

CALCULO DE ESTRUCTURAS RETICULARES

Por JOSE LUIS BLANCO VILLORIA

Ingeniero de Caminos.

Como continuación del artículo anterior, sigue ahora la "Demostración del Método". Después se expone la parte más interesante del presente trabajo de investigación: "Aumento de la Convergencia". Se trata de una pequeña y sencilla variante, con la que se consigue llegar a la aproximación deseada mucho más rápidamente.

V

Demostración del método.

El momento (barra sobre nudo; lo que indicamos con el superíndice)

$$M_{mn}^b = \dot{M}_{mn}^b + \eta_{mn} - k \left(\alpha_m + \frac{1}{2} \alpha_n \right) + \frac{1}{2} \chi_{mn} \mu$$

(para E e I , constantes);

$$M_{mn}^b = \dot{M}_{mn}^b + \eta_{mn} + k_{mn} \alpha_m - t_{nm} k_{nm} \alpha_n + \lambda_{mn} \nu$$

(para E e I , variables);

(si son pilares; si son dinteles, $\eta = \mu = \nu = 0$) en el extremo m de la barra mn de la estructura, es igual al momento $\dot{M}_{mn}^b$ de empotramiento (también de la barra sobre el empotramiento; empotramiento real o ficticio, incluso en las articulaciones); más el momento

$$\eta_{mn} = \frac{H_r h_{mn}}{3} \chi_{mn} \quad (\text{ó } \eta'_{mn} = H_r h_{mn} \lambda_{mn}),$$

(r es el piso al cual pertenece mn) producido por la carga horizontal H_r que actúa por encima del piso r (incluida la que actúa en el dintel del mismo); menos el ángulo α_m girado por el nudo m , multiplicado por la rigidez k_{mn} al giro del extremo m de la barra mn , considerada aislada, empotrada en n y articulada en m ; menos el ángulo α_n girado por el extremo opuesto n , multiplicado por la rigidez k_{nm} (ahora la barra se considera empotrada en m y articulada en n) y por el factor de transmisión t_{nm} ; más el momento $\frac{1}{2} \chi_{mn} \mu$ (ó $\lambda_{mn} \nu$) producido por la traslación del extremo superior con relación al inferior que se produce para obtenerse el equilibrio de los esfuerzos cortantes que aparecen por los giros de los nudos.

Vamos a justificar tan sólo los términos η_{mn} y $\frac{1}{2} \chi_{mn} \mu$ (ó $\lambda_{mn} \nu$), puesto que la justificación de la existencia de los otros es de sobra conocida.

La carga H_r tiene que ser contrarrestada con el esfuerzo cortante originado por una traslación Δ del piso r :

$$H_r = 3 \frac{\sum k}{h^2} \Delta$$

(para E e I constantes), (una sola k por pilar), y esta traslación Δ produce en los extremos de mn un momento

$$M^b = \frac{3}{2} \frac{k_{mn}}{h} \Delta,$$

de donde:

$$M^b = \frac{3}{2} \frac{k_{mn}}{h} \frac{H_r h^2}{3 \sum k} = \frac{H_r h}{3} \chi_{mn}$$

Análogamente, para E e I variables, tenemos:

$$H_r = \frac{\sum (r_{mn} + r_{nm})}{h^2} \Delta,$$

[siendo $r_{mn} = k_{mn} (1 + t_{mn})$],

$$M^b = \frac{r_{mn}}{h} \Delta = \frac{r_{mn}}{h} \frac{H_r h^2}{\sum (r_{mn} + r_{nm})} = H_r h \lambda_{mn},$$

que es el momento producido en el extremo m de la barra mn .

Vamos ahora con el término $\frac{1}{2} \chi_{mn} \mu$.

Tenemos ya en m un ángulo que llamamos $\alpha_{m \text{ ant}}$ (anterior), que produce en el pilar mn un esfuerzo cortante

$$t = -\frac{3}{2} \frac{k_{mn}}{h} \alpha_{m \text{ ant}}$$

Para contrarrestar este esfuerzo cortante, el extremo superior experimenta una traslación relativa

Δ con relación al inferior (si α era positiva, el extremo superior se desplaza hacia la derecha) tal, que

$$3 \frac{\sum_{(r)} k}{h^2} \Delta = -t,$$

de donde:

$$\Delta = \frac{k_{mn}}{2 \sum_{(r)} k} h a_{m \text{ ant}}.$$

El incremento del momento M_{mn}^b producido por este desplazamiento vale:

$$\begin{aligned} M_{mn}^b &= \frac{3}{2} \frac{k_{mn}}{h} \Delta = \frac{3}{4} \frac{k_{mn}^2}{\sum_{(r)} k} a_{m \text{ ant}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{3}{2} k_{mn}}{\sum_{(r)} k} \right) (k_{mn} a_{m \text{ ant}}) = \frac{1}{2} \lambda_{mn} \mu. \end{aligned}$$

Análogamente, para E e I variables, tenemos:

$$t = \frac{r_{mn}}{h} a_{m \text{ ant}};$$

$$\frac{\sum_{(r)} (r_{mn} + r_{nm})}{h^2} \Delta = -t;$$

$$\Delta = \frac{r_{mn}}{\sum_{(r)} (r_{mn} + r_{nm})} h a_{m \text{ ant}};$$

$$M^b = \frac{r_{mn}^2}{\sum_{(r)} (r_{mn} + r_{nm})} a_{m \text{ ant}} =$$

$$= \left[\frac{r_{mn}}{\sum_{(r)} (r_{mn} + r_{nm})} \right] (r_{mn} a_{m \text{ ant}}) = \lambda_{mn} \nu.$$

c. q. d.

Ahora efectuemos la suma de los momentos M_{mn}^b alrededor del nudo m :

$$\begin{aligned} \sum_{(m)} M_{mn}^b &= \sum_{(m)} \hat{M}_{mn}^b + \eta_s + \eta_l - \alpha_m \sum_{(m)} k_{mn} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{(m)} k_{mn} \alpha_n + \frac{1}{2} \lambda_s \mu_s + \frac{1}{2} \lambda_l \mu_l = -M \end{aligned}$$

(para E e I constantes;

$$\sum_{(m)} M_{mn}^b = \sum_{(m)} \hat{M}_{mn}^b + \eta_s + \eta_l - \alpha_m \sum_{(m)} k_{mn} -$$

$$- \sum_{(m)} t_{nm} k_{nm} \alpha_n + \lambda_s \nu_s + \lambda_l \nu_l = -M$$

(para E e I variables)

(los subíndices s e l significan pilar o piso inmediatamente superior o inferior).

Esta suma ha de anular al momento exterior M que haya aplicado en el nudo.

Sustituyendo M_{mn}^b , $\hat{M}_{mn}^b$ por sus reacciones M_{mn} , $\hat{M}_{mn}$ (es decir, nudo o empotramiento ficticio sobre barra), las anteriores expresiones se transforman en:

$$\begin{aligned} \hat{M}_m - \eta_s - \eta_l + \alpha_m \sum_{(m)} k + \frac{1}{2} \sum_{(m)} k_{mn} \alpha_n - \\ - \frac{1}{2} \lambda_s \mu_s - \frac{1}{2} \lambda_l \mu_l = +M; \end{aligned}$$

ó:

$$\begin{aligned} \hat{M}_m - \eta_s - \eta_l + \alpha_m \sum_{(m)} k_{mn} + \sum_{(m)} t_{nm} k_{nm} \alpha_n - \\ - \lambda_s \nu_s - \lambda_l \nu_l = +M, \end{aligned}$$

llamando $\hat{M}_m = \sum_{(m)} \hat{M}_{mn}$ (momento de sujeción del nudo).

Despejando α_m :

$$\alpha_m = -Q_m - \frac{1}{2} \sum_{(m)} k_{mn}^* \alpha_n + \frac{1}{2} \lambda_s^* \mu_s + \frac{1}{2} \lambda_l^* \mu_l,$$

ó:

$$\alpha_m = -Q_m - \sum_{(m)} \tau_{mn}^* \alpha_n + \lambda_s^* \nu_s + \lambda_l^* \nu_l,$$

llamando:

$$Q_m = \frac{\hat{M}_m - \eta_s - \eta_l - M}{\sum_{(m)} k_{mn}};$$

$$k_{mn}^* = \frac{k_{mn}}{\sum_{(m)} k_{mn}}; \quad \lambda_s^* = \frac{\lambda_s}{\sum_{(m)} k_{mn}}; \quad \lambda_l^* = \frac{\lambda_l}{\sum_{(m)} k_{mn}};$$

$$\tau_{mn}^* = \frac{\tau_{mn}}{\sum_{(m)} k_{mn}} \quad \text{con} \quad \tau_{mn} = t_{nm} k_{nm}$$

(obsérvese la alteración intencionada de los subíndices)

y recordando que:

$$\mu_r = \sum_{(r)} k (\alpha_s + \alpha_l); \quad \nu_r = \sum_{(r)} (r_s \alpha_s + r_l \alpha_l).$$

El desplazamiento total del piso r está dado por:

$$\left(\frac{2}{3} \eta_0 + \frac{1}{3} \lambda_0 \mu_r \right) h_r = \left[2 H_r \left(\frac{h_r}{3} \right)^2 + \mu_r \frac{h_r}{3} \right] \lambda_0,$$

O:

$$(H_r h_r^2 + v_r h_r) \lambda_0,$$

llamando:

$$\lambda_0 = \frac{3}{\sum (r)}; \quad \lambda_0 = \frac{1}{\sum (r_{mn} + r_{nm})}; \quad \eta_0 = \frac{H_r h_r}{3} \lambda_0.$$

$$H_r \text{ incluye también } \frac{1}{h_r} \sum (r) (\dot{M}_s + \dot{M}_i).$$

VI

Aumento de la convergencia.

La iteración se realiza mediante la expresión

$$\alpha_m = -Q_m - \frac{1}{2} \sum_{(m)} k_{mn}^* \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{(m)} z_{ma}^* v_s + \frac{1}{2} \sum_{(m)} z_{mb}^* v_i,$$

o la

$$\alpha_m = -Q_m - \sum_{(m)} \tau_{mn}^* \alpha_n + \lambda_{ma}^* v_s + \lambda_{mb}^* v_i,$$

(a, nudo inmediatamente superior a m; b, inmediatamente inferior), en donde en los índices de desplazamiento μ_s, μ_i (ó v_s, v_i) interviene $\alpha_{m \text{ ant}}$, pero no el que hallamos. Si consideramos este último en lugar del $\alpha_{m \text{ ant}}$, obtenemos una mejora de la convergencia. Es decir, hemos de considerar el siguiente incremento del índice de desplazamiento:

$$k (\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}})$$

o el:

$$r (\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}).$$

Y éste produce, a su vez, un incremento de α_m que vale:

$$\left(\frac{1}{2} \sum_{(m)} z_{ma}^* k_{ma} + \frac{1}{2} \sum_{(m)} z_{mb}^* k_{mb} \right) (\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}),$$

O:

$$(\lambda_{ma}^* r_{ma} + \lambda_{mb}^* r_{mb}) (\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}),$$

que podemos llamar:

$$\varepsilon_m (\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}),$$

llamando:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} \sum_{(m)} z_{ma}^* k_{ma} + \frac{1}{2} \sum_{(m)} z_{mb}^* k_{mb},$$

O:

$$\varepsilon_m = \lambda_{ma}^* r_{ma} + \lambda_{mb}^* r_{mb}.$$

Si de nuevo consideramos el incremento así obtenido de α_m y aplicamos otra vez el mismo proceso, obtendremos un nuevo incremento, que vale:

$$\varepsilon_m^2 (\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}).$$

Y así sucesivamente, es decir, el incremento total será:

$$(\varepsilon_m + \varepsilon_m^2 + \varepsilon_m^3 + \dots) (\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}) = \varepsilon'_m (\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}).$$

Estos valores ε'_m los anotaremos junto a cada nudo (hay un valor por nudo).

* * *

También anotaremos, junto a cada nudo, los valores:

$$\pi'_m = \sum_{(m)} \pi_{mi} + \sum_{(m)} \pi_{mi} \sum_{(i)} \pi_{ij} + \sum_{(m)} \pi_{mi} \sum_{(i)} \pi_{ij} \sum_{(j)} \pi_{jl} + \dots$$

(el tercer término suele ser ya despreciable) en donde:

$$\pi_{mi} = \left(-\frac{1}{2} k_{mi}^* \right) \left(-\frac{1}{2} k_{im}^* \right),$$

O:

$$\pi_{mi} = \tau_{mi}^* \tau_{im}^*.$$

* * *

Las reglas prácticas para conseguir un aumento de la convergencia en el proceso iterativo, son las siguientes:

Ponemos, como es natural, todos los $-\Omega$. Debajo de ellos, ponemos los valores $-\Omega (1 + \pi')$.

Con todos estos segundos valores, hallamos los índices de desplazamiento μ (ó v).

Tomamos para empezar un nudo cualquiera, aunque es preferible que sea uno muy desequilibrado (es decir, de $-\Omega$ grande). Calculamos α_m mediante:

$$\alpha_m = -Q_m (1 + \pi'_m) - \frac{1}{2} \sum_{(m)} k_{mn}^* \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{(m)} z_{ma}^* v_s + \frac{1}{2} \sum_{(m)} z_{mb}^* v_i,$$

o mediante:

$$\alpha_m = -Q_m (1 + \pi'_m) - \sum_{(m)} \tau_{mn}^* \alpha_n + \lambda_{ma}^* v_s + \lambda_{mb}^* v_i$$

$$[\alpha_n = -Q_n (1 + \pi'_n)],$$

que una máquina multiplicadora nos lo hace muy fácilmente y de una sola vez.

A este valor de α_m le restamos mentalmente:

$$\alpha_{m \text{ ant}} = -Q_m (1 + \pi'_m),$$

y sin borrar el valor α_m del totalizador, añadimos el producto:

$$(\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}) \varepsilon'_m.$$

Así obtenemos un valor más aproximado de α_m , que anotaremos debajo del $\alpha_{m \text{ ant}}$.

Acto seguido hacemos las consiguientes modificaciones de los índices de desplazamiento:

$$\nu_s, \nu_1 (\delta \nu_s, \nu_1).$$

Después podemos continuar con otro nudo. Si es un nudo alejado del anterior, un número par de barras, por ejemplo, un nudo opuesto, o sea, adyacente de un adyacente, le aplicaremos el mismo proceso que al m . Si se trata de un nudo alejado del m un número impar de barras, por ejemplo un adyacente, le aplicaremos el proceso normal, es decir, calculando:

$$\alpha_n = -\Omega_n - \frac{1}{2} \sum_{(m)} k_{nm}^* \alpha_m + \frac{1}{2} \sum_{(a)} k_{na}^* \nu_s + \frac{1}{2} \sum_{(b)} k_{nb}^* \nu_1$$

(y análogamente para E e I variables) ahora ya no se pone $(1 + \pi'_n)$, pues se consideraría esta influencia, en su mayor parte, dos veces.

Tan sólo, como cosa extraordinaria, incrementamos α_n en:

$$(\alpha_n - \alpha_{n \text{ ant}}) \varepsilon'_n,$$

en donde $\alpha_{n \text{ ant}}$ en la primera vuelta, vale:

$$-\Omega_n (1 + \pi'_n).$$

Después de la primera vuelta, tanto en los nudos tipo "opuestos" como en los "adyacentes", haremos siempre el proceso normal, es decir, calcularemos mediante:

$$\alpha_m = -\Omega_m - \frac{1}{2} \sum_{(m)} k_{mn}^* \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{(a)} k_{ma}^* \nu_s + \frac{1}{2} \sum_{(b)} k_{mb}^* \nu_1,$$

e incrementamos en:

$$(\alpha_m - \alpha_{m \text{ ant}}) (\pi'_m + \varepsilon'_m)$$

si se trata de un nudo "opuesto", y si se trata de un "adyacente" en:

$$(\alpha - \alpha_{\text{ant}}) \varepsilon'.$$

El hecho de que a los "opuestos" (nudos que están alejados del primero un número par de barras) se les considera, además, el valor π' , estriba en que la diferencia $\alpha - \alpha_{\text{ant}}$ va a incrementar los nudos adyacentes, y a los adyacentes de los adyacentes y así sucesivamente, y estos nuevos incrementos, incrementan,

a su vez, a manera de reflejo, el nudo de partida, y el factor de este "reflejo" está representado por π' (en realidad este factor es un poco mayor que π' , pues el regreso al nudo de partida, de esa influencia de incrementos, se realiza también por otros caminos distintos de los de ida).

En un "adyacente" n no puede considerarse este "reflejo", pues la diferencia $\alpha_n - \alpha_{n \text{ ant}}$ ya no es real, sino engañosa, por el hecho de que sus nudos adyacentes ("opuestos"), estaban incrementados y ya no correspondían a $\alpha_{n \text{ ant}}$. Los adyacentes hacen en el proceso iterativo el papel de freno, pues si no, todos los valores se "desbocarían" y no convergería el proceso. En cambio, los "opuestos", es decir, los que utilizan π' , tiran fuertemente de ellos mismos y de los "adyacentes", a una rápida convergencia.

* * *

Como sabemos, después de aproximar cada vez el ángulo de cualquier nudo, tenemos que incrementar los correspondientes índices de desplazamiento, mediante la expresión:

$$k(\alpha - \alpha_{\text{ant}}),$$

o mediante:

$$r(\alpha - \alpha_{\text{ant}}).$$

Después de haber hecho una vuelta completa a todos los nudos, conviene comprobar los índices de desplazamiento, mediante su expresión:

$$\nu_r = \sum_{(r)} k(\alpha_s + \alpha_t),$$

ó:

$$\nu_r = \sum_{(r)} (r_s \alpha_s + r_t \alpha_t).$$

VII

Ejemplo.

Vamos a calcular la misma estructura que calculamos anteriormente, con lo que podemos estimar el grado de aumento de convergencia conseguido.

Debajo de los valores $-\Omega$ que van subrayados, se han puesto los $-\Omega (1 + \pi')$, que también se han subrayado. Con estos segundos valores calculamos los índices de desplazamiento (encabezamiento de las columnas centrales).

Comenzamos con el nudo c por ser el más desequilibrado. Se pasa al totalizador de la máquina el valor 373,5000, se le añade el producto $-268,6 \times 0,200$ (números rojos en el multiplicador o conta-

dor de vueltas), así como el $+226,2 \times 0,250$ (números blancos en el multiplicador), añadimos después el producto $+(1\,066,8 + 1\,331,6) \times 0,031$, correspondiente a los índices de desplazamiento. A lo

A continuación hemos ido con el nudo e (de los "adyacentes"). En éste hemos pasado al totalizador el valor $240,000$ (no el $268,000$), se le añade $-193,6 \times 0,300 - 507,1 \times 0,200 + 1\,486,2 \times 0,075$. A lo

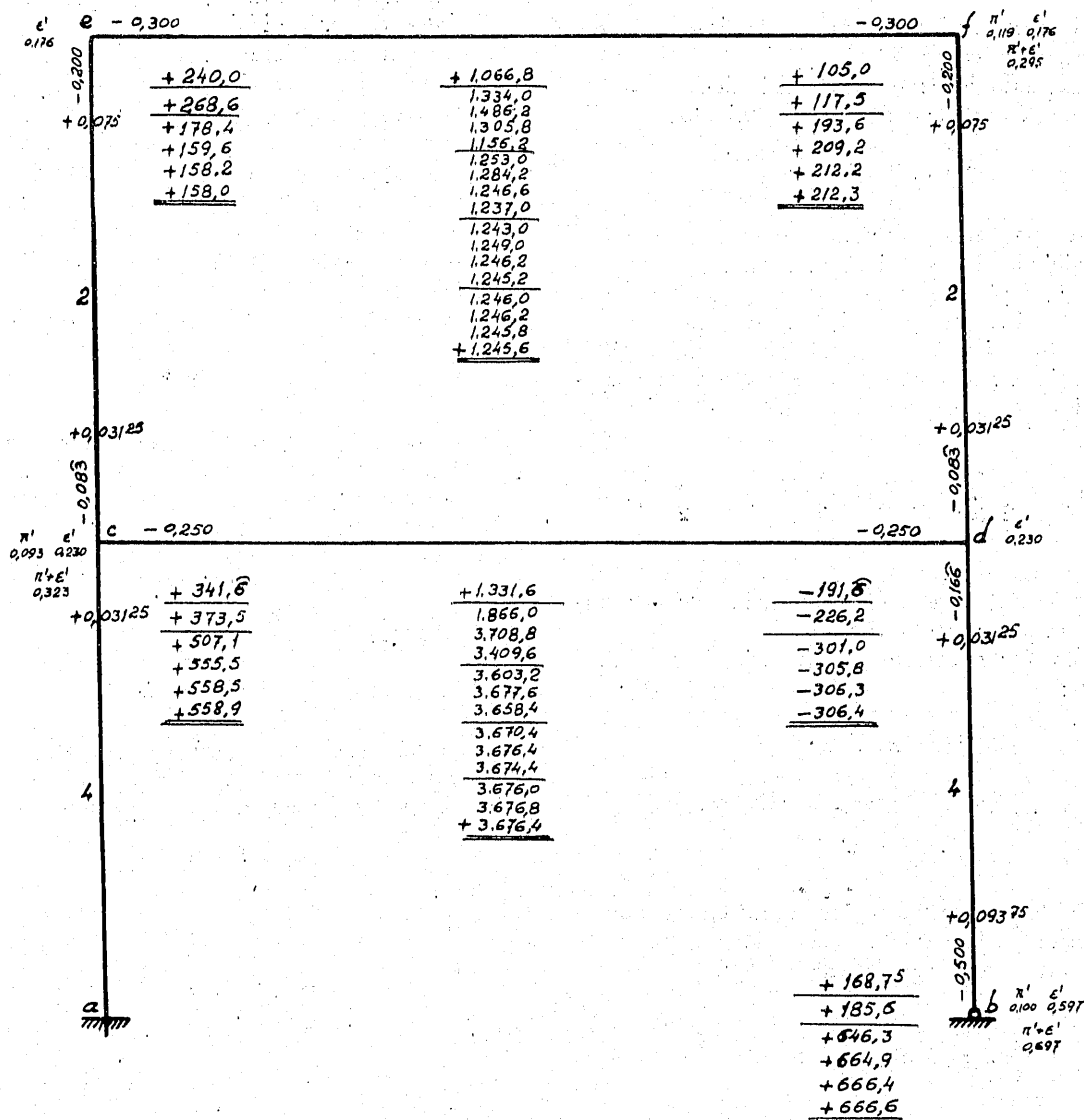


Figura 11.

que nos resulte en el totalizador le restamos mentalmente $373,5$ y esta diferencia multiplicada por $\epsilon' = 0,230$, se la añadimos al totalizador. Así obtenemos la siguiente aproximación, $+507,1$ del ángulo del nudo c . La diferencia $507,1 - 373,5$ se multiplica por $k = 2$ y $k = 4$, para incrementar los correspondientes índices de desplazamiento.

Después hemos ido al nudo f y a continuación al b , en donde se ha realizado exactamente el mismo proceso. (Estos nudos son los que hemos llamado "opuestos".)

que resulte en el totalizador le restamos mentalmente $268,6$ y la diferencia multiplicada por $\epsilon' = 0,176$ se la añadimos al totalizador (la diferencia con su signo, y así nos resulta $+178,4$. La diferencia $+178,4 - 268,6$ se multiplica por $k = 2$ para incrementar el índice de desplazamiento.

De la misma forma tratamos el nudo d : se pasa al totalizador el valor $191,6667$, se le añade:

$$193,6 \times 0,083 + 507,1 \times 0,250 + 646,3 \times 0,167 - (1\,305,8 + 3\,708,8) \times 0,031.$$

A lo que resulte en el totalizador se le resta mentalmente 226,2 y se añade la diferencia multiplicada por $\varepsilon' = 0,230$, con lo que obtenemos 301,0, que cambiado de signo es la nueva aproximación del ángulo del nudo d . La diferencia $301,0 - 226,2$ multiplicada por $k = 2$ y $k = 4$ disminuye los correspondientes índices de desplazamiento.

Con esto hemos terminado la primera vuelta. En las siguientes vueltas hemos seguido el mismo orden $c-f-b-e-d$. En los tres primeros nudos multiplicaremos la diferencia $\alpha - \alpha_{\text{ant}}$ por $\pi' + \varepsilon'$; en los dos últimos, sólo por ε' . (En estas vueltas se han hecho los cálculos tomando ya $6 (= 5 + 1)$ decimales.

Después de cada vuelta se han comprobado los índices de desplazamiento. Así, por ejemplo, después de la primera vuelta:

$$\begin{aligned} (+178,4 + 193,6 + 507,1 - 301,0) \times 2 &= 1\,156,2 \\ (+507,1 - 301,0 + 646,3) \times 4 &= 3\,409,6. \end{aligned}$$

* * *

Hemos necesitado tan sólo cuatro vueltas para obtener una gran aproximación, para la cual antes fué preciso realizar 11 vueltas (las mismas que se precisarían, por ejemplo, en el método de Cocchi, que es, entre los de Cross, Kani, Grinter, Zaytzeff y Kammüller, el más perfeccionado). (La aproximación de la tercera vuelta es ya muy grande).

El de Cross necesita hacer una columna de valores por cada extremo de barra, mientras que el método que nos ocupa sólo precisa una por nudo. Si tenemos un edificio, por ejemplo, de 8 pisos por 8 espacios, horizontalmente, la proporción de columnas de valores en uno y otro método es mayor que $\frac{3,5}{1}$.

Como en cada vuelta el de Cross hace una transmisión y una distribución (prorratio), el mayor trabajo realizado con relación a nuestro método, podíamos representarlo por la relación $\frac{2}{1}$ para el caso E e I variables, en donde $l \neq \frac{1}{2}$, pues si no tomaríamos, sencillamente, la relación $\frac{1}{1}$.

Antes hemos obtenido una relación de vueltas de $\frac{11}{4}$.

El producto de estas relaciones vale.

$$\frac{3,5}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{11}{4} = \frac{77}{4} \approx \frac{100}{5}.$$

Si por la mayor cantidad de constantes iniciales que hay que calcular en el presente método fijásemos la relación $\frac{1}{2}$, tendríamos:

$$\frac{100}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{100}{10}.$$

Es decir, el ahorro de trabajo y tiempo podemos estimarlo cercano al 90 por 100 para el caso E e I variables, y cercano al 80 por 100 en el caso E e I constantes.

VIII

Coefficientes de convergencia.

La determinación de:

$$\varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots = \frac{1}{1 - \varepsilon} - 1$$

no tiene dificultad alguna.

La determinación de:

$$\pi'_{mn} = \sum_{(m)} \pi_{mi} + \sum_{(m)} \pi_{mi} \sum_{(i)} \pi_{ij} + \sum_{(m)} \pi_{mi} \sum_{(i)} \pi_{ij} \sum_{(j)} \pi_{jl} + \dots$$

se realiza rapidísimamente con una máquina multiplicadora. En efecto: Se anotan en cada barra los valores:

$$\pi_{mn} = \left(\frac{1}{2} k_{mn}^* \right) \left(\frac{1}{2} k_{mn}^* \right) \quad \text{ó} \quad \pi_{mn} = \tau_{mn} \tau_{nm}.$$

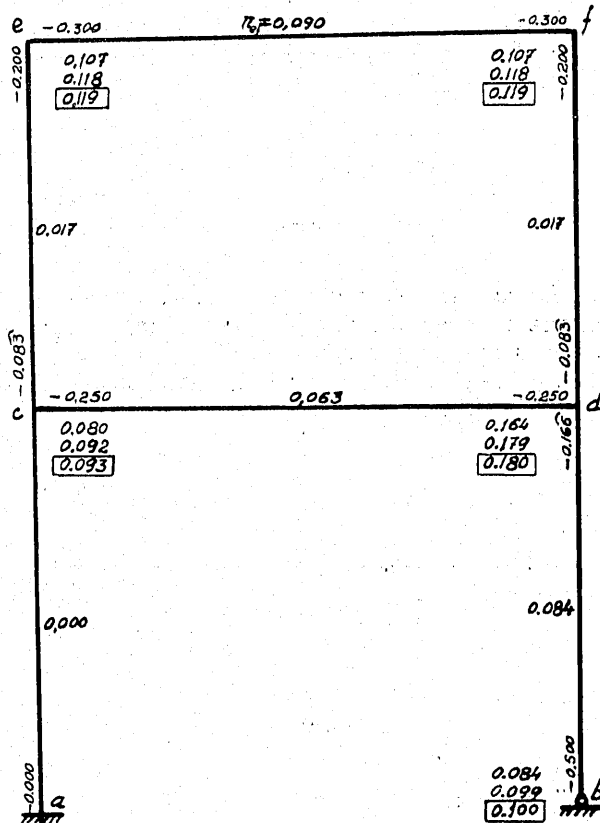


Figura 12.

Junto a cada nudo se anotan los valores:

$$\pi_m = \sum_{(m)} \pi_{m i}$$

Después de anotados todos, se pasa al totalizador de la máquina el valor π_m y se le añaden los productos $\pi_i \times \pi_{m i}$, con lo que tenemos así un valor más aproximado de π'_m . A lo sumo, con otra vuelta más tendremos aproximación sobrada de los valores π'_m . (Este proceso es también autocorrectivo, es decir, sin posibilidad de error.)

En la figura 12 se indica el cálculo de los π' del ejemplo anterior.

IX

Estructuras simétricas, simétrica o antimétrica-mente cargadas.

1.º Carga simétrica:

La estructura carece de traslaciones horizontales.

a) La estructura lleva en el eje de simetría, nudos (fig. 13).

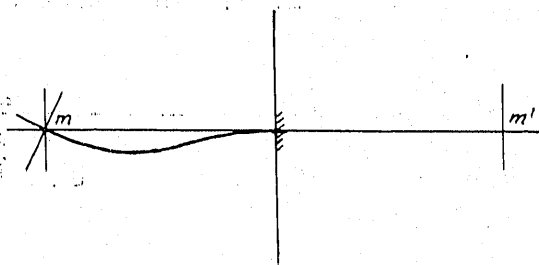


Figura 13.

En tal caso, en todos estos nudos del eje de simetría se ponen empotramientos ficticios, ya que los ángulos girados en ellos son nulos.

b) Sobre el eje de simetría caen centros de barras (fig. 14).

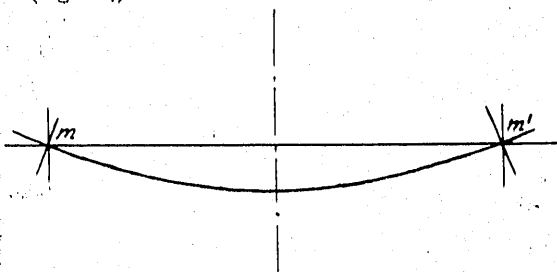


Figura 14.

Tenemos:

$$\alpha_m = -Q_m - \sum_{(m)} \tau_{m n}^* \alpha_n - \tau_{m m'}^* \alpha_{m'}$$

queriendo indicar con Σ' que de ella se ha desglosado el término $\tau_{m m'}^* \alpha_{m'}$.

Y como $\alpha_{m'} = -\alpha_m$, nos queda:

$$\alpha_m = \frac{-Q_m}{1 - \tau_{m m'}^*} - \frac{\sum_{(m)} \tau_{m n}^*}{1 - \tau_{m m'}^*} \alpha_n$$

Si E e I son constantes:

$$\tau^* = \frac{1}{2} k^*$$

Después daremos otra simplificación.

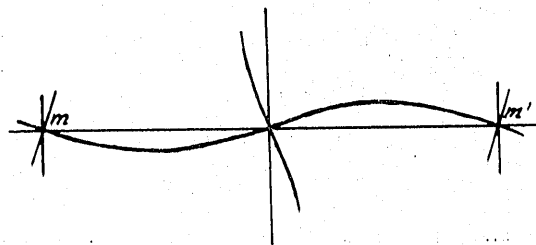


Figura 15.

2.º Carga antimétrica:

a) Sobre el eje de simetría caen nudos (fig. 15).

En tal caso se considerarán los pilares centrales como escindidos por medio, a lo largo del eje de simetría, en dos iguales de rigidez mitad y dividiendo por 2 los momentos de empotramiento de estos pilares. Una vez hecho esto, se calcula la mitad de la estructura, prescindiendo por completo de la otra mitad.

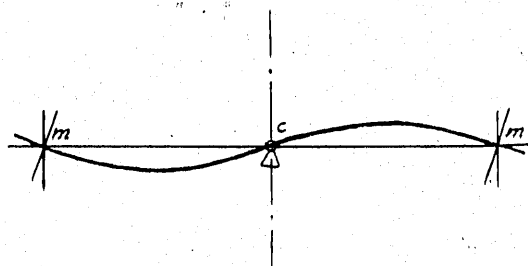


Figura 16.

(Tengamos en cuenta que en general habrá traslaciones horizontales.)

b) Sobre el eje de simetría caen centro de barras (fig. 16).

En tal caso se puede considerar en dichos centros, articulaciones, puesto que los momentos en ellos, son nulos. A la mitad de la barra así resultante, se le asignará, como es lógico, rigidez doble que la de la barra total. Hay que calcular el momento de empotramiento en c para comenzar el proceso iterativo.

También podemos operar merced a $\alpha_m' = \alpha_m$, y nos queda:

$$a_m = \frac{-Q_m}{1 + \tau_{m m'}^*} - \sum_{(m)} \frac{\tau_{m n}^*}{1 + \tau_{m m'}^*} a_n + \frac{\lambda_s^* v_s + \lambda_l^* v_l}{1 + \tau_{m m'}^*}.$$

3.º Una simplificación interesante para ambos tipos de carga en el caso de caer sobre el eje de simetría, centros de barras, es la siguiente:

En las dos expresiones anteriores de 1.º-b y 2.º-b, dividíamos las constantes por $1 + \tau_{m m'}^*$ y por $1 + \tau_{m m'}^*$. Observemos que:

$$\frac{-Q_m}{1 + \tau_{m m'}^*} = \frac{-\bar{M}_m + M - \eta_s - \eta_l}{(1 + \tau_{m m'}^*) \sum_{(m)} k_{m n}} = \frac{-\bar{M}_m + M - \eta_s - \eta_l}{\sum_{(m)} k_{m n} + t_{m' m} k_{m' m}}$$

pero se tiene que:

$$t_{m' m} k_{m' m} = t_{m m'} k_{m m'},$$

luego:

$$\frac{-Q_m}{1 + \tau_{m m'}^*} = \frac{-\bar{M}_m + M - \eta_s - \eta_l}{\sum_{(m)} k_{m n} + k_{m m'} (1 + t_{m m'})},$$

queriendo indicar con Σ' que en ella falta el término $k_{m m'}$.

Por la misma razón:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{m n}^*}{1 + \tau_{m m'}^*} &= \frac{\tau_{m n}}{(1 + \tau_{m m'}^*) \sum_{(m)} k_{m n}} \\ &= \frac{\tau_{m n}}{\sum_{(m)} k_{m n} + k_{m m'} (1 + t_{m m'})}, \end{aligned}$$

y también:

$$\frac{\lambda^*}{(1 + \tau_{m m'}^*)} = \frac{\lambda}{\sum_{(m)} k_{m n} + k_{m m'} (1 + t_{m m'})}.$$

Estas expresiones indican que puede tomarse la mitad de la estructura, considerar empotramientos en (los puntos medios de) las barras centrales y asignarles a éstas (semibarras) rigideces virtuales iguales a las de las barras totales, disminuidas o aumentadas, según sea la carga simétrica o antisimétrica, en un $t_{m m'}$ por uno.

4.º En todo caso, puesto que operamos con giros, lo más sencillo y cómodo es ir asignando a los nudos m' los valores que van saliendo para los m , con el mismo signo o cambiado, según se trate de antisimetría o simetría. Las traslaciones se duplicarán menos las correspondientes a los pilares centrales en el caso de que éstos existan.

X

Simplificación en el caso de barras con una extremidad apoyada.

Sea la parte (intraslacional) de estructura indicada en la figura 17.

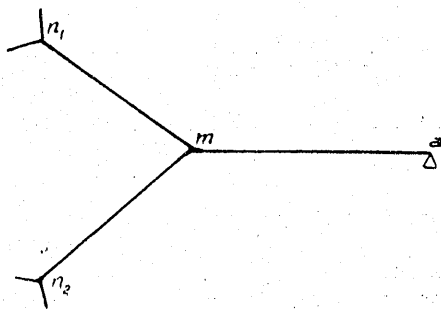


Figura 17.

Se tiene que el ángulo en a vale:

$$\alpha_a = -Q_a - \frac{t_{m a} k_{m a}}{k_{a m}} a_m.$$

Y en el caso de no tener solicitaciones:

$$a_a = - \frac{t_{m a} k_{m a}}{k_{a m}} a_m,$$

que para E e I constantes queda:

$$\alpha_a = - \frac{1}{2} a_m;$$

es decir, que basta ir transmitiendo al nudo a las mitades de los ángulos obtenidos en m cambiados de signo.

Y en el caso general, tenemos que:

$$a_m = -Q_m - \sum_{(m)} \tau_{m n}^* a_n - \tau_{m a}^* a_a,$$

en donde $\sum'$ se ha separado de ella, el término $\tau_{m a}^* a_a$.

Sustituyendo el valor de α_a :

$$\begin{aligned} a_m &= -Q_m - \sum_{(m)} \tau_{m n}^* a_n + \tau_{m a}^* \left(Q_a + \frac{t_{m a} k_{m a}}{k_{a m}} a_m \right) = \\ &= -Q_m + \tau_{m a}^* Q_a - \sum_{(m)} \tau_{m n}^* a_n + \frac{t_{m a} t_{m a} k_{m a}}{\sum_{(m)} k_{m n}} a_m. \end{aligned}$$

De donde:

$$\alpha_m = \frac{-Q_m + \tau_{ma}^* Q_a}{1 - t_{ma} t_{am} \frac{k_{ma}}{\sum_{(m)} k_{mn}}} - \frac{\sum'_{(m)} \tau_{mn} \frac{k_{ma}}{\sum_{(m)} k_{mn}}}{1 - t_{ma} t_{am} \frac{k_{ma}}{\sum_{(m)} k_{mn}}} \alpha_n$$

Y haciendo la misma transformación que en el capítulo anterior, nos queda:

$$\alpha_m = \frac{-\hat{M}_m + M + \tau_{ma} Q_a}{\sum'_{(m)} k_{mn} + k_{ma} (1 - t_{ma} t_{am})} - \frac{\sum'_{(m)} \tau_{mn}}{\sum'_{(m)} k_{mn} + k_{ma} (1 - t_{ma} t_{am})} \alpha_n$$

lo cual quiere decir que podemos prescindir del extremo a , pero no de la barra ma , que multiplicamos su rigidez por $(1 - t_{ma} t_{am})$.

Cuando son varias las barras con extremos articulados, las que parten de m , como indica la figura 18, de análoga manera, tendremos:

$$\alpha_m = \frac{-\hat{M}_m + M + \sum'' \tau_{ma} Q_a}{\sum'_{(m)} k_{mn} + \sum''_{(m)} k_{ma} (1 - t_{ma} t_{am})} - \frac{\sum'_{(m)} \tau_{mn}}{\sum'_{(m)} k_{mn} + \sum''_{(m)} k_{ma} (1 - t_{ma} t_{am})} \alpha_n$$

queriendo indicar con Σ'' que en la suma sólo aparecen los términos correspondientes a $a, b, \dots$ (extremos de las barras articuladas), es decir, los que no figuran en Σ' .

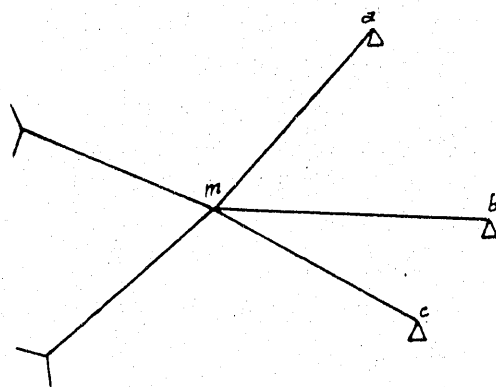


Figura 18.

Así, pues, los extremos $a, b, \dots$ pueden considerarse como empotrados, pero disminuyendo las rigideces de las correspondientes barras en un $t_{ma} t_{am}, t_{mb} t_{bm}, \dots$ por uno.

(Continuará.)