquema análogo al anterior, algo más abstracto que lo que se suele hacer.

En orden a obtener los resultados presentes, quizá no sea claro cuál sea el método más práctico; pero si se tiene en cuenta que el Álgebra de matrices es muy útil para muchas y variadas cuestiones relativamente elementales y la importancia de la noción de operador lineal continuo para abordar los actuales problemas de la Física y Técnica, parece no puede dudarse de que un camino análogo al mencionado es más eficiente y práctico que los métodos clásicos.

4. Considerando la importancia creciente en el Análisis funcional de la noción de dualidad, parece sería conveniente acentuar el principio de dualidad en el espacio euclídeo y desarrollar la Geometría analítica sin parvificar las coordenadas tangenciales.

5. La noción de integral en el curso de Iniciación debe ser la de Riemann. Si hubiera tiempo, sería muy de desear que se diera también la noción de Lebesgue-Stieltjes, aunque ésta puede ser también un excelente capítulo del Análisis matemático dentro de la carrera (de paso séame permitido indicar mi preferencia por el título "Análisis matemático" respecto de "Ampliación de matemáticas") o como materia básica en el doctorado de ciertas especialidades. Es ciertamente más importante insistir en los múltiples aspectos de la integral de Riemann.

6. Nociones de Topología. Con mayor titubeo expongo las consideraciones siguientes; pero no quiero omitirlas dada la importancia de la cuestión.

El esquema podría ser algo así: Definición de una Topología. Abiertos, entornos; continuidad. Topología relativa. Espacio vectorial topológico. Espacios separados y convergencia. Nociones de compacidad y conexión.

Estas nociones participan del carácter puramente básico mencionado anteriormente, pero no es claro para mí en qué medida pueden o deben ser impartidas para que compensen la aparente inutilidad de su contenido y el pequeño esfuerzo que se requiere para su asimilación.

He aquí una línea de pensamiento: Parece necesario, por lo menos en las Secciones de Matemáticas y Físicas y en la mayoría de las Escuelas Técnicas Superiores, que antes del doctorado, y, por consiguiente, durante las asignaturas matemáticas de la carrera, adquieran los graduados la noción abstracta del espacio de Hilbert o por lo menos algunas realizaciones concretas del mismo como espacios de funciones.

Si ello es así, parece se sigue que es conveniente que cuanto antes se asimilen por los estudiantes las nociones fundamentales del esquema mencionado, las cuales se mostrarán muy útiles en casi todos los teoremas del Análisis. Por consiguiente, si esas nociones se restringen a espacios normados, se adquieren sin ningún malgasto de tiempo ni pérdida alguna de eficiencia; y puesto que gozan de este carácter básico que da consistencia y mayor inteligibilidad a todo el Análisis, resulta que esas nociones deberían integrar los cursos de Selectivo e Iniciación, y, al parecer, mejor el primero de los dos.

Parece hay todavía otra razón que justifica la restricción del esquema dado a los espacios normados, o mejor a los espacios métricos, pues sin mayor esfuerzo se gana generalidad. Y es que son pocos los que llegarán a manejar espacios no metrificables, y aun esos pocos, en el estudio de espacios no metrificables se valdrán esencialmente de espacios normados densos en los espacios que quieran estudiar.

Bibliografía.

Desde hace varios años sigo con interés la literatura universal (francesa, inglesa y alemana) relativa al contenido y estructuración de las matemáticas de estos cursos, y me parece es patente la falta de unanimidad incluso en cuestiones importantes. Con todo, si uno se limita a textos de autores de excepcional valer, universalmente reconocido, parece que la uniformidad es bastante notable y confirman los principios y conclusiones que he expuesto; o mejor dicho: de esos libros es de donde he sacado los pareceres que he desarrollado a lo largo de estas páginas.

He aquí algunos de estos textos:

Autores: H. Cartan, ..., Lichnerowicz, ... Título: *Structures algébriques et structures topologiques*. Monographies de L'Enseignement Mathématique, núm. 7. París, 1958.

Autor: A. Lichnerowicz. Título: *Algèbre et Analyse lineaires*. Masson, éditeurs. París, 1956.

Director (Editor, Herausgeber): S. Fluegge. Autores: G. Falk, H. Tietz, I. N. Sneddon, L. Collatz y H. Bueckner. Título: *Handbuch der Physik. Encyclopedia of Physics. Mathematische Methoden* B. I und II (especialmente el segundo volumen). Springer-Verlag, 1957.

Colección: University Mathematical Texts. Directores: A. C. Aitken and D. E. Rutherford. Especialmente los volúmenes más elementales: *Determinants and Matrices, Topology*. Oliver and Boyd, London. Interscience, New York, 1950-1959. Varios de estos textos han sido traducidos bajo la dirección del catedrático D. Tomás Rodríguez Bachiller.

El primero es un ciclo de conferencias por los mejores matemáticos franceses, dirigidas a los pro-

fesores de matemáticas. Los restantes son libros de matemáticas para físicos y técnicos. Los autores son físico-matemáticos de reconocida fama internacional que saben lo que escriben y son, además, capaces de valorar la mayor o menor utilidad o alcance de los diversos capítulos de las matemáticas, y seleccionan aquellos que juzgan son o han de ser los más potentes.

Observación.

La realidad de la situación actual respecto del profesorado — y me refiero principalmente a los profesores adjuntos y a los encargados de curso, que son quienes deberán explicar los programas — obliga a considerar lo que, sin duda y con mucho, es la mayor dificultad para una notable y rápida mejoría en el logro de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en los cursos Selectivo e Iniciación.

Que en la consecución de dichos fines la parte del profesorado sea la más importante, es obvio desde el punto de vista general. Cuales sean los profesores, será la enseñanza, y, en primera aproximación,

cual sea hoy la enseñanza, será la nación mañana, y cual sea la actual variación de la enseñanza, será la variación futura de la nación. Naturalmente, la restricción de estos principios a la materia y cursos que nos ocupan es legítima.

Pero en el caso concreto de estos dos cursos, la consideración del profesorado es todavía más importante, por razones particulares. Confiamos que se habrán elaborado programas o temarios francamente buenos, equilibrados, realistas, modernos; en una palabra: ofreciendo el máximo de eficacia. ¿Quién explicará esos programas? Los profesores de que hemos hablado fueron estudiantes inteligentes, son ahora ingenieros o licenciados excelentes, poseen una larga formación científica, pero en su mayoría desconocen las nociones de Álgebra moderna y de Topología, así como otros modernos capítulos que deberían integrar esos programas. Todas esas nociones empiezan a ser del dominio común y aparecen en los libros de texto de distintas Universidades, Institutos o Politécnicas entre 1930 y 1940, en general. En nuestra nación todavía no han entrado en las Escuelas Técnicas Superiores y sólo desde hace muy pocos años empiezan a tener vigencia en nuestras mejores Universidades. ¿Qué hacer?