

EL AUTOMOVIL COMO INDICADOR Y COMO IMPULSOR DEL DESARROLLO ECONOMICO

Por EDUARDO MOROS FERRER

Ingeniero de Caminos,

Recopilando una serie de datos estadísticos de diversos países de economía libre, hace el autor un estudio que tiende a demostrar la estrecha relación, en estos países, entre la distribución de la renta y la renta nacional por habitante con el número de automóviles.

I. La renta del automovilista límite.

Si todos los habitantes de un país se ordenaran de forma que sus rentas fueran en descenso y se atribuyera, siguiendo dicho orden, un automóvil de turismo (privado y no industrial) de los que componen el parque del país a cada uno, habría un cierto habitante a quien correspondiera el último automóvil. Daremos a dicho individuo el nombre de automovilista límite y llamaremos a su renta r' la renta del automovilista límite.

Es indudable que existirán en la realidad personas con rentas superiores a r' , que estarán desprovistas de automóvil y, por lo tanto, que habrá otras con renta inferior a r' que lo poseerán; pero los casos de excepción irán disminuyendo a medida que nos separemos de aquella renta del automovilista límite en uno u otro sentido.

Dedicamos una parte del presente trabajo a probar que la renta del automovilista límite es una constante internacional, siempre que se refiera a países de economía libre, en que el mercado de automóviles esté bien abastecido y en que los niveles interiores de precios sean parecidos a los precios internacionales. El resto lo constituyen diversas aplicaciones de esta constante que resulta extraordinariamente útil para relacionar el número de automóviles con la renta nacional por habitante y para estudiar la distribución de rentas en el interior de un país.

* * *

Consideraremos como renta de una persona lo que consume anualmente, si dicho consumo excede de sus ingresos, y en el caso contrario, se considerará como renta sus ingresos, una vez deducidas de los mismos las cantidades que cede a las personas que dependen de él y que carecen de ellos o los tienen inferiores a su consumo anual.

De esta forma no existen ni rentas nulas ni rentas

indefinidamente grandes, puesto que la renta nacional es un límite superior de las rentas individuales.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la función cuyas abscisas sean las rentas individuales x , y cuyas ordenadas el número de personas y que gozan de una renta, x pasará por el origen de coordenadas y cortará, además, el eje de las abscisas en un punto $x < R$, representando por R la renta nacional. Esta última condición puede sustituirse sin error grave por la de tener por asíntota el eje de abscisas sin llegar a cortarlo. En cualquier caso, el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas debe ser igual al número H de habitantes del país, ya que representa el conjunto de personas que gozan de una renta cualquiera, y la suma de las rentas de todos los habitantes será precisamente la renta nacional R .

* * *

Entre las funciones que cumplen las anteriores condiciones, hemos elegido para representar la distribución de la renta, por tener una estructura similar a la llamada campana de Gauss, la que tiene por expresión:

$$y = \frac{K}{\sqrt{\pi}} \frac{H}{r} e^{\frac{1}{2K^2} - K^2} \left[\ln \left(\frac{x}{r} e^{\frac{3}{4K^2}} \right) \right]^2 \quad (1)$$

en la que es:

- x = renta individual en unidades monetarias,
- y = número de personas que gozan de la renta x ,
- H = número de habitantes del país,
- r = renta nacional por habitante,
- e = base de los logaritmos neperianos,
- $\ln$ = símbolo del logaritmo neperiano,
- K = un parámetro que fija el grado de distribución de la renta.

En la figura 1.^a están dibujadas las curvas de distribución de la renta para diversos valores particulares del parámetro K . Dicha distribución aumenta en uniformidad a medida que K crece, y en el caso límite $K = \infty$, todos los habitantes, H , figuran en la abscisa $x = r$, lo que significa que todas las rentas son iguales a la renta nacional por habitante r . Por el contrario, el caso $K = 0$ corresponde a la renta totalmente concentrada.

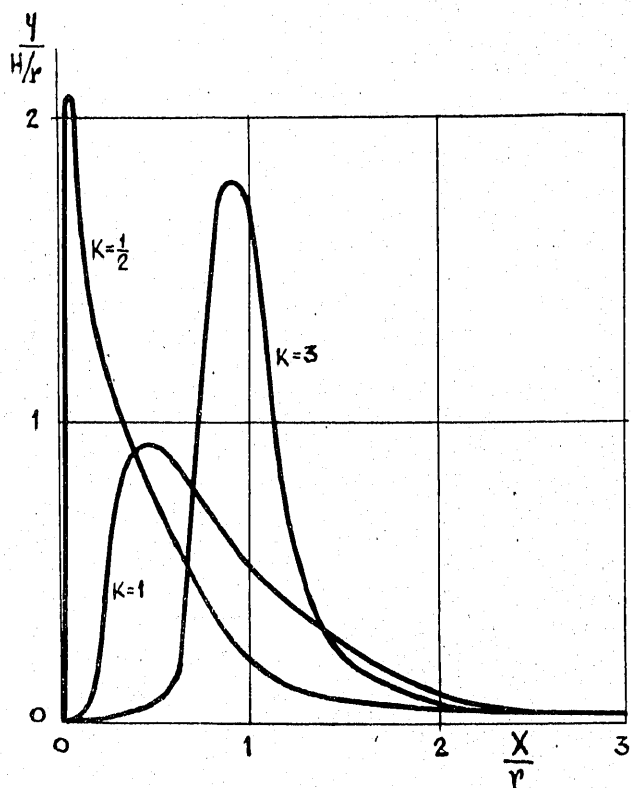


Figura 1.^a

La función [1] de distribución de la renta, aparentemente complicada, tiene una forma mucho más sencilla si se pone:

$$\frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2K^2}} = A;$$

$$e^{\frac{3}{4K^2}} = B,$$

pues entonces se reduce a:

$$\frac{y}{H} = A e^{-K^2 \left[\ln \left(B \frac{x}{r} \right) \right]^2},$$

En particular la función

$$\eta = e^{-(\ln \xi)^2}, \quad [2]$$

tiene las siguientes propiedades:

a)

$$\int_0^\infty \eta d\xi = \sqrt[4]{e} \sqrt{\pi}. \quad [3]$$

En efecto, mediante el cambio de variables $\ln \xi = t + \frac{1}{2}$, resulta:

$$\int_0^\infty e^{-(\ln \xi)^2} d\xi = \sqrt[4]{e} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt,$$

y, como se sabe, es $\sqrt{\pi}$ el valor de la integral euliana del segundo miembro.

b) Si ponemos

$$\zeta(\xi) = \int_0^\xi \eta d\xi, \quad [4]$$

se tiene:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-K^2 [\ln(a\xi)]^2} d\xi = \frac{e^{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{K^2} - 1 \right)}}{aK} \left\{ \zeta \left[\frac{(a\xi_2)^K}{e^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} - 1 \right)}} \right] - \zeta \left[\frac{(a\xi_1)^K}{e^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} - 1 \right)}} \right] \right\} \quad [5]$$

como se demuestra aplicando al primer miembro el cambio de variables

$$\xi = \frac{1}{a} \left[e^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} - 1 \right)} \xi' \right]^{\frac{1}{K}},$$

y teniendo en cuenta [4].

c)

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-K^2 [\ln(a\xi)]^2} \xi d\xi = \frac{e^{\frac{1}{4} \left(\frac{4}{K^2} - 1 \right)}}{a^2 K} \left\{ \zeta \left[\frac{(a\xi_2)^K}{e^{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{K} - 1 \right)}} \right] - \zeta \left[\frac{(a\xi_1)^K}{e^{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{K} - 1 \right)}} \right] \right\}. \quad [6]$$

Esta igualdad se pone de manifiesto aplicando al primer miembro el cambio de variables

$$\xi = \frac{1}{a} \left[e^{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{K} - 1 \right)} \xi' \right]^{\frac{1}{K}},$$

y teniendo en cuenta [4], como en el caso anterior.

Estas tres propiedades permiten comprobar que la función [1] cumple la condición

$$\int_0^{\infty} y dx = H,$$

o sea, que la suma de todas las personas que disfrutan de una renta cualquiera es igual al número H de habitantes del país, y la condición

$$\int_0^{\infty} y x dx = R,$$

que indica que la suma de las rentas de todos los habitantes es igual a la renta nacional.

En el cuadro núm. 1 damos los valores de las funciones η y ξ , estando calculada la primera direc-

tamente, mediante la expresión [2], para valores de ξ entre 0 y 10, de décima en décima, y la segunda, para los valores pares de ξ , mediante la fórmula de Simpson.

* * *

El número de habitantes de un país con renta superior a x está determinado por la expresión

$$z = \int_x^{\infty} y dx, \quad [7]$$

en donde y es la función de distribución de la renta [1]. Designaremos esta nueva función z con el nombre de función de distribución acumulada de la renta.

CUADRO NÚM. 1. — Valores de η y de ξ en función de ξ .

ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ
0	0	0	3,5	0,20666		6,9	0,02397	
0,1	0,00498		3,6	0,19383	1,96905	7,0	0,02267	2,22912
0,2	0,07500	0,00316	3,7	0,18055		7,1	0,02145	
0,3	0,23468		3,8	0,16826	2,00519	7,2	0,02030	2,23341
0,4	0,43188	0,05135	3,9	0,15688		7,3	0,01922	
0,5	0,61850		4,0	0,14634	2,03660	7,4	0,01821	2,23726
0,6	0,77032	0,17389	4,1	0,13657		7,5	0,01725	
0,7	0,88054		4,2	0,12752	2,06393	7,6	0,01635	2,24071
0,8	0,95143	0,34869	4,3	0,11913		7,7	0,01550	
0,9	0,98896		4,4	0,11134	2,08778	7,8	0,01471	2,24382
1,0	1,00000	0,54560	4,5	0,10411		7,9	0,01395	
1,1	0,99096		4,6	0,09741	2,10863	8,0	0,01325	2,24661
1,2	0,96730	0,74330	4,7	0,09118		8,1	0,01258	
1,3	0,93349		4,8	0,08539	2,12687	8,2	0,01195	2,24913
1,4	0,89296	0,92978	4,9	0,08001		8,3	0,01135	
1,5	0,84840		5,0	0,07500	2,14288	8,4	0,01079	2,25140
1,6	0,80179	1,09939	5,1	0,07034		8,5	0,01026	
1,7	0,75460		5,2	0,06600	2,15696	8,6	0,00975	2,25345
1,8	0,70786	1,25032	5,3	0,06196		8,7	0,00938	
1,9	0,66234		5,4	0,05820	2,16936	8,8	0,00883	2,25532
2,0	0,61850	1,38285	5,5	0,05469		8,9	0,00841	
2,1	0,57668		5,6	0,05141	2,18031	9,0	0,00800	2,25700
2,2	0,53705	1,49826	5,7	0,04835		9,1	0,00762	
2,3	0,49970		5,8	0,04550	2,18999	9,2	0,00726	2,25853
2,4	0,46466	1,59827	5,9	0,04283		9,3	0,00692	
2,5	0,43188		6,0	0,04034	2,19856	9,4	0,00660	2,25991
2,6	0,40132	1,68472	6,1	0,03801		9,5	0,00629	
2,7	0,37286		6,2	0,03583	2,20617	9,6	0,00600	2,26117
2,8	0,34641	1,75936	6,3	0,03379		9,7	0,00573	
2,9	0,32187		6,4	0,03188	2,21293	9,8	0,00547	2,26232
3,0	0,29911	1,82380	6,5	0,03011		9,9	0,00522	
3,1	0,27802		6,6	0,02841	2,21895	10,0	0,00498	2,26336
3,2	0,25848	1,87945	6,7	0,02684				
3,3	0,24040		6,8	0,02536	2,22433	∞	0	2,27588
3,4	0,22366	1,92758						

Sustituyendo en [7] y por su expresión [1] y aplicando las propiedades [3] y [5] de la función [2], z puede ponerse en la forma:

$$\frac{z}{H} = 1 - \frac{\zeta \left[e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4K} \left(\frac{x}{r} \right)^K} \right]}{\sqrt[4]{e} \sqrt{\pi}}, \quad (8)$$

en donde ζ es la función [4] tabulada en el cuadro número 1.

CUADRO NÚM. 2.

$\frac{x}{r}$	$\frac{z}{H}$				
	$K=1$	$K=\frac{1}{1,5}$	$K=\frac{1}{2}$	$K=\frac{1}{2,5}$	$K=\frac{1}{3}$
0,5	0,7350	0,5490	0,4160	0,3110	0,2315
1,0	0,3680	0,2975	0,2405	0,1888	—
1,5	0,1656	0,1812	0,1615	0,1331	0,1050
2,0	0,0910	0,1179	0,1161	0,1014	—
2,5	—	0,0816	0,0882	0,0808	—
3,0	0,0282	0,0587	0,0693	0,0662	0,0572
3,5	—	0,0434	0,0560	0,0556	—
4,0	0,0104	—	0,0461	0,0479	0,0434
4,5	—	—	0,0388	—	—
5,0	—	0,0190	0,0328	0,0366	0,0347
6,0	—	—	0,0244	0,0290	0,0286
7,0	—	0,0090	0,0183	0,0237	0,0241
8,0	—	—	0,0149	0,0198	0,0207
8,5	—	0,0055	—	—	—
9,0	—	—	—	0,0166	0,0182
10,0	—	—	—	—	0,0160

En el cuadro número 2 damos valores de $\frac{z}{H}$ para diversas magnitudes del parámetro K del grado de distribución de la renta. Con los datos contenidos en este cuadro han sido dibujadas las curvas de la figura 2.^a.

Hemos reunido en el cuadro número 3 una serie de datos estadísticos sobre rentas nacionales, población, automóviles y además el coeficiente Q de automóviles por habitante. Estos datos corresponden a Estados Unidos y nueve países europeos, en los que se puede considerar que se dan las condiciones antes indicadas de mercado de automóviles bien abastecido y de precios que en general difieren poco de los precios internacionales.

Desgraciadamente no hemos podido reunir datos referentes a un mismo año, y mientras las rentas nacionales por habitante corresponde a 1956, el número de automóviles es de diciembre de 1957. Esto introducirá un cierto error en el cálculo de la renta del automovilista límite, pero siendo éste común a todos los países, no afectará substancialmente a los resultados relativos.

Mayor importancia tiene el hecho de estar englobados en los datos referentes a automóviles los vehículos industriales, aunque no las motocicletas ni triciclos. Esto último es conveniente para nuestros fines, puesto que pretendemos calcular la renta del automovilista límite y no la del motorista límite, pero lo primero nos introducirá un error importante en la determinación del valor de dicha renta. No obstante, como cometeremos el mismo error en todos los países y en ninguno de ellos los vehículos industriales alcanzan el 25 por 100 del parque total, esperamos que no se alteren sensiblemente los resultados relativos.

No hemos podido reunir datos que permitan fijar

CUADRO NÚM. 3.

PAÍSES	Renta por habitante en 1956 en moneda del país (a)	Cambio del dólar en 1956 (b)	Renta por habitante en dólares en 1956 (c)	Habitantes en 1957. En millones (d)	Automóviles en 1957. En millares (e)	Automóviles por habitante en 1959 (f)
Estados Unidos	2 247	—	2 247	171,196	66 671,0	0,3894
Suecia	6.638	5,16	1 286	7,368	973,1	0,1321
Francia	381 003	351,04	1 085	44,071	5 144,0	0,1167
Inglaterra	369	0,3567	1 034	51,455	5 513,4	0,1071
Dinamarca	6 345	6,90	918	4,500	397,8	0,0884
Bélgica	55 636	49,75	1 118	8,989	773,8	0,0861
Alemania occidental	3 444	4,18	824	51,469	3 308,9	0,0643
Holanda	2 633	3,79	695	11,021	538,9	0,0489
Austria	14 693	26,00 (c)	565	6,997	303,0	0,0433
Italia	269 965	624,86	432	48,483	1 650,8	0,0340

(a) Datos del *Anuario Estadístico Italiano*, 1958, pág. 405.

(b) Cambios obtenidos por medio del de la lira, fijado en la página 268 del *Anuario* citado.

(c) Paridad en 17 de septiembre de 1958. Dato de la pág. 399 del *Anuario* citado.

(d) Datos del *Anuario Estadístico de España*, 1959, edición manual, pág. 961.

(e) Datos del *Calendario Atlante*, de Agostini, 1959, edición italiana, pág. 39.

directamente el valor que en cada uno de estos diez países corresponde al parámetro K del grado de distribución de la renta, por lo que procederemos por tanteos probando valores diferentes de este parámetro.

Partiendo de un cierto valor hipotético de K , podemos calcular la renta r' del automovilista límite. Dicho automovilista límite está definido por la relación:

$$z = QH,$$

puesto que QH es el número total de automóviles del país. La renta r' que le corresponde nos la da la curva de la figura 2.^a, correspondiente al valor de K admitido, pues entrando con la ordenada $\frac{z}{H} = Q$, hallamos la abscisa:

$$\frac{x}{r} = \frac{r'}{r}.$$

En el cuadro número 4 hemos reunido los valores de $\frac{r'}{r}$ y de r' , en dólares, determinados para cada uno de los diez países en función de K .

Ningún valor de K da valores de r' suficientemente próximos para definir la renta automovilista límite como constante internacional, pero se observa que al considerar para cada país el valor de r' que corresponde al máximo de la relación $\frac{r'}{r}$ (subrayados en el cuadro núm 4), las rentas del automovilista límite obtenidas se aproximan en gran medida.

Ello nos induce a pensar que en los diez países en cuestión la distribución de la renta no está caracterizada por un solo valor del parámetro K , sino que a cada uno corresponde aquel que hace máxima la relación $\frac{r'}{r}$.

Se puede obtener directamente este máximo si en lugar de entrar con el valor Q sobre una curva de la familia $\frac{z}{H} = f\left(\frac{x}{r} K\right)$ lo hacemos sobre la envolvente de todas ellas, que aparece en la figura 2.^a, dibujada con trazo más grueso. Dicha envolvente es al mismo tiempo lugar geométrico de los máximos de $\frac{x}{r}$ cuando $\frac{z}{H}$ permanece constante y varía K , y de los máximos de $\frac{z}{H}$ cuando variando también K , permanece constante $\frac{x}{r}$.

Esta última propiedad permite calcular fácilmente las ordenadas de dicha curva, pues según [8], los máximos de $\frac{z}{H}$ corresponden a los mínimos de:

$$\zeta \left[e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4K} \left(\frac{x}{r} \right)^K \right],$$

y siendo ζ una función creciente, éstos corresponden a los mínimos de:

$$e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4K} \left(\frac{x}{r} \right)^K.$$

Anulando la derivada de esta expresión, se obtiene la relación:

$$\frac{1}{K} = 2 \sqrt{\ln \frac{x}{r}}, \quad [9]$$

que determina para cada $\frac{x}{r}$ el valor de K , que hace máxima la ordenada $\frac{z}{H}$.

CUADRO NÚM. 4.

PAISES	$K = 1$		$K = \frac{1}{1,5}$		$K = \frac{1}{2}$		$K = \frac{1}{2,5}$		$K = \frac{1}{3}$	
	$\frac{r'}{r}$	r'	$\frac{r'}{r}$	r'	$\frac{r'}{r}$	r'	$\frac{r'}{r}$	r'	$\frac{r'}{r}$	r'
Estados Unidos . .	0,95	2135	0,75	1685	—	—	—	—	—	—
Suecia	1,70	2186	1,94	2498	1,79	2302	1,52	1955	—	—
Francia	1,80	1953	2,00	2170	1,98	2148	1,73	1877	—	—
Inglaterra	1,87	1934	2,12	2192	2,14	2213	1,87	1934	—	—
Dinamarca	2,02	1854	2,39	2194	2,50	2295	2,29	2102	—	—
Bélgica	2,05	2292	2,42	2706	2,56	2862	2,35	2627	—	—
Alemania occidental	—	—	2,87	2365	3,16	2604	3,07	2530	2,55	2101
Holanda	—	—	3,29	2287	3,84	2669	3,91	2717	3,55	2467
Austria	—	—	3,50	1977	4,15	2345	4,35	2458	3,97	2243
Italia	—	—	—	—	4,85	2095	5,28	2281	5,07	2190

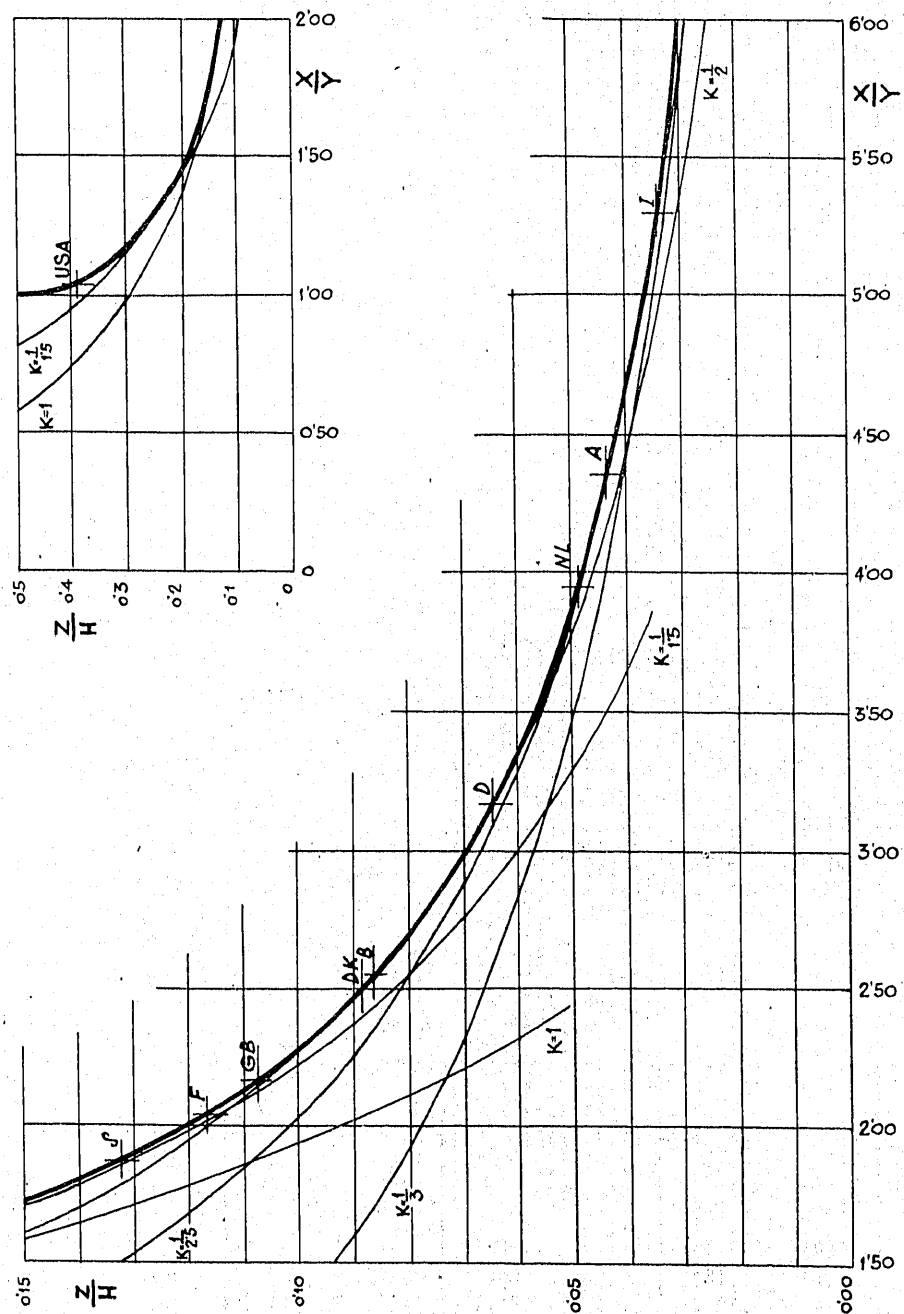


Figura 2."

En el cuadro número 5 damos las abscisas y ordenadas de dicha envolvente así calculadas y el valor del coeficiente K de la curva tangente en cada punto.

CUADRO NÚM. 5.

$\frac{x}{r}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{z}{H}$	$\frac{x}{r}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{z}{H}$
1,0	0	0,5000	4,5	2,452	0,0418
1,1	0,618	0,3320	5,0	2,540	0,0365
1,5	1,272	0,1837	6,0	2,680	0,0293
2,0	1,665	0,1198	7,0	2,790	0,0244
2,5	1,914	0,0883	8,0	2,885	0,0210
3,0	2,095	0,0694	9,0	2,970	0,0183
3,5	2,240	0,0569	10,0	3,035	0,0161
4,0	2,355	0,0481			

Por fin, en el cuadro número 6 damos los valores que se obtienen para la renta del automovilista límite admitiendo que el parámetro K que caracteriza la distribución de la renta en cada país, es precisamente aquel que hace máximo el valor $\frac{r'}{r}$. Hemos utilizado para ello la curva de trazo grueso de la figura 2.^a, cuyas abscisas y ordenadas están dadas en el cuadro número 5.

Como se ve, resulta para la renta del automovilista límite un valor medio $r'_m = 2\,443,4$ dólares, que no difiere mucho de cada uno de los valores particulares de r' .

Admitiendo esta media r'_m como constante económica de aplicación internacional, hemos calculado los valores de $\frac{r'_m}{r}$, que corresponden a cada país. Entrando con ellos por las abscisas de la curva de

trazo grueso de la figura 2.^a, encontramos una serie de valores teóricos Q' de los automóviles por habitante que corresponden en esta hipótesis.

Los resultados obtenidos son una excelente aproximación de la realidad, y para mejor ponerlo de manifiesto hemos calculado la siguiente ley empírica:

$$Q'' = \frac{r^{1,484}}{293\,700} \quad [10]$$

ajustada por el método de los mínimos cuadrados a los datos de los diez países del cuadro número 3, tal como se hizo para fijar la relación existente entre el número de vehículos y la renta nacional por habitante en el estudio realizado por el Instituto de Cultura Hispánica en su fascículo IV-B, *Los transportes y las comunicaciones y el crecimiento económico. Carreteras*. Los resultados obtenidos con esta fórmula figuran también en el cuadro número 6, en donde se incluye, además, los valores reales Q y los errores relativos cuadráticos cometidos mediante el método de la renta del automovilista límite y de la forma empírica [10]. La suma de estos errores demuestra claramente que tiene mayor dispersión la fórmula [10] que el referido método de la renta del automovilista límite.

Queda con esto claramente probada la existencia de la renta del automovilista límite como constante económica y su utilidad como instrumento de análisis económico para relacionar la distribución de la renta y la renta nacional por habitante con el número de automóviles de un país.

Naturalmente, el valor calculado $r'_m = 2\,443,4$ dólares no es más que una grosera aproximación, por haber partido de unos datos que incluían los vehículos industriales. Seguramente, su valor real se aproximará a los 2700 dólares.

CUADRO NÚM. 6.

PAISES	r'	$\frac{r'_m}{r}$	Automóviles por habitante según r'_m Q	Automóviles por habitante según (10) Q''	Automóviles por habitante reales Q	Error relativo cuadrático $\left(\frac{Q' - Q}{Q}\right)^2$	Error relativo cuadrático $\left(\frac{Q'' - Q}{Q}\right)^2$
Estados Unidos	2337	1,09	0,3400	0,3205	0,3894	0,016	0,031
Suecia	2405	1,90	0,1290	0,1363	0,1321	0,001	0,001
Francia	2213	2,25	0,1014	0,1090	0,1167	0,017	0,004
Inglaterra	2234	2,36	0,0950	0,1010	0,1071	0,013	0,003
Dinamarca	2295	2,66	0,0810	0,0845	0,0884	0,007	0,003
Bélgica	2840	2,19	0,1060	0,1142	0,0861	0,053	0,106
Alemania occidental	2612	2,97	0,0700	0,0727	0,0643	0,008	0,017
Holanda	2745	3,52	0,0565	0,0562	0,0489	0,024	0,022
Austria	2463	4,33	0,0436	0,0420	0,0433	0,000	0,001
Italia	2290	5,65	0,0314	0,0279	0,0340	0,006	0,032
TOTAL	24434		ERRORES TOTALES			0,145	0,219

(Continuará.)