

COMENTARIOS SOBRE LA PLASTICIDAD EN EL CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por LUIS ANGULO Y PROTA
Ingeniero de Caminos.

Se exponen en este artículo los fundamentos del cálculo plástico de vigas y estructuras, así como la economía que puede obtenerse con la aplicación, cada día más extendida, de estos métodos.

Las divergencias que se observan entre el comportamiento real de trabajo de los elementos resistentes de las estructuras y el supuesto según las teorías clásicas de la mecánica elástica, así como el fallo de estas últimas en la explicación de gran número de fenómenos que se presentan frecuentemente en la construcción, ha sido la causa de los numerosos trabajos y estudios llevados a cabo por los investigadores en los últimos cuarenta años y de los que dispersos en monografías y revistas técnicas ha sido difícil hasta el presente encontrar una recopilación sistemática.

Por otra parte, conocemos el avance actual en la técnica constructiva, la adopción de nuevas formas estructurales y la búsqueda del empleo más adecuado de los materiales y de una mayor precisión en su dimensionamiento, que permita a los proyectistas conseguir elementos sólidos y económicos. Así vemos la extensión cada día mayor de la técnica del hormigón pretensado y su adopción a problemas constructivos de la índole más diversa y en el campo de las estructuras metálicas, el impulso dado a los métodos de cálculo basados en la plasticidad como una de sus principales armas en la competencia con el hormigón armado (1).

Todo ello exige a los ingenieros proyectistas y constructores sacar el máximo partido a los materiales normalmente utilizados para conseguir las formas resistentes de la construcción moderna, agotando sus posibilidades hasta el límite admisible y fijando, por tanto, las cargas máximas que deben soportarse en la vida de la construcción.

La fijación de estas cargas de trabajo o cargas toleradas, viene obligada por la necesidad de tener una

garantía suficiente ante la posibilidad de destrucción de la obra, y según la mecánica tradicional ha sido norma el adoptar para sus valores aquellos que eran una fracción definida por el coeficiente de seguridad, de los que producían en las secciones tensiones correspondientes al límite elástico o de fluencia del material.

La teoría de la elasticidad establece como postulados básicos la invariabilidad de dimensiones de las estructuras durante la aplicación de las cargas y la existencia de una función lineal y homogénea entre tensiones y deformaciones (Ley de Hooke), deduciéndose de esta última la ley de independencia de acción de las fuerzas, según la cual el estado de deformación producido por varias cargas es igual a la suma de los efectos producidos por cada una de ellas independientemente.

Ahora bien: en los estados que preceden a la ruina de la construcción la mayoría de los materiales empleados actualmente han alcanzado en las fibras de las secciones más cargadas, tensiones que no siguen el segundo de los postulados citados. En efecto; según ponen de manifiesto los diagramas tensión-deformación de dichos materiales como el hormigón y acero, sobradamente conocidos, a partir de un cierto punto que llamamos límite elástico del material más o menos definido para cada uno de ellos, deja de existir la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, es decir, la Ley de Hooke, para sin aumentos sensibles de carga, admitir antes de la rotura del material deformaciones muy superiores a la correspondiente al límite elástico. (Como ejemplo de la magnitud de estas deformaciones se tiene, para el acero de construcción St. 3", valores de deformación doscientas veces el correspondiente al límite elástico.)

Trae esto consigo la imposibilidad de aplicación del principio de independencia de acción de las fuerzas y, por tanto, el método de cálculo de las tensiones admisibles, no pudiendo adoptarse como tensión de trabajo o tensión tolerable la que resulta de dividir la tensión límite o de fluencia por el coeficiente de seguridad y siendo necesario obtener la carga tolerable de la estructura por el cociente de la carga de rotura o car-

(1) "Los códigos de edificación de varios Estados en U.S.A. adoptarán las recomendaciones del A.I.S.C. (American Institute of Steel Construction) para el proyecto en la fase plástica, antes de fines del presente año, al haber sido incorporadas dichas recomendaciones en las Normas del A.I.S.C. para el proyecto de estructuras de acero en edificios. Como consecuencia de ello se espera un rápido incremento en la adopción de bases plásticas para el proyecto de estructuras continuas en edificios de una planta." (*Engineering News Record*.)

ga máxima que puede soportarse sin destrucción de la estructura por el coeficiente de seguridad.

El estado de trabajo de la construcción, llamando así al estado tensional definido por la carga tolerable o carga de trabajo, será una fracción del estado límite o de agotamiento definido por la carga límite o de rotura capaz de agotar la capacidad resistente de la construcción. Normalmente, en estos estados de trabajo el material se encuentra en la primera fase o fase elástica de su diagrama tensión-deformación, conservándose, por tanto, la proporcionalidad lineal y homogénea entre esfuerzos y deformaciones. Por el

El concepto de "articulación plástica".

Analicemos el proceso de deformación por flexión simple de una pieza de un material elastoplástico, como por ejemplo el acero de construcción, y para mayor facilidad de la exposición, de sección rectangular.

Aceptada la hipótesis de las secciones planas, comprobada experimentalmente y que puede considerarse válida para piezas cuya relación de longitud al canto sea del orden de cuatro o cinco veces, y que suponemos es nuestro caso, podemos representar, como se hace en la figura 1.^a, el diagrama a) de defor-

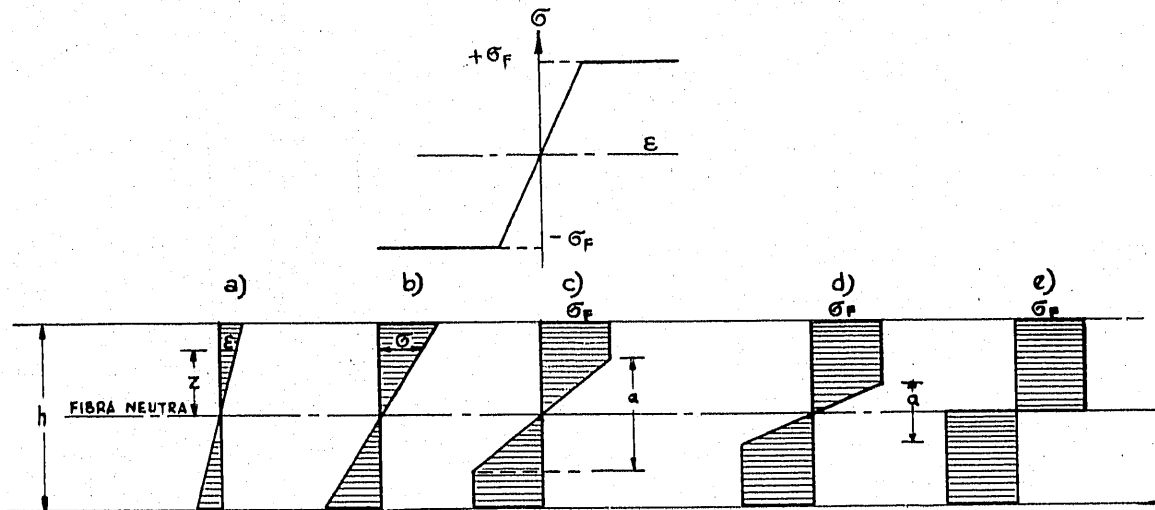


Figura 1.^a

contrario, debido a las características elastoplásticas más o menos definidas de los materiales de construcción antes citados, los estados límites o de rotura se diferencian esencialmente de los de trabajo, ya que el agotamiento de la capacidad resistente de un elemento, debido a las grandes deformaciones producidas, puede no coincidir con la destrucción de dicho elemento.

Mientras que si la estructura o construcción es isostática, el estado de rotura sólo se diferencia del de trabajo por la mayor magnitud de las deformaciones experimentadas, existiendo una uniformidad en la distribución de tensiones, si es hiperestática, la deformación sufrida por el elemento que ha agotado su capacidad resistente permite que tenga lugar una redistribución de tensiones en los demás elementos, que pueden, por tanto, recibir una carga suplementaria. El estado límite de la estructura sólo se alcanzará cuando se haya agotado la capacidad resistente del número de elementos suficiente para convertirla en un mecanismo móvil.

maciones ϵ a lo largo de las alturas z de la pieza sobre su fibra neutra y por un cambio de variable lineal representar, como es usual en el diagrama b), las tensiones en las diversas fibras.

Sabemos también por la resistencia de materiales, que se cumple la relación $\epsilon = \frac{1}{\rho} z$, siendo $1/\rho$ la curvatura del eje de la pieza de valor:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

y que por el pequeño valor de y' puede considerarse como $1/\rho = y''$.

Para el acero de construcción es usual suponer un diagrama convencional tensión-deformación como el que se indica en la misma figura 1.^a, es decir, compuesto por una recta que corresponde al módulo de elasticidad hasta alcanzar la fluencia, y a partir de este punto con valor constante.

Al ir aumentando las cargas que solicitan la pieza, aumentarán las tensiones en sus fibras hasta que se alcance en las más tensionadas la correspondiente al límite de fluencia del material σ_F , (diagrama c). En esta fase tenemos una zona o núcleo de la pieza de altura a , cuyas fibras se encuentran en la fase elástica de su diagrama de trabajo, mientras que las restantes, alcanzado el límite de fluencia, conservan este valor constante.

Al seguir el aumento de cargas, la zona o núcleo elástico se irá reduciendo (diagrama d), hasta llegar a un valor tan pequeño que, sin error apreciable, puede considerarse que el estado tensional es el del diagrama e) correspondiente al que hemos llamado límite o de rotura, formado por dos rectángulos y convirtiéndose la sección de la pieza en una "articulación o rótula plástica".

En efecto, en la fase anterior al límite (diagrama c) se tendrá:

$$1/\rho = 2 \cdot \epsilon/a = 2 \sigma_F/E \cdot a = y'',$$

y del equilibrio de la sección, sometida al momento exterior M :

$$M = \frac{b \cdot \sigma_F \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{2} - \frac{b \cdot \sigma_F \cdot a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} = \\ = b \cdot \sigma_F \left(\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{12} \right),$$

en la que sustituyendo $a = 2 \sigma_F/E \cdot y''$, se obtiene el valor del momento plástico:

$$M_p = M_e \left[\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot \sigma_F^2}{h^2 E^2 (y'')^2} \right],$$

en la que M_e es el momento que llamamos elástico y W_e el módulo resistente elástico de la sección, verificándose la conocida fórmula de equilibrio:

$$M_e = \frac{b \cdot h^3}{6} \cdot \sigma_F = W_e \cdot \sigma_F.$$

En el estado límite $y'' = \infty$, o sea que el radio de curvatura de la viga es infinitamente pequeño, $a = 0$, y por tanto:

$$M_p = \frac{3}{2} \cdot M_e = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_F = W_p \cdot \sigma_F,$$

produciéndose la "articulación plástica" en la sección considerada.

Nos hemos referido hasta ahora a la sección rectangular de cuerpos elastoplásticos. Si la sección de la pieza es diferente, se modificará la relación existente entre los valores de los módulos resistentes

plástico y elástico. Para otros tipos de sección pueden utilizarse los valores de la figura 2.^a (1).

Debe tenerse en cuenta que el concepto establecido de "articulación" o "rótula plástica" es puramente convencional y su diferencia esencial con el de articulación, usual en la resistencia de materiales, reside en que si bien el comportamiento de la primera en cuanto a las deformaciones angulares por flexión de la pieza es análogo al de la segunda, no lo es en cuanto a la capacidad de resistir momentos, ya







FORMA DE LA SECCIÓN	$\frac{W_p}{W_e}$
	1,00
	1,15 a 1,17
	1,27
	1,50
	1,70
	2,00

Figura 2.^a

que una vez que se ha producido la "articulación plástica" en una sección de la pieza, se ha alcanzado en ella el momento límite que hemos designado con M_p , y se mantiene constante hasta la destrucción de la estructura. (En realidad no es exactamente constante, pero puede considerarse así de acuerdo con el diagrama convencional.)

Cálculo plástico de vigas.

Aclarado el concepto anterior, consideremos ahora dos vigas de características análogas de luz y sección, ambas del mismo material elastoplástico y cuya única diferencia sea la de estar, respectivamente, apoyada y empotrada en sus extremos, como se indica en la figura 3.^a.

Solicitemos ambas vigas por una carga creciente y analicemos su comportamiento según se indica en los dos esquemas de la figura, dibujando en un diagrama los valores de las deformaciones en el centro de la luz para los diversos valores de p , designando con un subíndice 1 los de la viga isostática y con un 2 los de la viga hiperestática.

(1) Rjanytsin: *Cálculo a la rotura y plasticidad de las construcciones.*

Al aumentar p , llegaremos a unos valores p'_1 y p''_2 , en que las secciones más cargadas de cada una de las vigas (centro para la viga apoyada y extremos para la empotrada) habrán alcanzado una deformación angular tal, que el momento resistido por estas secciones es el que hemos llamado M_e o momento elástico, y tal que $M_e = W_e \cdot \sigma_{fp}$. Hemos llegado, siempre dentro del diagrama b) de la figura 1.^a, a

tánea dos articulaciones en sus extremos, es capaz de seguir deformándose ante nuevos aumentos de carga p . Las secciones extremas seguirán deformándose sin aumento de momento, manteniéndose constante en ellas el valor M_p límite; pero las restantes secciones siguen aceptando nuevos aumentos de M hasta que en la más cargada de ellas, es decir, en la central, se alcance el estado límite, el momento M_p y se

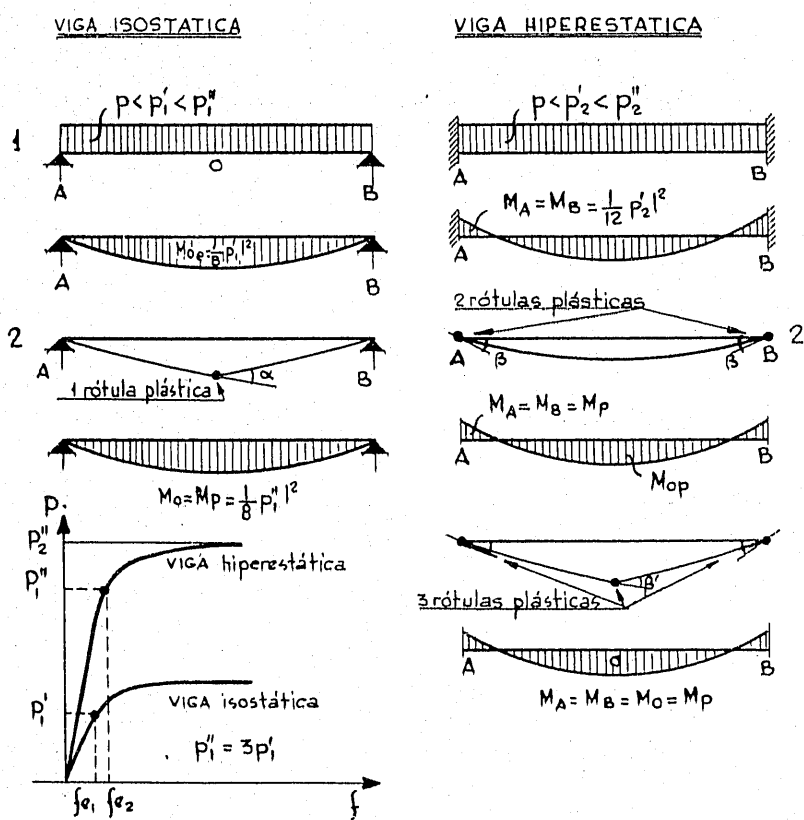


Figura 3.^a

alcanzar en las fibras más cargadas de las secciones respectivas la tensión de fluencia σ_{fp} .

A partir de este momento y al seguir aumentando la carga, las citadas secciones pasan rápidamente por los estados correspondientes a los diagramas c) y d) de la misma figura 1.^a, para alcanzar para unos valores p''_1 y p''_2 respectivos, el diagrama a) y producirse en las secciones las que hemos llamado "articulaciones plásticas" (estado 2 de la figura 3.^a).

Alcanzado este punto, la viga apoyada por haberse producido una articulación en su centro se convertirá en un mecanismo móvil, incapaz de soportar más carga. Se ha llegado al estado límite o de rotura de la viga.

Sin embargo, la viga empotrada (esquema de la derecha de la misma fig. 3.^a), en la que por simetría se habrán producido en forma prácticamente simul-

produzca una nueva "articulación plástica" que convierta la viga en un mecanismo móvil, produciéndose la destrucción de la estructura.

El proceso seguido hasta la destrucción de ambas vigas isostáticas y hiperestáticas nos aclara cuanto habíamos expuesto anteriormente:

El estado límite de la viga isostática se alcanza al llegarse al límite de una de las secciones. Por el contrario, en la viga hiperestática, al agotarse la capacidad resistente de una sección (en nuestro caso de las secciones de apoyo), se produce una redistribución de tensiones capaz de permitir nuevas deformaciones de la estructura, hasta agotar la capacidad resistente de un número de secciones o elementos capaces de convertirla en un mecanismo móvil.

Es evidente la economía que puede obtenerse por la aplicación en aquellos casos en que sea adecuado

del cálculo plástico de vigas basado en la redistribución de tensiones.

Consideremos, por ejemplo, una viga metálica de sección doble T de dos tramos solicitada por una carga uniformemente repartida de valor p .

La ley de momentos obtenida por el método clásico es la indicada en la figura 4.^a:

$$M_x = -\frac{p}{2}x^2 + \frac{0,75 p \cdot l}{2}x,$$

$$M_x = -\frac{\Delta p'}{2}x^2 + \frac{\Delta p' l}{2}x,$$

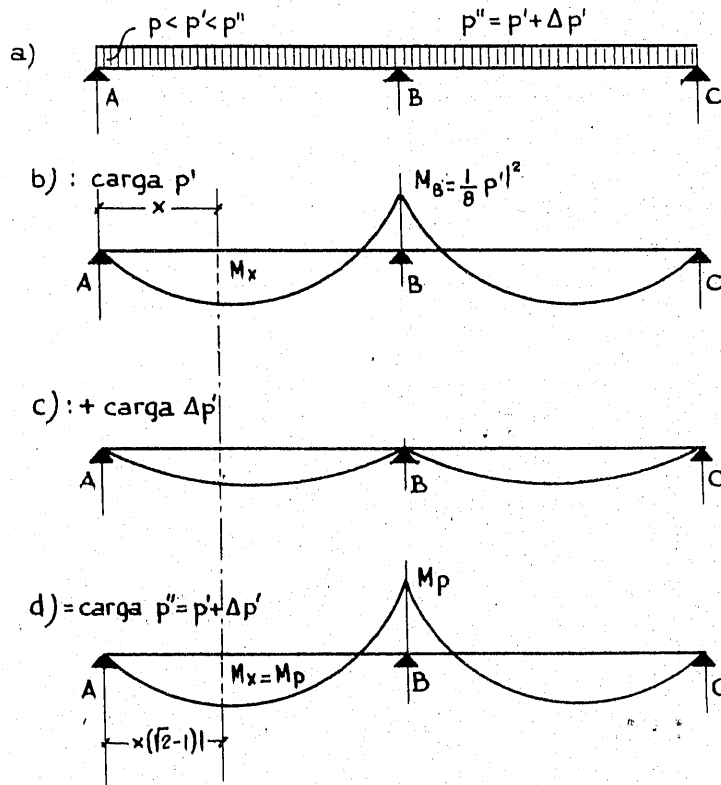


Figura 4.^a

que para el apoyo A , da un valor:

$$M_A = 1/8 p \cdot l^2.$$

La carga capaz de agotar la capacidad resistente de la viga será, según la teoría clásica de la resistencia de materiales, aquella que produce la fluencia de la sección, o sea:

$$p' = \frac{8 M}{l^2} = \frac{8 W_e \sigma_F}{l^2}.$$

Al deformarse la viga por aumento de p por encima de p' , la sección de apoyo A es incapaz de admitir nuevos aumentos de momento M , ya que al ha-

berse alcanzado la fluencia funcionará como una "articulación plástica" en el sentido que anteriormente hemos dado a esta denominación.

Para un aumento de p de valor Δp , las leyes adicionales de momentos serán como las dibujadas en la figura 4.^a, c), con valores para los puntos de abscisa x :

que sumados a los anteriores nos dan el valor total del momento:

$$M = M_x + \Delta M_x = -\frac{(p' + \Delta p')}{2}x^2 + \frac{(0,75 p' + \Delta p') l}{2}x.$$

Evidentemente, el estado límite del tramo se alcanzará cuando por formarse una nueva "articulación plástica" en la sección más solicitada, se convierta la estructura en un mecanismo móvil.

El valor de x para que esto suceda será el que corresponda a un máximo de M y, por tanto, de:

$$\frac{dM}{dx} = -(p' + \Delta p')x + \frac{(0,75 p' + \Delta p') l}{2} = 0,$$

se obtiene:

$$x_0 = \frac{(0,75 p' + \Delta p') l}{2 (p' + \Delta p')}$$

y el valor de:

$$M_0 = \frac{(0,75 p' + \Delta p')^2 \cdot l^2}{8 (p' + \Delta p')}$$

Al agotarse la capacidad resistente de la sección, será $M_0 = M_p$ y, por tanto, teniendo en cuenta que $p'' = p' + \Delta p'$ puede deducirse fácilmente que este valor de p'' se produce en la sección de abscisa:

$$x = (\sqrt{2} - 1) \cdot l;$$

y que

$$p'' = M_p \frac{(6 + 4\sqrt{2})}{l^2} = 11,659 \frac{M_p}{l^2}$$

Comparando este valor con el obtenido por el método clásico, resulta una relación entre ellos:

$$\frac{p''}{p'} = \frac{11,659}{8} \cdot \frac{M_p}{M_e} = 1,46 \frac{W_p}{W_e}$$

y teniendo en cuenta que para el tipo de sección elegido, aproximadamente, $W_p/W_e = 1,15$ (fig. 2.^a), resulta definitivamente $p''/p' = 1,67$; es decir, que existe una economía al dimensionar la viga por este método del 67 por 100.

Las cargas alternadas y el asiento de apoyos.

Al llevar a cabo el estudio de vigas por el método plástico, merece especial comentario la consideración de los casos de carga y descarga repetida y del asiento de apoyos.

La formación de ciclos de histéresis en el diagrama tensión-deformación al efectuarse la descarga, da lugar a la aparición de tensiones residuales cuando se ha alcanzado previamente el estado de fluencia.

Estas tensiones deben equilibrarse al desaparecer la carga, dando lugar, por tanto, a un estado de autotensión de la estructura o viga.

Al buscar la carga límite en estos casos de cargas móviles o alternadas debe tenerse en cuenta que el estado límite puede alcanzarse no sólo porque la combinación más desfavorable de cargas convierta la estructura en un mecanismo móvil, caso análogo a los comentados anteriormente para cargas fijas, sino porque al variar las cargas pueda producirse una acumulación de deformaciones residuales plásticas de igual sentido, que lleguen a valores tales de deformación que causen la destrucción de la estructura, o

bien porque dichas deformaciones residuales plásticas sean de sentidos opuestos y como se ha comprobado experimentalmente puedan, incluso por un pequeño número de inversiones, alcanzar el estado límite.

Los procedimientos para la búsqueda de la carga límite en estos casos se basan especialmente en los estudios de Bleich [2], quien demostró su teorema de que "si es posible encontrar un sistema de tensiones residuales, tales que en su acción conjunta con cada uno de los estados de carga posibles den unas tensiones totales que no sobrepasen los límites de fluencia en ambos sentidos, las deformaciones de la estructura estarán limitadas para cualquier puesta en carga posterior, la cual podrá repetirse un número cualquiera de veces sin aumento de la deformación alcanzada anteriormente".

Es decir, deberá verificarse en cualquier punto i de la estructura (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i \text{ máx.} + \sum \sigma_j X_j \leq \sigma_F (+); \\ \sigma_i \text{ mín.} + \sum \sigma_j X_j \leq \sigma_F (-); \\ \sigma_i \text{ máx.} - \sigma_i \text{ mín.} \leq \sigma_F (+) - \sigma_F (-), \end{array} \right.$$

o lo que es igual, traducido a momentos:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_i \text{ máx.} + M_r \leq M_p (+); \\ M_i \text{ mín.} + M_r \leq M_p (-); \\ M_i \text{ máx.} - M_i \text{ mín.} \leq \Delta M_e. \end{array} \right.$$

En definitiva, como ahora veremos, la aplicación del teorema de Bleich para las vigas continuas se reduce a buscar un desplazamiento adecuado del diagrama envolvente de los máximos momentos flectores.

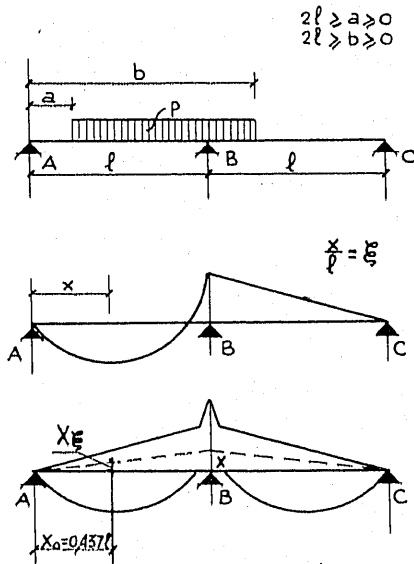
Volvamos a considerar la viga de dos tramos de la figura 4.^a y supongamos dos tipos de carga diferentes. El primero (parte izquierda de la fig. 5.^a) corresponde a una carga uniformemente repartida de valor p , que puede alternarse en cada tramo, y el segundo (parte derecha de la misma fig. 5.^a) a una carga aislada móvil de valor P .

Debajo de los diagramas envolventes de máximos momentos flectores obtenidos para ambos casos, de acuerdo con la teoría clásica, se han establecido las inequaciones de Bleich antes citadas, expresadas en momentos y con un estado de autotensión incógnito que da lugar a un momento X . Por la igualdad de los momentos límites en los puntos en que han de formarse las "rótulas plásticas" al llegar la viga al estado de rotura, se resuelven en ambos casos de carga las inequaciones y se obtienen los valores de X y, por tanto, los de las cargas límites que se indican en la figura, llegando a unos valores superiores en

(1) σ_j = tensión producida en i por $X_j = 1$; X_j = valor residual de X_j .

un 19,40 y un 23 por 100 a los valores límites respectivos, calculados según la teoría clásica de la elasticidad, valores que deberán afectarse, además del correspondiente a la relación modular según la sección de viga adoptada.

CARGA UNIFORME



$$\begin{cases} M_o \text{ máx} + X\xi \leq M_{lim}^+ \\ M_B \text{ min} + X \geq M_{lim}^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{49}{512} p l^2 + 0,437 X \leq M_{lim}^+ \\ \frac{p l^2}{8} - X \geq M_{lim}^- \end{cases}$$

$$M_{lim}^+ = M_{lim}^-$$

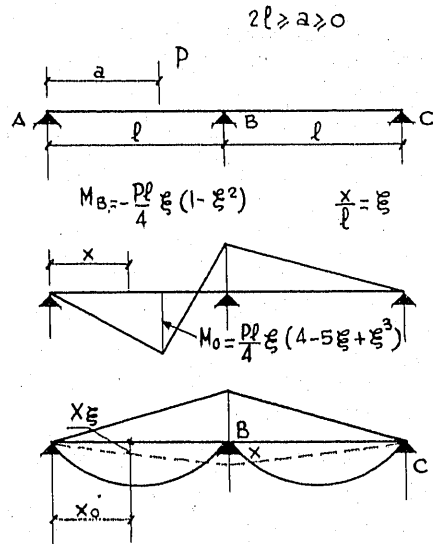
$$X = 0,0204 p l^2$$

$$M_{lim} = -0,01046 p l^2$$

$$p_{lim} p = \frac{M_{lim} p}{0,01046 l^2} = 9,56 \frac{M_{lim} p}{l^2}$$

$$\frac{p_{lim} p}{p_{lime}} = \frac{9,56}{8} \frac{W_p}{W_e} = 1,194 \frac{W_p}{W_e}$$

CARGA AISLADA



$$M_B = -\frac{P l}{4} \xi (1 - \xi^2) \quad \frac{X}{P} = \xi$$

$$M_o = \frac{P l}{4} \xi (4 - 5\xi + \xi^3)$$

$$\begin{cases} M_o \text{ máx} + X\xi \leq M_{lim}^+ \\ M_B \text{ min} + X \geq M_{lim}^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P l}{4} \xi (4 - 5\xi + \xi^3) + X\xi \leq M_{lim}^+ \\ \frac{P l}{4} \xi (1 - \xi^2) + X \geq M_{lim}^- \end{cases}$$

eliminando x entre:

$$\begin{cases} M_{lim}^+ = M_{lim}^- & \xi = 0,418 \\ \frac{dM_o}{dx} = 0 & X = 0,541 \frac{P l}{4} \end{cases}$$

$$M_{lim} = 0,686 \frac{P l}{4}$$

$$P_{lim} = 5,83 \frac{M_{lim}}{l}$$

$$\frac{P_{lim} p}{P_{lime}} = \frac{5,83}{4,72} \frac{W_p}{W_e} = 1,23 \frac{W_p}{W_e}$$

Figura 5.ª

En nuestro caso, de viga metálica de sección doble T (relación modular, 1,15), llegamos a valores superiores a los elásticos en un 22,3 y 26,45 por 100, respectivamente.

cargas móviles o alternadas se complica sensiblemente respecto al de cargas fijas (fluencia estructural), por lo que en ciertos casos, y cuando está justificado por la importancia de las cargas permanentes frente a

las móviles y alternadas, se ha propuesto sustituir el estudio por uno aproximado de determinación de la carga límite que produzca la fluencia estructural, caso éste, en general, sencillo y desde luego más simple que llevado a cabo por el método elástico.

Por lo que se refiere al asiento de apoyos en las vigas continuas, el cálculo elástico tradicional lleva a la consideración de tensiones suplementarias importantes. En el cálculo plástico, según el estado límite, por el contrario, el asiento de apoyos no puede tener influencia alguna debido a que, como hemos visto anteriormente, la aparición de las "rótulas plásticas" habrá convertido la estructura al llegar a la rotura en isostática.

La comprobación experimental se ha llevado a cabo por diversos investigadores, siendo conocidas, entre otras, las experiencias de Meyer-Leibnitz (1928-1929) y V. S. Tourkine (1935). En las primeras, con vigas metálicas, se puso de manifiesto la igualdad de las cargas límites o de rotura obtenidas para vigas de dos tramos cargadas simétricamente y sometidas a asientos del apoyo central, de valores 0, 0,46 y -1,42 cm.

El cálculo plástico de estructuras hiperestáticas.

En los sencillos ejemplos de vigas que hemos expuesto anteriormente, hemos seguido un método que da una idea completa del comportamiento de la estructura al ponerse en carga, pero que, en algunos casos, puede resultar excesivamente complicado.

Los diversos sistemas de resolver el problema de buscar las cargas límites de las estructuras se basan en que puede demostrarse que la carga límite es el mayor valor con que pueden satisfacerse las condiciones de equilibrio y las de plasticidad. Este teorema, llamado "principio estático", se complementa con el "principio cinemático", en el que se establece que, buscando todas las maneras posibles de destrucción de la estructura al convertirse ésta en un mecanismo móvil por la formación de un número suficiente de "rótulas plásticas", la carga límite es el menor valor capaz de equilibrar a dicho mecanismo [9] y [11].

Por lo que se refiere a las condiciones de plasticificación, es normal la establecida por Huber, Hencky y von Mises:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_F^2 [1],$$

en la que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, son las tensiones principales en un punto, y σ_F , la tensión normal de plasticificación.

En general, los diversos métodos de cálculo plástico de estructuras que se han puesto en boga en estos últimos años, tanto para las estructuras metálicas como para las de hormigón armado y pretensado, se basan en la capacidad anteriormente expuesta que tienen las estructuras, para poder, mediante una redistribución de tensiones en las secciones que han

alcanzado el estado límite o de rotura, aumentar su capacidad de sustentación.

Entre las diversas teorías que se han venido estableciendo para la explicación de este fenómeno y que han formado los métodos plásticos para el cálculo de estructuras, son muy interesantes los trabajos de Freudenthal (Praga, 1934) y Jensen [3], [4] y [12], para estructuras de hormigón armado.

Otros métodos, basados en los principios "estático" y "cinemático" antes citados, son los de Colonnetti y Gartner [16], y basados especialmente en el principio "cinemático", son los métodos de Neal y Symonds [10], [11] y [14], no insistiendo aquí más extensamente sobre la exposición de estos métodos, que por otra parte pueden consultarse en las obras citadas en la bibliografía, por salirse de los reducidos límites de estos comentarios.

Aunque, en general, en los diversos ejemplos comentados más arriba nos hemos referido a vigas de material metálico por la facilidad de exposición que supone la mayor afinidad de este material con un cuerpo elastoplástico ideal, el método plástico para la obtención de las cargas límites de vigas y estructuras tiene la misma validez para el hormigón armado y pretensado.

Los ensayos con vigas de hormigón armado realizados por Bach y Graf (1920), y posteriormente los efectuados con vigas continuas y pórticos de este mismo material por Glanville y Thomas (1939), han mostrado la gran coincidencia de las teorías plásticas con la experiencia y abogan por la aplicación de estas nuevas teorías en el cálculo de vigas, pórticos e incluso de sistemas reticulares, pero siempre debiendo tener en cuenta las condiciones básicas que deben cumplirse, y no olvidando que con la no validez del principio de superposición de efectos debe obtenerse detalladamente el orden y forma de actuación de las cargas cuando existan diversas hipótesis o estemos en casos de cargas accidentales o alternadas.

Finalmente, y en lo que se refiere al hormigón pretensado, son muy interesantes las conclusiones que de las comunicaciones presentadas al II Congreso de la F.I.P. (Fédération International de la Précontrainte), comenta Y. Guyón en su informe general, y en el cual se ponen de manifiesto las discordancias entre los resultados experimentales de los diversos investigadores [18].

Mientras que los trabajos británicos de Morice y Lewis confirman la validez de los cálculos en rotura y la existencia de una redistribución completa, las comunicaciones italianas presentan reservas a este fenómeno, quizá por una forma inadecuada de llevar a cabo los ensayos.

Resumiendo, podemos terminar estos comentarios diciendo que las teorías plásticas han llegado a un punto de madurez que les permiten imponerse en el cálculo y dimensionamiento de gran número de elementos de las estructuras, y así se viene haciendo en

vigas y estructuras metálicas de una planta (procedimiento muy extendido en U.S.A.), en vigas y pórticos de hormigón armado, en placas (con las teorías de cálculo de líneas de rotura de Johansen), etc.; pero, en general, para estructuras complicadas y aquellos casos de cargas accidentales y alternadas, deben

estudiarse los casos concretos con cuidado, analizando los procesos completos de las diversas hipótesis de carga, siendo conveniente, desde luego, una intensificación en los ensayos con modelos de hormigón armado y pretensado que permita ir confirmando la validez de los principios teóricos.

Bibliografía.

1. R. V. Mises: "Mechanik der festen Körper im plastic deformablen Zustand" (1913).
2. H. Bleich: *Bauingenieur* (1932).
3. A. Freudenthal: "Teoría de plasticidad en la investigación de estructuras estáticamente indeterminadas" (Praga, 1934).
4. — "The inelastic behaviour of engineering materials and structures" (1950).
5. A. A. Gvozdev: "Determinación de la carga de rotura en sistemas hiperestáticos" (1939).
6. Van den Broek: "Theory of limit design" (1939).
7. W. H. Glanville y G. Thomas: "Moment redistribution in reinforced concrete" (1939).
8. A. Nadai: "Plasticity" (1941).
9. P. S. Symonds y W. Prager: "Elastic plastic analysis of structures" (1950).
10. P. S. Symonds: "A review of methods for the plastic analysis of rigid frames of ductile metal" (1950).
11. H. Grenberg y W. Prager: "Limit design of beams and frames" (P.A.S.C.E., 1951).
12. A. A. Ilouchine: "Plasticidad".
13. B. G. Neal y P. S. Symonds: "The rapid calculation of the plastic collapse load a framed structure" (1951).
14. V. Franciosi: "Sul calcolo a rotura delle strutture" (*G. G. Civile*, 1952).
15. W. K. Ahrouthounian: "Aplicaciones de la teoría de fluencia".
16. R. Gartner: "Design of indeterminate structures by the plastic method" (1953).
17. A. R. Rjanitsyn: "Cálculo a la rotura y plasticidad de las construcciones" (1953).
18. Y. Guyón: "Distribution de moments dans les constructions hiperestatiques précontraintes au delà de la phase elastique" (T.I.P., 1955).