

LA SEMEJANZA EN EL CALCULO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE HORMIGON ARMADO

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITFZ,
Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor algunas normas que permiten a los proyectistas economizar tiempo en los cálculos estructurales de hormigón armado, haciendo el uso debido de la semejanza en otras estructuras ya estudiadas.

Es evidente que estructuras aun de tipo muy sencillo exigen para su proyecto definitivo de construcción bastante trabajo de gabinete si se desea que en los planos se refleje claramente lo que los encargados a pie de obra deben ejecutar.

También es cierto que aun tratándose de cálculos fáciles, hasta que se han logrado unas dimensiones adecuadas de los distintos elementos y se ha hecho un despiece conveniente de las armaduras, se invierte a veces un considerable tiempo de trabajo, del que no siempre se dispone con holgura.

Otras veces, aun hecho gran parte del proyecto, por multitud de razones conviene o variar las luces o variar las cargas, o ambas cosas, y entonces casi todo lo realizado puede ser trabajo inútil.

En fin, en otras ocasiones, por razones económicas, funcionales o estéticas, nos conviene efectuar tanteos para elegir la solución más conveniente.

Para auxiliarnos en nuestro trabajo, los libros y formularios contienen no sólo numerosas tablas y abacos de fácil manejo, sino esquemas de cálculo de las estructuras más usuales (vigas, placas, pórticos, arcos, etc.), detallando espesores y despieces de armaduras.

Es cómodo a veces *inspirarnos* en estructuras que sabemos están bien calculadas y que en la práctica han trabajado con buen resultado. La labor del proyectista puede así reducirse a *interpolarse* o *extrapolarse* los resultados logrados por otros. En la interpolación no suele haber dificultades y con alguna prudencia podemos decir que se marcha sobre camino seguro. En cambio, con la extrapolación hay que ser más precavido. Si, por ejemplo, tenemos proyectados dos arcos o vigas de 6 y 8 metros de luz de tipos y sobrecargas no muy diferentes, es evidente que con facilidad podremos proyectar otro de 7 metros *interpolando* (no todos los valores siempre linealmente) entre los dados. Pero si queremos proyectar uno de 20 metros de luz a base de ellos, tendremos probablemente que comenzar los cálculos y realizarlos en su totalidad. La *extrapolación* resultaría excesiva.

Vamos a referirnos a continuación a ciertas leyes que se deducen de aplicar las fórmulas del *cálculo ordinario* del hormigón armado que consideramos de

utilidad. Sin duda, gran parte de los lectores las habrán aplicado, pues su evidencia es manifiesta.

Para mayor facilidad, vamos a examinar el caso de una viga de luz teórica l , apoyada en sus extremos y con una sobrecarga uniforme p . Supondremos que es de sección *rectangular* de ancho b , canto total d . El canto útil es h , y está armada sólo en la zona de tracción con una armadura de sección F_c . Las cargas de trabajo del hormigón y del acero son σ_b y σ_e , respectivamente.

Si prescindimos del peso propio de la viga, el momento es máximo en su centro y vale:

$$M = \frac{1}{8} p l^2. \quad [1]$$

El canto útil preciso es (*):

$$h = k_2 \sqrt{M : b}, \quad [2]$$

en que k_2 es función sólo de σ_b y σ_e y, por tanto, *constante* para determinadas calidades de hormigón y acero.

La armadura necesaria es:

$$F_c = b \cdot h : k_1. \quad [3]$$

Supongamos ahora que manteniendo el mismo ancho b y la misma sobrecarga uniforme p por unidad de longitud, deseáramos que su luz fuese $l' \neq l$. En tal caso, las fórmulas [1], [2] y [3] se transformarían, respectivamente, en:

$$M' = \frac{1}{8} p l'^2. \quad [1']$$

$$h' = k_2 \sqrt{M' : b}. \quad [2']$$

$$F'_c = b h' : k_1. \quad [3']$$

(*) Adoptamos la notación alemana utilizada con frecuencia en formularios y textos alemanes, como el clásico de Lösser de *Hormigón Armado*.

Si l , h , b y d están en cm., F_c en cm.², M en Tn./cm.: si por ejemplo:

$\sigma_b = 0,040$ Tn./cm.² y $\sigma_e = 1,2$ Tn./cm.² $k_2 = 12,99$ y $k_1 = 180,0$

Combinándolas adecuadamente, resulta:

$$\frac{h'}{h} = \frac{F_c}{F_e} = \frac{l'}{l}$$

es decir, que: *Los cantos útiles y las secciones totales de las armaduras son directamente proporcionales a las luces (*)*.

Los alzados de las vigas son "semejantes" en cuanto a las dimensiones del hormigón.

Supongamos ahora que tenemos en cuenta el peso propio. Por unidad de longitud es éste $g = d \cdot b \cdot \delta$, en que δ es el peso específico del hormigón.

Como el canto total d difiere poco del útil h y demás, podemos suponer que son siempre proporcionales ($h:d \approx 0,9$): si englobamos en la constante γ esta constante de proporcionalidad, queda:

$$g = \gamma \cdot h \cdot b \left(\gamma = \frac{d}{h} \right).$$

Por lo tanto, la carga total es:

$$q = g + p = \gamma \cdot h \cdot b + p.$$

Aplicando las fórmulas anteriores, nos resulta:

$$\frac{h'}{h} = \sqrt{\frac{q' l'^2}{q l^2}} = \sqrt{\frac{p + \gamma h b}{p + \gamma h' b}} \times \frac{l'}{l}.$$

Efectuando operaciones, resulta una ecuación de segundo grado en $h':b$, cuya raíz válida en nuestro caso es:

$$\frac{h'}{h} = \frac{g}{2q} \left(\frac{l'}{l} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{g}{2q} \right)^2 \left(\frac{l'}{l} \right)^4 + \frac{p}{q} \left(\frac{l'}{l} \right)^2} \quad [4]$$

expresión que vamos a examinar.

1.º La sobrecarga p , muy pequeña respecto al peso propio g de la estructura

$$p : q = p : (g + p) \rightarrow 0;$$

resultado:

$$\frac{h'}{h} = \left(\frac{l'}{l} \right)^2 \quad [5]$$

(*) Es evidente que si las cargas son puntuales, los momentos resultan proporcionales a las luces y, por tanto, los cantos y las secciones de acero serán proporcionales a las raíces cuadradas de las luces.

2.º El peso propio g es muy pequeño respecto a p (o sea a q):

$$\frac{h'}{h} = \frac{l'}{l}$$

[5]

Es decir: "Para vigas del mismo ancho b y sometidas a las mismas sobrecargas p por unidad de longitud, los cantos serán proporcionales a los cuadrados de las luces, si lo que predominan son los pesos propios de las mismas, y proporcionales a las luces, si lo que predominan son las sobrecargas" (*).

(*) Esta es la razón por la cual es muy recomendable que, para vanos grandes, haya que emplear materiales buenos y no muy pesados. De otra forma, al salvar una gran luz, la carestía aumentaría más por el peso propio de la estructura que por el de sus sobrecargas. Esto es, por ejemplo, un motivo de la utilización de aceros especiales y hormigones de alta resistencia, como se exige en el *pretensado*. A la técnica en general le interesa lograr grandes resistencias con materiales ligeros. Así ocurre con el aluminio, y sobre todo con sus aleaciones. Por eso, sobre todo en aviación, se emplea cada vez más el magnesio (tendencia a utilizar materiales que, a la vez de inoxidables, sean tales que la relación entre su carga admisible de trabajo y su densidad sea lo mayor posible). Se han indicado también otros materiales como de gran porvenir, sobre todo si su obtención en escala industrial se logra continuar abaratándola.

Pero concretándonos al hormigón y al acero ordinario, diremos que la proporción en que deben emplearse en el hormigón armado depende, además de las cargas admisibles de trabajo para cada material, del precio a que ambos nos resultan puestos en unidades de obra. Para mayor sencillez, consideremos una viga o placa de anchura b , dada. Sean p_h y p_e los precios, del metro cúbico de hormigón y del kilogramo de acero (densidad 7,85), que también suponemos dados de antemano. Las fórmulas anteriores nos dan que el importe del metro lineal de viga sería:

$$P = (d : 100) (b : 100) p_h + 10 (F_c : 100) \times 7,85 \cdot p_e = \\ = (b p_h : 9000) h + (0,785 \text{ k}^2 \text{ M} \cdot p_e : k_h) \frac{1}{h}.$$

Pero esto es la suma de dos sumandos cuyo producto es constante. Por tanto, es mínima cuando son iguales. Por ello podemos decir que: *la proporción en que debe emplearse el acero debe ser tal, que su importe total colocado sea el mismo que el del hormigón colocado*. Si, por ejemplo, el hormigón para armar resultase a 600 pesetas metro cúbico, y el acero a 5,00 pesetas kilogramo cada metro cúbico de hormigón, debiera armarse con 600:5,00 = 120 kilogramos de acero.

Si el acero subiese hasta 9 pesetas kilogramo colocado y el hormigón se mantuviera a 720 pesetas metro cúbico, las cuantías a utilizar disminuirían a 720:9 = 80 kilogramos de acero por metro cúbico.

En realidad es inútil intentar abaratar mucho una obra bajando más el contenido de acero. Aun a un precio muy caro, hay que tener en cuenta que en el hormigón armado juega el acero en las proporciones indicadas.

En realidad, la economía se logrará utilizando, a la vez que aceros de mayores resistencias y adherencias, hormigones de elevadas cargas de trabajo.

En general no se verifica ni [5] ni [5'], sino que, con arreglo a [4], se cumplirá que

$$\frac{l'}{l} < \frac{h'}{h} < \left(\frac{l'}{l}\right)^2 \quad [6]$$

si $l' > l$.

En cuanto a la sección de armaduras F'_c y F_c , resulta, sin más que examinar [3] y [3'], que entre si han de guardar la misma relación que h' y h dada por [4].

Veamos qué ocurre con los esfuerzos cortantes.

Consideramos vigas del mismo ancho b y de peso propio despreciables frente a la sobrecarga p .

La fuerza tangencial en una longitud a de viga es:

$$H = \frac{\Delta M}{z}$$

en que ΔM es el incremento de momentos y z el brazo de palanca de las fuerzas interiores.

Para otra viga de luz l' en la longitud homóloga a' :

$$H' = \frac{\Delta M'}{z'}$$

Como

$$M' : M = (l' : l)^2 \quad \text{y} \quad z' : z = h' : h = l' : l,$$

resulta que

$$H' : H = l' : l$$

Como las fuerzas que absorben los estribos o de barras levantadas son proporcionales a H' y H , resulta, en definitiva, que en longitudes homólogas (y por tanto en la totalidad de cada viga), las secciones de los hierros, ya sean de estribos o de barras levantadas, son proporcionales también a las luces de las vigas (*).

(*) O sea la misma sección por unidad de longitud de viga. Pero como (si los pesos de las vigas son pequeños con relación a las sobrecargas) los cantos son proporcionales a las luces y los estribos tienen longitudes proporcionales (o casi iguales) a dichos cantos, resulta en definitiva que los pesos totales de hierros en estribos son también, por metro lineal de viga, directamente proporcionales a las luces.

A propósito de las barras levantadas, indicaremos que con ellas se aprovecha mejor la sección del acero ($\sqrt{2} = 1,41$ veces más si van a 45°), pero como tienen mayor longitud (1,41 veces también), el consumo total de acero por efecto del esfuerzo cortante sería el mismo con estribos que con barras levantadas. No obstante, se aprovecha mejor el hierro,

Ejemplo. — Supongamos una viga de $l = 4$ metros de luz, cargada a razón de $0,8$ Tn./m. l. Para $M = \frac{1}{8} 0,8 \times 4^2 = 1,6$ m./Tn., el canto útil para $\sigma_b = 40$ Kg./cm.², $\sigma_c = 1.200$ Kg./cm.², es $h = 12,99 \sqrt{160 : 20} = 32,7$ cm., si partimos de un ancho de $b = 20$ cm. Tomaremos $d = 35$ cm. como canto total. La armadura de tracción en su centro será de sección:

$$F_c = 32,7 \times 20 : 180 = 3,64 \text{ cm.}^2 \text{ (2 } \Phi \text{ 15 mm. = 4,02 cm.}^2\text{)}$$

Si la viga fuese de $l' = 6$ m. nos bastaría hacerla de también 20 cm. de ancho y canto total de $\frac{6}{4} 35 = 1,5 \times 35 = 52,5$ cm. y armarla con $F'_c = \frac{l'}{l} 3,64 = 5,46 \text{ cm.}^2$, o sea:

$$\text{con } 3 \Phi \text{ 16 mm.} = 6,03 \text{ cm.}^2$$

$$\text{o con } 4 \Phi \text{ 14 mm.} = 6,16 \text{ cm.}^2$$

$$\text{o con } 5 \Phi \text{ 12 mm.} = 5,65 \text{ cm.}^2$$

También cabe jugar con los anchos para compensar las variaciones de las sobrecargas. Por ejemplo, si la viga de 6 m. de luz estuviese además cargada con $p' = 1,0$ Tn./m. l. (en vez de $0,8$ Tn./m. l.), bastará hacerla de $b' = \frac{1,0}{0,8} 20 = 25$ cm. de anchura

y armarla proporcionalmente, o sea con $F'_c = \frac{1,0}{0,8} 3,64 = 6,825 \text{ cm.}^2$ (4 Φ 16 mm., 5 Φ 14 mm., ó 6 Φ 12 mm.), manteniendo el canto total de 52,5 cm.

En resumen podemos establecer: que si dos vigas tienen de luces l' y l y sobrecargas p' y p , sus anchuras b' y b estarán en la proporción de $b' : b = p' : p$; sus cantos en la $h' : h = l' : l$, y sus armaduras, en la $F'_c : F_c = (l' p') : (l p)$.

Los estribos, si se sitúan en puntos homólogos, y por tanto hay el mismo número de ellos en cada viga, tendrán secciones también proporcionales a los productos $l' p'$ y $l p$.

En el caso particular de que $p' = p$ v $b' = b$, se deduce que los volúmenes de hormigón y los pesos de acero a emplear son, por metro lineal de viga, directamente proporcionales a las luces.

Vemos, por tanto, que las luces grandes — de todos es sabido — resultan caras.

pues las barras que se van levantando son las que no son necesarias para las tracciones producidas por los momentos flectores. Además, las barras levantadas a 45° vienen a tener en la fibra neutra direcciones paralelas a las isostáticas de tracción, razón por la cual hacen un cosido mejor de las grietas que pudieran presentarse en el hormigón.

La economía máxima de materiales, hormigón y acero, se conseguiría, evidentemente, reduciendo la anchura b de la viga, con lo que aumenta el canto útil h (*).

Pero hay razones que limitan a h : primera,

(*) Pues para el ancho b se deduce de [1], [2] y [3] que el volumen de hormigón por unidad de longitud de viga es:

$$b \cdot d = b \sqrt{\frac{M}{b} \cdot \frac{d k_2}{h}} = \frac{k_2}{0.9} \sqrt{M b} .$$

y la sección de acero:

$$F_c = \frac{b h}{k_1} = \frac{b}{k_1} \sqrt{\frac{M}{b}} = \frac{1}{k_1} \sqrt{M b}$$

no se dispone siempre de un canto excesivamente grande; segunda, además, si $b:h$ es muy pequeño, puede pandear la viga desplazándose transversalmente, y tercera, los forjados, pilares, etc., pueden transmitir a las vigas momentos de torsión que originan esfuerzos tangenciales tanto mayor cuanto más desiguales son los lados del rectángulo sección. Por ello es aconsejable, en las estructuras corrientes, que los cantos no sean superiores al doble o al triple de los anchos.

Sin dificultad se generalizan los resultados obtenidos a vigas T simples o continuas, de sección constante o variable, a placas y a pórticos y arcos sencillos, así como a muchas estructuras, sin más que examinar las fórmulas fundamentales, en la misma forma análoga a como hemos procedido.