

EL PROBLEMA DE LA PLACA RECTANGULAR APOYADA Y SUS DERIVACIONES

Por RAMON VIDAL DE ARTAZA,
Ingeniero de Caminos.

Se refiere el autor a un artículo publicado en nuestro número de septiembre de 1955, en el que se presentó una solución general para la ecuación de las placas, y se propone en el presente artículo resolver el problema en cuatro casos particulares.

En la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de septiembre de 1955, el autor del presente trabajo publicó una solución general para la ecuación de las placas, que se aplicó a tres problemas característicos de las placas circulares. Dicha solución es la parte real de

$$W = \frac{3(1-\nu^2)}{2\pi E h^3} \left[(\overline{z-z_0}) \left[(z-z_0) \log(z-z_0) + \Phi(z) \right] + \Psi(z) \right],$$

en donde z_0 representa el punto de aplicación de la carga unidad; h es el espesor de la placa; E y ν , las constantes elásticas, y las funciones Φ y Ψ son funciones holomorfas de la variable compleja z dentro del contorno de la placa. Para cada caso, los valores Φ y Ψ se determinan por las condiciones de la sustentación en los bordes.

En el presente trabajo se resuelven cuatro problemas de contornos libremente apoyados, que son: el de la placa rectangular, el de la faja indefinida, el de la faja semiindefinida y el del cuadrante de plano. En todos ellos se llega a expresiones en términos finitos con funciones conocidas. El problema de la placa rectangular hace intervenir, como era de prever, las funciones elípticas $p z$ y ξz de Weierstrass. Los otros problemas podrían considerarse como degeneraciones de la solución de la placa rectangular, pero los hemos resuelto por el mismo método operatorio que, como se verá, es muy simple. Como es sabido, los momentos flectores bajo una carga concentrada, son infinitos en la teoría de las placas delgadas y del orden de $\log(z-z_0)$. Esta discontinuidad bajo el punto de aplicación de la carga, desaparece en cuanto se supone repartida la carga sobre una superficie finita, por pequeña que ésta sea.

En cuanto a la utilidad de las soluciones, creemos evidente la de las fajas indefinida y semiindefinida y la del cuadrante de plano, expresadas en función de líneas hiperbólicas y funciones logarítmicas; como no es corriente el disponer de tablas de las funciones $p z$, ξz , puede discutirse la utilidad de la solución, para la placa rectangular, en tanto no se disponga de elementos para el cálculo rápido de dichas funciones.

Placa rectangular apoyada.

La solución general de la ecuación de las placas

$$W = (\overline{z-z_0}) [(z-z_0) \log(z-z_0) + \Phi(z)] + \Psi(z), \quad [0]$$

en donde Φ y Ψ son funciones holomorfas de z dentro del recinto de la placa y en la que se supone que en el punto z_0 está aplicada la carga aislada

$$P = \frac{2\pi E h^3}{3(1-\nu^2)},$$

debe satisfacer, en caso de libre apoyo en sus cuatro bordes, a las condiciones:

$$\begin{aligned} W &\equiv 0; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &\equiv 0 \quad \text{en los bordes paralelos a } OY; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &\equiv 0 \quad \text{en los bordes paralelos a } OX. \end{aligned}$$

Siendo, por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &\equiv 0 \quad \text{en los bordes paralelos a } OX; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &\equiv 0 \quad \text{en los bordes paralelos a } OY; \end{aligned}$$

deberá ser en todo el contorno:

$$W \equiv 0; \quad \Delta W \equiv 0.$$

Notaciones.

Usaremos el signo $=$ en el sentido ordinario; el signo $\equiv$ entre dos expresiones significará que ambas tienen igual su parte real. Los signos p , ξ representan las funciones elípticas de Weierstrass, y los períodos serán: el real, $2\omega_1$; el imaginario puro, $2\omega_3$, y $2\omega_2$ será el otro vértice, distinto del origen del rectángulo de los períodos $2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3$. Usaremos, además, las conocidas notaciones:

$$\zeta \omega_1 = \eta_1; \quad \zeta \omega_2 = \eta_2; \quad \zeta \omega_3 = \eta_3; \quad \eta_2 = \eta_1 + \eta_3.$$

Estos valores están ligados con los semiperíodos por la conocida relación:

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = i \frac{\pi}{2}.$$

El guión superior sobre una cantidad expresa su imaginaria conjugada.

Cálculo de ΔW .

Con estas notaciones se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &\equiv \left[(z - z_0) \log (z - z_0) + \Phi \right] + \\ &+ (\overline{z - z_0}) \left[1 + \log (z - z_0) + \frac{d\Phi}{dz} \right] + \frac{d\Psi}{dz}; \\ \frac{\partial W}{\partial y} &\equiv -i \left[(z - z_0) \log (z - z_0) + \Phi \right] + \\ &+ i (\overline{z - z_0}) \left[1 + \log (z - z_0) + \frac{d\Phi}{dz} \right] + i \frac{d\Psi}{dz}. \end{aligned} \right\} [1]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &\equiv 2 \left[1 + \log (z - z_0) + \frac{d\Phi}{dz} \right] + \\ &+ (\overline{z - z_0}) \left[\frac{1}{z - z_0} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} \right] + \frac{d^2\Psi}{dz^2}; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &\equiv 2 \left[1 + \log (z - z_0) + \frac{d\Phi}{dz} \right] - \\ &- (\overline{z - z_0}) \left[\frac{1}{z - z_0} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} \right] - \frac{d^2\Psi}{dz^2}. \end{aligned} \right\} [2]$$

De las dos últimas se deduce:

$$\Delta W \equiv 4 \left[1 + \log (z - z_0) + \frac{d\Phi}{dz} \right].$$

Como debe ser, sobre el contorno,

$$\Delta W \equiv 0;$$

y $\frac{d\Phi}{dz}$ es una función holomorfa dentro del rectángulo, debemos determinar esta función de manera que su parte real coincida, sobre el contorno, con la de la función $-1 - \log (z - z_0)$, o sea:

$$\frac{d\Phi}{dz} \equiv -1 - \log (z - z_0).$$

Sabemos que la función $p z$ es real sobre el rectángulo de los semiperíodos y que, además, toma valores imaginarios conjugados en puntos simétricos con respecto al eje real; así, pues, la función:

$$\frac{p z - p z_0}{p z - p \bar{z}_0}$$

será unimodular sobre el contorno del rectángulo de los semiperíodos y, por tanto:

$$\log \frac{p z - p z_0}{p z - p \bar{z}_0}$$

tendrá nula su parte real: se deduce de esto que:

$$-1 + \log \frac{p z - p z_0}{(z - z_0)(p z - p \bar{z}_0)} \equiv -1 - \log (z - z_0).$$

La primera es, además, holomorfa dentro del rectángulo de los semiperíodos por no tener ceros ni polos su parte logarítmica dentro del referido rectángulo, y por tanto:

$$\frac{d\Phi}{dz} = -1 + \log \frac{p z - p z_0}{(p z - p \bar{z}_0)(z - z_0)}. \quad [3]$$

Podríamos determinar la otra función Ψ sustituyendo el valor de Φ en la expresión de W y determinando Ψ de modo que $W \equiv 0$; pero como esto presenta evidentes complicaciones, vamos a determinar $\frac{d^2\Psi}{dz^2}$ con la condición de que $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \equiv 0$ en el contorno de la placa, que coincide con el del rectángulo de los semiperíodos.

La primera expresión de las [2] nos da:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dz^2} &\equiv -2 \left[1 + \log (z - z_0) + \frac{d\Phi}{dz} \right] - \\ &- (\overline{z - z_0}) \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} \right), \end{aligned}$$

y sustituyendo en el segundo miembro el valor determinado para $\frac{d\Phi}{dz}$;

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dz^2} &\equiv -2 \log \frac{p z - p z_0}{p z - p \bar{z}_0} - \\ &- (\overline{z - z_0}) \frac{p' z (p z_0 - p \bar{z}_0)}{(p z - p z_0)(p z - p \bar{z}_0)}. \end{aligned} \quad [3']$$

Como el primer término del segundo miembro es unimodular sobre el contorno, sobre él será:

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} \equiv -(\overline{z - z_0}) \frac{p' z (p z_0 - p \bar{z}_0)}{(p z - p z_0)(p z - p \bar{z}_0)}. \quad [4]$$

Determinemos antes una función $A(z)$ holomorfa dentro del contorno tal que:

$$A \equiv -(z + \bar{z}) p' z (p z_0 - p \bar{z}_0);$$

observando que $p z_0 - p \bar{z}_0$ es imaginario puro; que

$p'z$ es real sobre los lados $O\omega_1$ y $\omega_2\omega_3$ del rectángulo e imaginario puro sobre los ω_1 , ω_2 y $O\omega_3$, y que

$$\left. \begin{aligned} z + \bar{z} & \text{ real sobre } O\omega_1 \\ z + \bar{z} = 2\omega_1 & \text{ sobre } \omega_1\omega_2 \\ z + \bar{z} & \text{ real sobre } \omega_2\omega_3 \\ z + \bar{z} = O & \text{ sobre } O\omega_3 \end{aligned} \right\} [5]$$

se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} A & \equiv O & \text{sobre } O\omega_1 \\ A & \equiv -2\omega_1 p'z (pz_0 - p\bar{z}_0) & \text{sobre } \omega_1\omega_2 \\ A & \equiv O & \text{sobre } \omega_2\omega_3 \\ A & \equiv O & \text{sobre } O\omega_3 \end{aligned} \right\} [6]$$

La función A puede determinarse por medio de la fórmula que resuelve el problema de Dirichlet en el círculo, con el cambio de variable:

$$Z = \frac{pz - pz_0}{pz - p\bar{z}_0},$$

que efectúa la representación conforme del rectángulo $O\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sobre el círculo unidad. Desarrollando los cálculos, que omitimos, se obtiene:

$$A = \frac{4i\omega_1}{\pi} (z_0 - \bar{z}_0) p'z (\omega_3 \zeta z - z\eta_3). \quad [7]$$

Podemos comprobar, *a posteriori*, que esta función verifica las condiciones [6]; en efecto:

1.º Sobre $O\omega_1$, ζz y z son reales, y ω_3, η_3 son imaginarios puros; y como $p'z$ y ω_1 son reales, toda la expresión [7] será imaginaria pura, y por lo tanto,

$$A \equiv O.$$

2.º Sobre $\omega_1\omega_2$ es $z = \omega_1 + iy$. Se tiene, además, aplicando el teorema de adición de la función ζz :

$$\zeta(\omega_1 + iy) = \frac{1}{2} \frac{p'\omega_1 - p'(iy)}{p\omega_1 - p(iy)} + \zeta\omega_1 + \zeta(iy).$$

En esta expresión se tiene:

$$\begin{aligned} p'\omega_1 &= 0 \\ p'(iy) &= \text{imaginario puro} \\ p\omega_1 \text{ y } p(iy) &\text{ son reales} \\ \zeta\omega_1 = \eta_1 &= \text{real} \\ \zeta(iy) &= \text{imaginario puro.} \end{aligned}$$

La parte real de paréntesis de [7] será:

$$\omega_3 \eta_1 - \omega_1 \eta_3 = i \frac{\pi}{2},$$

y por ser $p'z$ imaginario puro sobre ω_1, ω_2 , la parte real de A será:

$$A \equiv \frac{4i\omega_1}{\pi} (z_0 - \bar{z}_0) p'z \frac{i\pi}{2} = -2\omega_1 (z_0 - \bar{z}_0) p'z.$$

3.º Sobre ω_2, ω_3 es:

$$\begin{aligned} z &= x + \omega_3 \\ \zeta(x + \omega_3) &= \frac{1}{2} \frac{p'x - p'\omega_3}{px - p\omega_3} + \zeta x + \zeta\omega_3 \\ p'\omega_3 &= 0 \\ p'x &= \text{real} \\ px \text{ y } p\omega_3 &\text{ reales} \\ \zeta x &= \text{real} \\ \zeta\omega_3 = \eta_3 &= \text{imaginario puro.} \end{aligned}$$

La parte imaginaria del paréntesis de [7] será η_3 , y por ser $p'z$ real sobre ω_2, ω_3 , la parte real de A será:

$$\frac{4i\omega_1}{\pi} (z_0 - \bar{z}_0) p'z (\omega_3 \eta_3 - \omega_3 \eta_3) = 0.$$

4.º Sobre $O\omega_3$ es:

$$\begin{aligned} z &= iy \\ \zeta(iy) &= \text{imaginario puro;} \end{aligned}$$

y, por lo tanto, la parte real de A será:

$$A \equiv O.$$

Una vez comprobado esto es fácil ver que:

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \equiv \frac{1}{(pz - pz_0)(pz - p\bar{z}_0)} [\bar{z}_0 p'z (pz_0 - p\bar{z}_0) + A + z p'z (pz_0 - p\bar{z}_0)]$$

ya que $(pz - pz_0)(pz - p\bar{z}_0)$ es real sobre el contorno.

Se tiene, finalmente:

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \equiv \frac{p'z (pz_0 - p\bar{z}_0)}{(pz - pz_0)(pz - p\bar{z}_0)} \left[z + \bar{z}_0 + \frac{4i\omega_1}{\pi} (\omega_3 \zeta z - z\eta_3) \right]. \quad [8]$$

Hay que notar que la función del segundo miembro no es holomorfa dentro del rectángulo, ya que tiene un polo simple en $z = z_0$; pero es fácil encontrar una función holomorfa dentro de dicho recinto y que tenga la misma parte real sobre el contorno.

En efecto: si llamamos

$$\left. \begin{aligned} F(z_0, \bar{z}_0) &= z_0 + \bar{z}_0 + \frac{4i\omega_1}{\pi} (\omega_3 \zeta z_0 - z_0 \eta_3); \\ F(\bar{z}_0, z_0) &= z_0 + \bar{z}_0 + \frac{4i\omega_1}{\pi} (\omega_3 \zeta \bar{z}_0 - \bar{z}_0 \eta_3); \end{aligned} \right\} [9]$$

las expresiones $F(z_0, \bar{z}_0)$, $F(\bar{z}_0, z_0)$ serán imaginarias conjugadas por ser ω_3, η_3 imaginarios puros. El coeficiente del término polar del segundo miembro de [8] será:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p' z (p z_0 - p \bar{z}_0) (z - z_0)}{(p z - p z_0) (p z - p \bar{z}_0)} \left[z + \bar{z}_0 + \frac{4 i \omega_1}{\pi} (\omega_3 \zeta z - z \eta_3) \right] = F(z_0, \bar{z}_0).$$

Como, por otra parte, por ser p real sobre el contorno, se verifica, sobre el contorno:

$$-\frac{p' z_0}{p z - p z_0} F(z_0, \bar{z}_0) + \frac{p' \bar{z}_0}{p z - p \bar{z}_0} F(\bar{z}_0, z_0) \equiv 0,$$

resulta que:

$$\frac{F(z_0, \bar{z}_0)}{z - z_0} \equiv -\frac{p' \bar{z}_0}{p z - p \bar{z}_0} F(z_0, \bar{z}_0) + \frac{p' z_0}{p z - p \bar{z}_0} F(\bar{z}_0, z_0) + \frac{F(z_0, \bar{z}_0)}{z - z_0},$$

siendo, además, holomorfa dentro del rectángulo la función del segundo miembro.

De esto se deduce, finalmente, como expresión de $\frac{d^2 \Psi'}{d z^2}$.

$$\frac{d^2 \Psi'}{d z^2} = \frac{p' z (p z_0 - p \bar{z}_0)}{(p z - p z_0) (p z - p \bar{z}_0)} \left[z + \bar{z}_0 + \frac{4 i \omega_1}{\pi} (\omega_3 \zeta z - z \eta_3) \right] - \frac{p' z_0}{p z - p z_0} \left[z_0 + \bar{z}_0 + \frac{4 i \omega_1}{\pi} (\omega_3 \zeta z_0 - z_0 \eta_3) \right] + \frac{p' \bar{z}_0}{p z - p \bar{z}_0} \left[z_0 + \bar{z}_0 + \frac{4 i \omega_1}{\pi} (\omega_3 \zeta \bar{z}_0 - \bar{z}_0 \eta_3) \right], \quad [10]$$

y sustituyendo en [2], después de hacer

$$F(z, \bar{z}) = z + \bar{z} + \frac{4 i \omega_1}{\pi} (\omega_3 \zeta z - z \eta_3),$$

se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &\equiv 2 \log \frac{p z - p z_0}{p z - p \bar{z}_0} + \\ &+ \frac{p' z (p z_0 - p \bar{z}_0)}{(p z - p z_0) (p z - p \bar{z}_0)} F(z, \bar{z}) - \\ &- \frac{p' z_0}{p z - p z_0} F(z_0, \bar{z}_0) + \frac{p' \bar{z}_0}{p z - p \bar{z}_0} F(\bar{z}_0, z_0). \end{aligned} \right\} [11]$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \equiv 4 \log \frac{p z - p z_0}{p z - p \bar{z}_0}.$$

De las expresiones [11] se pueden deducir las de los momentos flectores por las fórmulas conocidas.

El momento de torsión se deduce de la expresión [1] formando la derivada:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \equiv i \overline{(z - z_0)} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \right) + i \frac{d^2 \Psi'}{d z^2}, \quad [13]$$

o bien:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \equiv i \frac{p' z (p z_0 - p \bar{z}_0)}{(p z - p z_0) (p z - p \bar{z}_0)} F(z, \bar{z}) - \frac{i p' z_0}{p z - p z_0} F(z_0, \bar{z}_0) + \frac{i p' \bar{z}_0}{p z - p \bar{z}_0} F(\bar{z}_0, z_0). \quad [14]$$

Banda indefinida por ambos lados de ancho a con carga en z_0 .

Siendo la función:

$$\text{th} \frac{\pi z}{a}$$

real sobre las rectas:

$$y = 0; \quad y = a;$$

la función:

$$\frac{\text{th} \frac{\pi z}{a} - \text{th} \frac{\pi z_0}{a}}{\text{th} \frac{\pi z}{a} - \text{th} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}},$$

y por lo tanto, la:

$$\frac{\text{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)}{\text{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)},$$

serán unimodulares sobre el contorno de la banda definida por las dos rectas citadas y se podrá escribir:

$$\frac{d \Phi}{d z} = -1 + \log \frac{\text{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)}{(z - z_0) \text{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)}. \quad [15]$$

Análogamente a lo tratado en el caso de la placa rectangular, se tendrá:

$$\frac{d^2 \Psi'}{d z^2} \equiv -\overline{(z - z_0)} \left[\frac{\pi}{a} \frac{\text{ch} \frac{\pi}{a} (z - z_0)}{\text{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)} - \frac{\pi}{a} \frac{\text{ch} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)}{\text{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} \right],$$

o bien:

$$\frac{d^2 \Psi'}{d z^2} \equiv -\frac{\pi}{a} \overline{(z - z_0)} \frac{\text{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\text{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0) \text{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)}. \quad [16]$$

Si consideramos la función:

$$A \equiv -\frac{\pi}{a} (z + \bar{z}) \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0) \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)};$$

se observa que, siendo el denominador real, sobre el contorno de la banda, e imaginario puro el factor $\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)$, la función A será imaginaria pura sobre el dicho contorno, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{a} \bar{z} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0) \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} \equiv \\ & \equiv \frac{\pi}{a} z \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0) \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)}; \end{aligned}$$

y sustituyendo en [15] se obtiene:

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \equiv \frac{\pi}{a} (z + \bar{z}_0) \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0) \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)}. \quad [17]$$

Para encontrar la función holomorfa, cuya parte real coincide, sobre el contorno, con la parte real del segundo miembro de [17], observamos que el coeficiente de su parte polar en el entorno de $z = z_0$ es:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\pi}{a} (z + \bar{z}_0) \frac{z - z_0}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} = z_0 + \bar{z}_0;$$

y por lo tanto, y sobre el contorno:

$$\begin{aligned} \frac{z_0 + \bar{z}_0}{z - z_0} & \equiv -\frac{\pi}{a} \frac{z_0 + \bar{z}_0}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)} + \\ & + \frac{\pi}{a} \frac{z_0 + \bar{z}_0}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} + \frac{z_0 + \bar{z}_0}{z - z_0}; \end{aligned}$$

obteniéndose así, finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} & \equiv \frac{\pi}{a} (z + \bar{z}_0) \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0) \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} - \\ & - \frac{\pi}{a} (z_0 + \bar{z}_0) \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)} - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} \right]. \quad [18] \end{aligned}$$

De aquí se deducen las expresiones de las derivadas parciales segundas del corrimiento W de la placa, que se necesitan para el cálculo de los momentos flectores y de torsión, por sustitución en [2] y [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \equiv 2 \log \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} + \\ & + \frac{\pi}{a} (z + \bar{z}) \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0) \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} - \\ & - \frac{\pi}{a} (z_0 + \bar{z}_0) \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)} - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} \right]; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \equiv 4 \log \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)}; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \equiv i \frac{\pi}{a} (z + \bar{z}) \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z_0 - \bar{z}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0) \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} - \\ & - i \frac{\pi}{a} (z_0 + \bar{z}_0) \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - z_0)} - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (z - \bar{z}_0)} \right]. \end{aligned} \quad [19]$$

Banda semiindefinida limitada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = a$ con carga concentrada en el punto z_0 .

Siendo real la función $\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a}$ sobre el contorno, la función

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}},$$

será unimodular en él, y por lo tanto:

$$\frac{d\Phi}{dz} = -1 + \log \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a}}{(z - z_0) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right)} \quad [20]$$

y por lo tanto:

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} = -(z - \bar{z}_0) \frac{\frac{\pi}{a} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right)}$$

Si consideramos la función holomorfa A dentro del contorno, tal que:

$$A \equiv -(z + \bar{z}) \frac{\pi}{a} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a},$$

vemos que la función A tiene su parte real nula sobre las rectas $y=0$; $y=a$, y que sobre la $x=0$, por ser $z + \bar{z} = 0$ y anularse el segundo miembro, también es cero.

Así, pues, podemos escribir:

$$\begin{aligned} -\bar{z} \frac{\pi}{a} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a} &\equiv \\ &\equiv z \frac{\pi}{a} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}. \end{aligned}$$

Como el producto:

$$\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right),$$

es real sobre el contorno, se tendrá, pues:

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \equiv \frac{\frac{\pi}{a} (z + \bar{z}_0) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right)} \quad [21]$$

El coeficiente de la parte polar de la función del segundo miembro será:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{\pi}{a} (z + \bar{z}_0) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a} (z - z_0)}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right)} &= \\ &= z_0 + \bar{z}_0. \end{aligned}$$

y, por lo tanto, se verifica sobre el contorno:

$$\begin{aligned} \frac{z_0 + \bar{z}_0}{z - z_0} &\equiv -\frac{\pi}{a} \cdot \frac{(z_0 + \bar{z}_0) \operatorname{sh} \frac{\pi z_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a}} + \frac{\pi}{a} \cdot \\ &\cdot \frac{(z_0 + \bar{z}_0) \operatorname{sh} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}} + \frac{z_0 + \bar{z}_0}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Con esta expresión se obtiene de la [12], finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} &= \frac{\pi}{a} (z + \bar{z}_0) \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right)} - \\ &- \frac{\pi}{a} \frac{(z_0 + \bar{z}_0) \operatorname{sh} \frac{\pi z_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a}} + \frac{\pi}{a} \frac{(z_0 + \bar{z}_0) \operatorname{sh} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}}. \end{aligned}$$

Deduciéndose para las derivadas parciales segundas del corrimiento w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &\equiv 2 \log \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}} + \\ &+ \frac{\pi}{a} (z + \bar{z}) \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right)} - \\ &- \frac{\pi}{a} (z_0 + \bar{z}_0) \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \equiv 4 \log \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &\equiv i \frac{\pi}{a} (z + \bar{z}) \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a} \right)} - \\ &- i \frac{\pi}{a} (z_0 + \bar{z}_0) \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi z_0}{a}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{a} - \operatorname{ch} \frac{\pi \bar{z}_0}{a}} \right] \end{aligned}$$

[22]

**Cuadrante de plano apoyado en los ejes $O X$,
 $O Y$ con carga aislada en el punto z_0 .**

Así como en los problemas anteriores no convenía determinar la expresión del corrimiento W por no poder expresarse por medio de funciones conocidas, en el caso que ahora nos ocupa, podemos hacerlo así, y llegaremos, como se verá, a una fórmula notable por su simetría:

Siendo la función:

$$\frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - \bar{z}_0^2}$$

unimodular sobre $x=0$; $y=0$, se tendrá que:

$$\frac{d\Phi}{dz} = -1 + \log \frac{z + z_0}{z^2 - \bar{z}_0^2},$$

y por lo tanto:

$$\Phi = (z + z_0) \log(z + z_0) - (z - \bar{z}_0) \log(z - \bar{z}_0) - (z + \bar{z}_0) \log(z + \bar{z}_0).$$

Sustituyendo Φ en la expresión [0] del corrimiento, se tendrá:

$$W = (\bar{z} - \bar{z}_0) [(z - z_0) \log(z - z_0) + (z + z_0) \log(z + z_0) - (z - \bar{z}_0) \log(z - \bar{z}_0) - (z + \bar{z}_0) \log(z + \bar{z}_0)] + \Psi. \quad [23]$$

Como W debe tener su parte real nula sobre el contorno, Ψ será una función holomorfa en el cuarto de plano, y tal que:

$$-\Psi \equiv \overline{(z - z_0)} [(z - z_0) \log(z - z_0) + \dots],$$

sobre el contorno.

O bien, ya que $(z - z_0) \overline{(z - z_0)}$ es real y, sobre los ejes, es:

$$\log(z - z_0) \equiv -\log(z + z_0) + \log(z - \bar{z}_0) + \log(z + \bar{z}_0),$$

se tendrá asimismo:

$$-\Psi \equiv \overline{(z - z_0)} [2z_0 \log(z + z_0) - (z_0 - \bar{z}_0) \log(z - \bar{z}_0) - (z_0 + \bar{z}_0) \log(z + \bar{z}_0)]. \quad [24]$$

La parte real de esta expresión se descompone en dos: una, que es la de la función

$$-\bar{z}_0 [2z_0 \log(z + z_0) - (z_0 - \bar{z}_0) \log(z - \bar{z}_0) - (z_0 + \bar{z}_0) \log(z + \bar{z}_0)],$$

que es, además, holomorfa en el cuadrante, y la otra, que es la de

$$\bar{z} [2z_0 \log(z + z_0) - (z_0 - \bar{z}_0) \log(z - \bar{z}_0) - (z_0 + \bar{z}_0) \log(z + \bar{z}_0)],$$

puede escribirse en la forma:

$$\bar{z} \left[(z_0 + \bar{z}_0) \log \frac{z + \bar{z}_0}{z + \bar{z}_0} + (z_0 - \bar{z}_0) \log \frac{z + z_0}{z - \bar{z}_0} \right]. \quad [25]$$

Como las funciones:

$$\frac{z + z_0}{z + \bar{z}_0}; \quad \frac{z + z_0}{z - \bar{z}_0},$$

son unimodulares sobre $O X$ y $O Y$, respectivamente, resulta que:

$$z(z_0 - \bar{z}_0) \log \frac{z + z_0}{z - \bar{z}_0} - z(z_0 + \bar{z}_0) \log \frac{z + z_0}{z + \bar{z}_0},$$

tiene la misma parte real que [25] sobre el contorno del cuadrante, siendo, además, holomorfa dentro de él; se obtiene para valor de Ψ :

$$\Psi = (z + \bar{z}_0) (z_0 + \bar{z}_0) \log \frac{z + z_0}{z + \bar{z}_0} - (z - \bar{z}_0) (z_0 - \bar{z}_0) \log \frac{z + z_0}{z - \bar{z}_0},$$

y finalmente, por sustitución en [23]:

$$W \equiv (z - z_0) (\bar{z} - \bar{z}_0) \log(z - z_0) + (z + z_0) (\bar{z} + \bar{z}_0) \log(z + z_0) - (z - \bar{z}_0) (\bar{z} - \bar{z}_0) \log(z - \bar{z}_0) - (z + \bar{z}_0) (\bar{z} + \bar{z}_0) \log(z + \bar{z}_0),$$

que da para W el valor notable:

$$W = |z - z_0|^2 \log |z - z_0| + |z + z_0|^2 \log |z + z_0| - |z - \bar{z}_0|^2 \log |z - \bar{z}_0| - |z + \bar{z}_0|^2 \log |z + \bar{z}_0|.$$

De la primera fórmula de W se deducen cómodamente los valores de los momentos y esfuerzos cortantes, en cuya determinación no entramos.