

TURBULENCIA EN VERTEDEROS

Por LUIS FERNANDEZ RENAU,
Ingeniero de Caminos, M. S.

Presenta el autor un trabajo completo sobre el interesante tema epigrafiado, que por su extensión dividiremos en tres artículos. En esta primera parte se hace un resumen de las investigaciones practicadas en Estados Unidos y Francia, con una sugerencia final encaminada hacia una solución más general del problema.

LISTA DE SÍMBOLOS

- A = un coeficiente.
 a = un coeficiente.
 b = un coeficiente (estudios de capa límite).
 b = ancho de la estela.
 b_{∞} = valor límite de b .
 c = un coeficiente.
 $C_D = 2F/\rho d U^2_b$ = coeficiente de resistencia.
 c_f = coeficiente local de fricción en la pared.
 d = diámetro de la varilla.
 e = base de los logaritmos neperianos.
 f = coeficiente de Darcy-Weisbach.
 F = empuje total en la varilla.
 g = aceleración de la gravedad.
 k = rugosidad equivalente de Nikuradse.
 $K_1 = \int_0^1 f(\eta) d\eta$.
 $K_2 = \int_0^1 [f(\eta)]^2 d\eta$.
 $K_3 = \rho \Delta u_c / U_x \frac{db}{dx}$.
 l = recorrido de mezcla de Prandtl.
 $1/n$ = un exponente.
 q = caudal por unidad de ancho.
 R_m = número de Reynolds = $U_x \cdot m/\nu$.
 S = pendiente del fondo del vertedero (seno del ángulo con la horizontal).
 u = componente de la velocidad según el eje x .
 u' = componente de la fluctuación de la velocidad según el eje x .
 u_θ = componente de la velocidad a distancia $y = \theta$ de la pared, según el eje x .
 U_0 = velocidad potencial aguas arriba del área $ABCD$.
 U_b = velocidad potencial en el punto de situación de la varilla.
 U_x = velocidad potencial.
 Δu = componente de la velocidad de la estela, según el eje x .
 Δu_c = velocidad de la estela en el eje de la misma.
 $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ = velocidad de corte (*shear velocity*).
 w = componente de la fluctuación de la velocidad de la estela, según el eje z .

- W_x = componente, según el eje z , de la velocidad potencial a lo largo del lado CD del área $ABCD$.
 w = componente, según el eje z , de la velocidad de la estela a lo largo del lado CD del área $ABCD$.
 $W = \gamma b x S$ = componente del peso de $ABCD$, según el eje x .
 $x = U^2_x/2gS$ = distancia en la dirección de la corriente.
 x' = distancia a la varilla en la dirección de la corriente.
 $x_b = U^2_b/2gS$ = valor de x , que define la situación de la varilla.
 y = distancia al fondo del canal.
 y_0 = profundidad de la corriente medida perpendicularmente al fondo del canal.
 z = distancia al eje del canal.
 $z_1 = 0,4 U^2_x / \sqrt{\tau_0/\rho}$.
 $\xi z_1 = \delta \frac{2+n}{n}$.
 $\beta = l/b$ = relación del recorrido de mezcla de Prandtl al ancho de la estela.
 δ = espesor de la capa límite lateral.
 δ_c = espesor de la capa límite del fondo.
 $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_x}\right) dy$.
 $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_x} \left(1 - \frac{u}{U_x}\right) dy$.
 $\eta = z/b$.
 $\Gamma_i = \sqrt{1 - U_b/U_x}$.
 μ = viscosidad dinámica del fluido.
 ν = viscosidad cinemática del fluido.
 ρ = densidad del fluido.
 $\Lambda = \delta^*/\theta$.
 τ_0 = tensión tangencial en la pared.

NOTAS:

1. log indica logaritmos vulgares.
2. La primera parte de este trabajo se refiere solamente a δ_c , espesor de la capa límite que se desarrolla a lo largo del fondo del vertedero, que, para mayor sencillez, se designa sin el subíndice.

INTRODUCCION

El problema que presentamos tiene especial interés para el proyectista hidráulico, por estar directamente relacionado con la localización de la zona en que el agua, vertiente sobre la pendiente pronunciada de una obra hidráulica, inicia el acarreo del aire. Dicho acarreo comienza donde la superficie del agua se torna agitada como resultado de la proximidad de una fuente de turbulencia, cualquiera que sea su causa. Como quiera que la turbulencia progresa desde el fondo y muros cajeros de los vertederos y en la estela que se origina detrás de las pilas de dichas estructuras, el estudio de la formación y desarrollo de tales capas límites y estelas turbulentas, es necesario, para un mejor conocimiento del fenómeno de la admisión o intrusión de aire por el agua fluente sobre un vertedero (figs. 1.^a, 2.^a, 3.^a y 4.^a). La consiguiente hinchazón del agua, una vez admitido aire, ejerce una importante influencia económica en el proyecto de la estructura hidráulica, pues determina hasta qué punto los cajeros deben proveerse de altura adicional. El proyecto del cuenco amortiguador aguas abajo del vertedero se verá, asimismo, afectado por esta circunstancia.

El desarrollo de la capa límite turbulenta provocada por el fondo de pendiente pronunciada de los vertederos, ha merecido especial atención de investigadores, como Bauer, en Estados Unidos, y Halbronn, en Francia, entre otros muchos. La primera parte de este trabajo es un resumen-crítica de estas investigaciones previas, con una sugerencia final hacia una solución más general del problema. La difusión de la capa límite turbulenta originada en los muros cajeros de los vertederos, y el desarrollo de las estelas creadas por las pilas de tales estructuras, son temas de cuyo estudio no tenemos noticia hasta el presente. Este es el objeto primordial de la segunda parte de la investigación que a continuación se describe, cuya parte experimental ha sido llevada a cabo en los laboratorios del Instituto de Hidráulica de la Universidad del Estado de Iowa, U.S.A.

PRIMERA PARTE

La capa límite del fondo de un vertedero.

ANTECEDENTES DEL PROBLEMA. RESUMEN Y CRÍTICA.

Las descargas de agua sobre pendientes acentuadas son un viejo tema en la literatura hidráulica. La hipótesis de un fluido perfecto conduce a la existencia de un potencial de velocidades. Tenemos a nuestro alcance múltiples recursos teóricos y experimentales para el estudio de este movimiento irrotacional.

Los métodos iterativos, analogías eléctricas y métodos gráficos son otros tantos medios para el trazado de la red de corriente. Sin embargo, son nece-

sarios cálculos laboriosos y múltiples tanteos para llegar a encontrar la superficie libre del agua. Los coeficientes de descarga y las distribuciones de presiones y velocidades, se deducen fácilmente de la red de corriente, una vez se ha tenido éxito en su trazado.

Todos estos métodos clásicos de estudio son válidos mientras el vertedero sea corto y la viscosidad del agua no entre en el problema. Pero la hipótesis teórica de un fluido ideal, perfecto, se aparta de la realidad en cuanto nos alejamos de la cresta del vertedero. El fluido real es viscoso y requiere la existencia de una velocidad nula a lo largo de las fronteras sólidas que lo limitan. Se hace preciso distinguir dos zonas: una zona de flujo rotacional próxima a las paredes y fondo, la así llamada capa límite, donde los fenómenos viscosos llevan a cabo una disipación prácticamente total de la energía, y una zona de flujo "casi irrotacional", donde aún son válidas las teorías de la red de corriente bidimensional.

El espesor de la capa límite crece aguas abajo, y ésta se hace pronto turbulenta, aun siendo posiblemente laminar en su principio. Esta capa límite se desarrolla hasta alcanzar la superficie libre del agua si el vertedero es suficientemente largo. Entonces, cuando la cantidad de movimiento transversal de las partículas de agua de la corriente turbulenta llega a vencer la tensión capilar de la superficie libre del agua, la capa límite rompe dicha superficie libre en un cierto punto crítico o, mejor dicho, zona crítica. Después de pasar el punto crítico, la superficie del agua comienza a "hervir" con un aspecto lechoso, perdiendo su apariencia de cristal. A partir de aquí el agua toma aire de la atmósfera que la circunda, lo arrastra consigo y se expande.



Fig. 1.^a — Primer plano del vertedero Werribee.

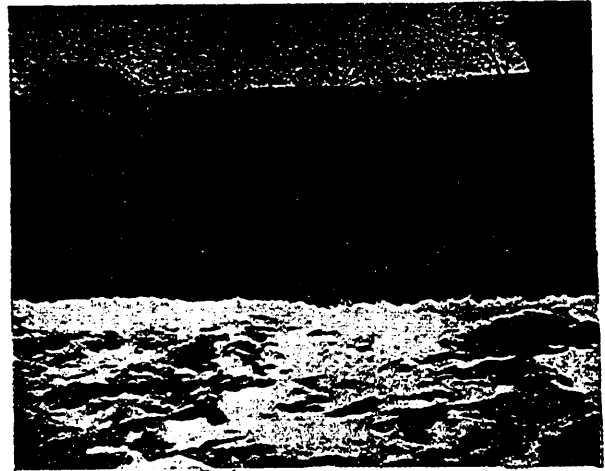
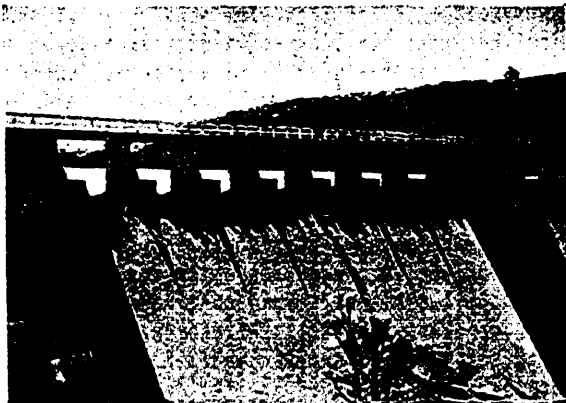
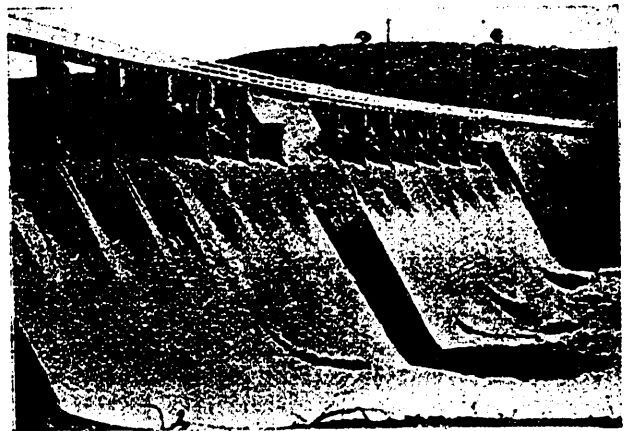


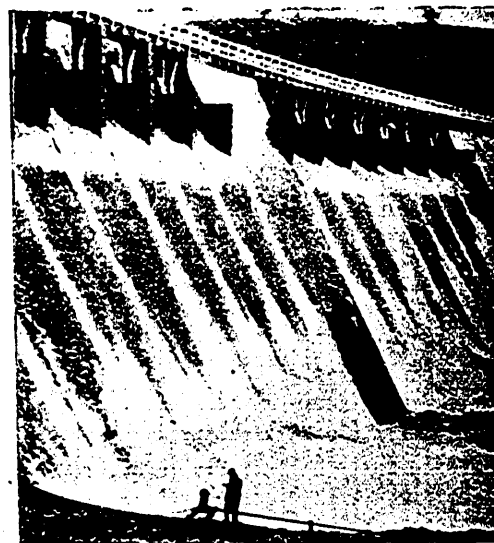
Fig. 2.^a — Fotos del vertedero Werribee. Alturas de la lámina vertiente sobre la cresta: 0,18 y 0,24 m., respectivamente.



Espesor de la lámina vertiente en la cresta: 0,30 m.



Espesor de la lámina vertiente en la cresta: 0,75 m.



Espesor de la lámina vertiente en la cresta: 1,20 m.

Fig. 3.^a — Fotos del vertedero de la presa Glenmaggie.



Fig. 4.^a—Foto desde la cresta del vertedero de la presa Glenmaggie.

La creencia de la existencia de una velocidad límite, a partir de la cual se verifica el acarreo de aire por el agua (Stevens, 1938), ha sido hace tiempo descartada, y la explicación del fenómeno que acabamos de dar se acepta hoy sin reservas.

El estudio en modelo reducido no es aquí posible, pues verificada la igualdad de números de Froude de modelo y prototipo, y siendo e_L la escala de longitudes, la relación de las energías cinéticas transversales de las partículas de agua, en modelo y prototipo, es e_L^4 , mientras que la relación de trabajos de las fuerzas de tensión superficial es tan sólo e_L^2 . Además, realizada la semejanza tipo Froude, los regímenes establecidos en modelo y prototipo son, en general, distintos, no existiendo analogía entre las capas límites desarrolladas en uno y otro.

El problema de la admisión de aire por agua fluyente con aceleración gravitatoria se ve así revertido al problema más general del estudio de la capa límite turbulenta bajo un gradiente de presiones negativo. La aplicación del teorema de las cantidades de movimiento al fluido dentro de la capa límite permite la formulación de la relación diferencial de Von Kármán:

$$\frac{\tau_0}{\rho U_x^2} = \frac{d\theta}{dx} + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta^*}{\theta}\right) \frac{\theta}{U_x^2} \frac{d(U_x^2)}{dx}, \quad [1]$$

donde τ_0 es la tensión tangencial en la pared, U_x es la velocidad potencial, x es la distancia en la dirección de la corriente y δ^* y θ son parámetros frecuentemente usados en los estudios de capa límite, que vienen definidos por las relaciones:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_x}\right) dy;$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_x} \left(1 - \frac{u}{U_x}\right) dy.$$

El primero expresa la distancia de la pared a que ha sido separado el flujo potencial por la existencia de la capa límite, y el segundo es una medida relativa de la disminución de cantidad de movimiento en el seno de la capa límite.

Para realizar la integración de la relación de Von Kármán se precisa conocer la variación con la abscisa x , de U_x , τ_0 y el parámetro de forma $\Lambda = \delta^*/\theta$. Corrientemente, U_x es una función conocida, y τ_0 y Λ tienen que ser supuestos de acuerdo con estudios experimentales.

En el caso de la capa límite laminar, escogida una relación de tipo polinomio para representar la distribución de velocidades dentro de la capa límite, el método de Kármán-Pohlhausen-Holstein (1) es eficaz, aunque laborioso, y da una descripción completa del desarrollo de la capa límite. Pero en el caso de la capa límite turbulenta, no existiendo posibilidad de expresar analíticamente la distribución de velocidades, tenemos que contentarnos con el conocimiento de τ_0 , δ^* y θ , ya descritos, y de un parámetro de forma de la distribución de velocidades. Gruschwitz (1), tras adoptar un cierto parámetro de forma (*), lo relaciona empíricamente con Λ . Consideraciones dimensionales sobre la variación energética de una partícula a distancia $y = \theta$ de la pared, le conducen a otra relación de tipo experimental. Dichas dos relaciones empíricas, y la adopción de una expresión para τ_0 por transformación para una pared plana de los resultados obtenidos en tuberías, permiten a Gruschwitz integrar la ecuación fundamental de Von Kármán. De este mismo carácter general son los estudios de Doenhoff, Tetervin, Lin y Granville (3), (4), (5).

La integración específica de la ecuación de Von Kármán para capa límite turbulenta en régimen acelerado gravitatorio ha sido llevada a cabo recientemente por Halbronn (6), bajo la hipótesis de que tanto τ_0 como la distribución de velocidades siguen, en el caso presente, leyes análogas a las obtenidas para tuberías. Con ello logra describir completamente el desarrollo de la capa límite. Su estudio queda avalado por la buena concordancia existente con observaciones de laboratorio y de la realidad (datos tomados por Hickox en el vertedero de la presa Norris). Como el fluido exterior a la capa límite puede, con buena aproximación, considerarse no viscoso, el método de Halbronn permite situar la superficie libre del agua y su punto de conflicto con la capa límite o punto crítico.

Posteriormente Bauer (7), en el laboratorio de Hidráulica de la Universidad del Estado de Iowa, ha realizado numerosas observaciones en la capa límite que se desarrolla en el fondo de un canal de

(*) El parámetro de Gruschwitz es:

$$\eta = 1 - (u_\theta/U_x)^2,$$

donde u_θ es la velocidad en un punto a distancia $y = \theta$ de la pared.

ensayos inclinado. Como quiera que en el presente trabajo nos referiremos a menudo a los estudios de Bauer, creemos conveniente dedicar mayor atención a su trabajo, para completar así este rápido resumen de investigaciones previas relacionadas con nuestro problema, resumen, por breve, incompleto, si bien necesario.

Bauer adopta como abscisa a lo largo del canal el valor $x = U_x^2 / 2gS$, definido gráficamente en la

tarse que el origen de la abscisa x , tal como se ha definido, varía con el caudal, y la diferenciación con respecto a x presupone un origen fijo. Pero de nuevo, lejos de la cresta del vertedero, esta aproximación puede aceptarse. Experimentando sobre fondos de canal, tanto lisos como rugosos, Bauer define empíricamente los perfiles de velocidad en el seno de la capa límite y, por integración gráfica, obtiene valores de δ^* y θ , que representa en función de x . La aplicación de la relación de Von Kármán modificada [2],

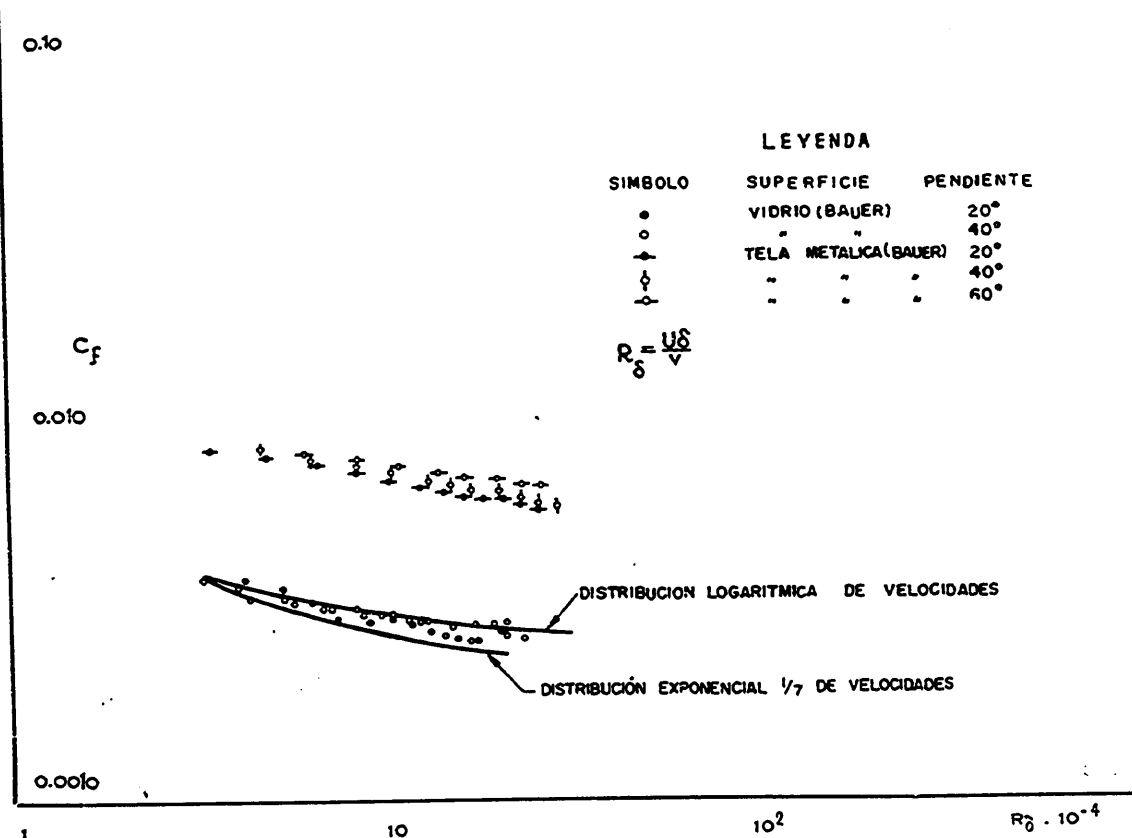


Figura 5.ª

figura 13. La sustitución de este valor en la relación diferencial de Von Kármán conduce a la siguiente expresión de c_f , coeficiente de empuje local:

$$c_f = 2 \frac{d\theta}{dx} + \frac{\delta^*}{x} + 2 \frac{\theta}{x}. \quad [2]$$

La adopción del citado valor de x es una aproximación aceptable en los problemas de vertedero, pues implica la hipótesis de que el fondo del canal y la superficie libre del agua tienen una misma pendiente, hipótesis cuya aproximación es suficiente lejos de la cresta del vertedero, donde, en general, el "agua blanca" hace su aparición. Es decir, el efecto del gradiente de presiones se supone despreciable con suficiente aproximación práctica. Además, debe no-

le permite obtener c_f en función de x . Los valores así encontrados, en el caso de pared lisa, siguen aproximadamente la ley:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4,06 \log \sqrt{c_f} R_\delta + 3,28 \quad (\text{fig. 5}), \quad [3]$$

consecuencia directa de la ley de distribución de velocidades de Kármán-Prandtl en pared lisa:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 5,75 \log \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} \cdot y}{\nu} + 5,50$$

(hágase $y = \delta$, $u = U_x$, $\tau_0 = c_f \rho U_x^2/2$). Análoga aproximación en el caso de pared rugosa, a partir

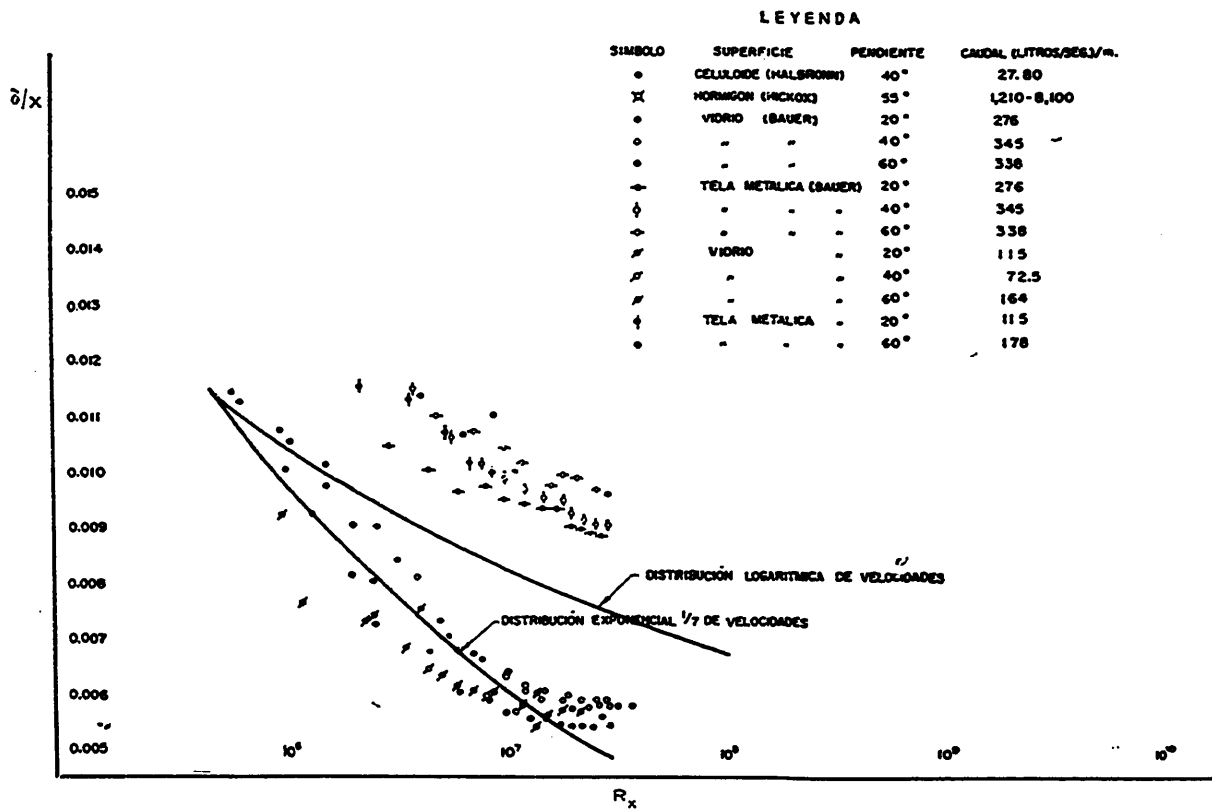


Figura 6.^a

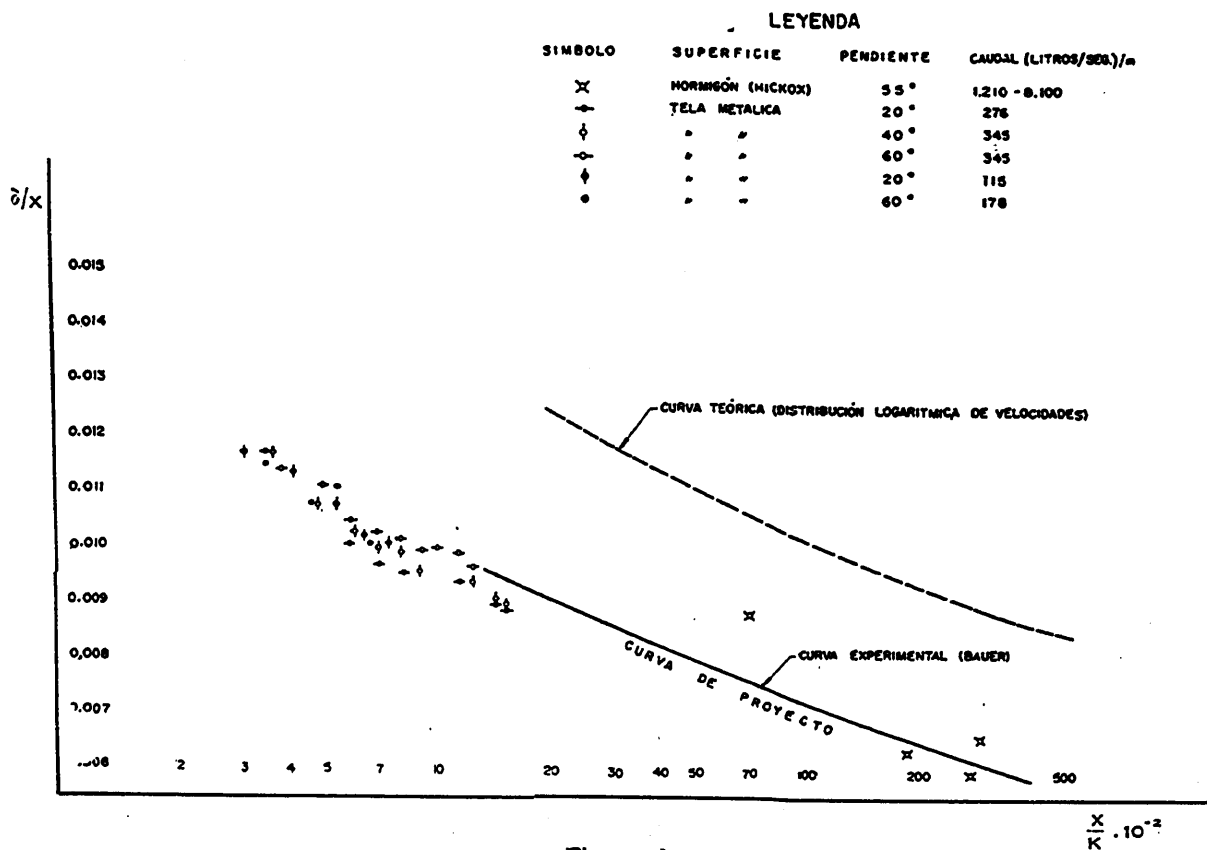


Figura 7.^a

de la correspondiente fórmula de Kármán-Prandtl (*), no es ya tan buena, pues requiere tomar valores de k menores que los obtenidos experimentalmente en un canal de ensayos en régimen uniforme.

Experimentalmente se comprueba (fig. 6.^a) que el espesor de la capa límite δ en un cierto punto de

abscisa $x = U_{x/2}^2 g S$, es prácticamente independiente del caudal y de la pendiente del fondo del canal S . Tanto caudal como pendiente son, desde luego, básicos en la determinación de la superficie libre del agua. La rugosidad del fondo es variable fundamental en el control del espesor de la capa límite, como se comprueba por simple inspección de la figura 6.^a.

Las figuras 6.^a y 7.^a muestran la correlación experimental entre δ/x , $R_x = U_x x/\nu$ y x/k , siendo de esperar que $d(\delta/x)/dR_x$ varíe lentamente para valores muy pequeños o muy grandes de R_x , cualquiera que sea la rugosidad del fondo, pues, en el primer caso, el flujo dentro de la capa límite será laminar, y en el segundo, las prominencias rugosas no rebasarán el espesor de la subcapa laminar, y el régimen podrá calificarse de hidráulicamente liso, ya que dicha rugosidad no dará lugar a resistencia o fricción apreciable. Para valores altos de R_x , la rugosidad de fondo, cuya zona de influencia se reduce en general a un 10 % del espesor de la capa límite contada a partir del fondo, carecerá de importancia local, si bien habrá sido determinante en estados anteriores del desarrollo de la capa límite. La zona de la capa límite exterior al 25 % de su espesor contado desde el fondo, está en general gobernada por la propia difusión de la turbulencia de la capa límite, sin que la rugosidad del fondo ejerza ya su influencia. Como quiera que en los casos de aplicación práctica trabajamos siempre con números de Reynolds R_x altos (**), un conocimiento preciso de la rugosidad del fondo será innecesario, bastándonos en general un valor aproximado de la misma. Se infiere también que no estará económicamente justificado el lograr superficies muy suaves en el fondo de los vertederos, en zonas ya alejadas de la cresta de los mismos. Bauer da una curva (fig. 7.^a), que permite la situación del punto crítico con una aproximación suficiente para los fines prácticos de proyecto de vertederos, a pesar de la incertidumbre existente en cuanto a los valores de la rugosidad a tomar en el proyecto.

En lo que queda de este capítulo, se hace crítica de los resultados de Bauer a la luz de los estudios de Halbronn (6), pasándose finalmente a una solución analítica más general, para cuya puesta a punto se bosqueja un programa experimental.

Halbronn demuestra, en su análisis ya citado (6), que el espesor de la capa límite, tanto laminar como turbulenta, es independiente de las condiciones iniciales, en la zona de nuestro interés, ya lejos de la cresta del vertedero. Esta importante conclusión es fundamental para la solución del problema de la determinación del punto crítico, pues avala la generalidad de los resultados obtenidos.

En régimen hidráulicamente liso $\frac{k \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} < 5$, la ecuación [3] es aplicable. Siguiendo a Halbronn, la inserción de la variable auxiliar

$$z_1 = 0.4 U_x / \sqrt{\tau_0/\rho} = 0.566 / \sqrt{c_f}$$

(0.4 es una constante universal) en dicha ecuación, permite escribir:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.278}{R_x} z_1 e^{z_1} \quad [4]$$

que, llevado a la relación de Von Kármán, da:

$$R_x = 4.35 e^{z_1} (z_1^2 - 2.8 z_1 + 4.32). \quad [5]$$

De [4] y [5] puede obtenerse la expresión aproximada:

$$\frac{\delta}{x} = 0.039 R_x^{-0.097}$$

$$(8.5 < z_1 < 12.5 \quad \text{ó} \quad 0.00205 < c_f < 0.00443),$$

representada en la figura 6.^a.

Si en vez de la ley logarítmica [3], se parte de la expresión

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 8.7 \left(\frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} \right)^{1/7},$$

obtenida por transformación de la ley de Blasius para tuberías lisas (*), se llega a la relación aproximada:

$$\frac{\delta}{x} = 0.158 R_x^{-0.2},$$

válida aproximadamente para $\frac{2 U_x \delta}{\nu} < 10^5$ y representada también en la figura 6.^a.

En régimen rugoso completamente establecido, la transformación de la correspondiente fórmula de Kármán-Prandtl para tuberías conduce a la expresión:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 5.75 \log \frac{y}{k} + 8.5,$$

$$(*) c_f = \frac{0.3164}{\left(\frac{u}{\nu} d \right)^{1/4}} \bar{u}, \text{ velocidad media; } d, \text{ diámetro}$$

de la tubería. Válida para $\frac{\bar{u} d}{\nu} < 10^5$.

$$(*) \frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 5.75 \log \frac{y}{k} + 8.5 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4.06 \log \frac{\delta}{k} + 8.56$$

$$(**) \frac{d(\delta/x)}{dR_x} \approx 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\delta}{x} = \text{cte.} \quad \text{ó} \quad \frac{d\delta}{dx} = \text{cte.}$$

que puede escribirse mediante el uso de la variable $s = 0,4 U_x / \sqrt{\tau_0 / \rho}$ en la forma:

$$\frac{\delta}{x} = 0,0337 \frac{k}{x} e^{z_1} \quad [6]$$

que llevado a la relación diferencial de Von Kármán, da:

$$e^{z_1} \left(z_1 - 2,4 + \frac{2,24}{z_1} \right) = 1,698 \frac{x}{k} \quad [7]$$

$1/n$ es, en general, mayor para el caso de pared rugosa que para el de pared lisa.

Procediendo de las citadas leyes logarítmicas y exponencial de exponente $1/7$, Halbronn ha encontrado, para el caso de pared lisa, relaciones ligando c_f a R_z , y Λ a R_θ , que se indican en las figuras 5.^a y 8.^a. De la figura 5.^a parece desprenderse que la ley logarítmica se adapta mejor que la exponencial a los

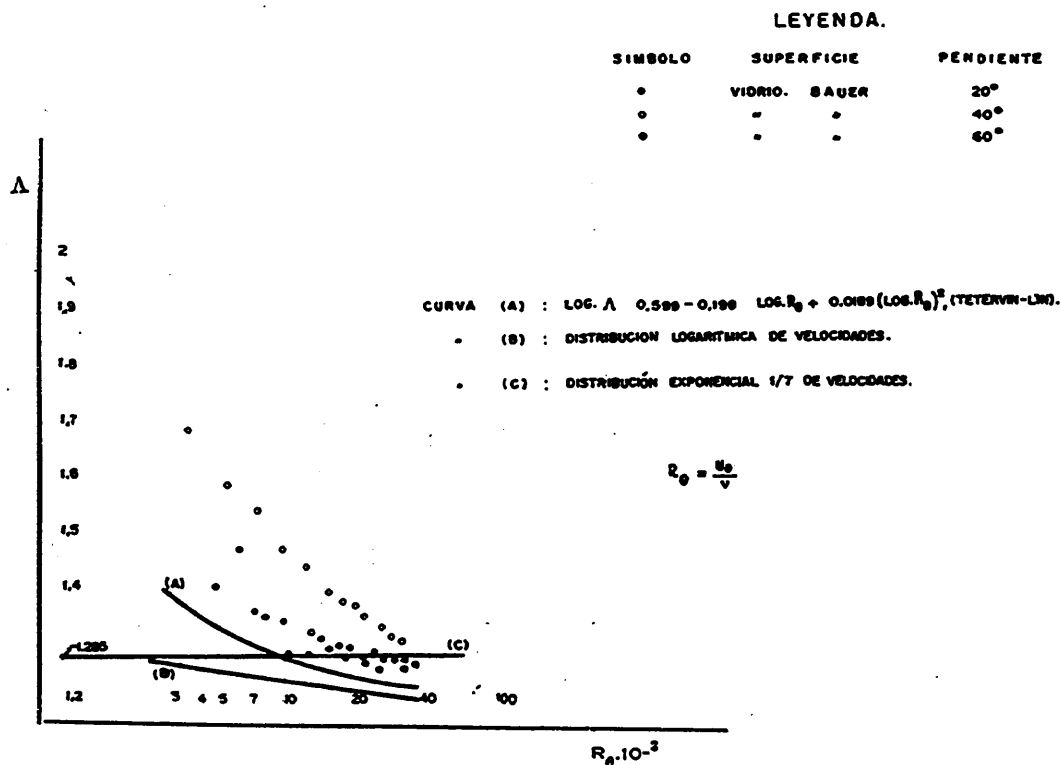


Figura 8.^a

Las ecuaciones [6] y [7] conducen a la expresión aproximada:

$$\frac{\delta}{x} = 0,0447 \left(\frac{x}{k} \right)^{-0,154} \quad [8]$$

$(6 < z_1 < 9 \quad \text{ó} \quad 0,00395 < c_f < 0,0089),$

representada en la figura 7.^a.

Experimentalmente se comprueba que los perfiles de velocidades resultan mejor aproximados por una

expresión exponencial del tipo $u = a y^{\frac{1}{n}}$, que por expresiones logarítmicas de la forma $u = b \log y + c$. En cuanto al valor de n , falta información de carácter general. Los experimentos de Bauer dan, aproximadamente, $n = 7,5$, en el caso de pared lisa. Con anterioridad, ya Schlichting pronosticó exponentes $1/8$, $1/9$ ó $1/10$ más allá de la zona de validez del exponente $1/7$ de la ley de Blasius. El exponente

resultados experimentales. Sin embargo, la adopción de exponente $1/7,5$ para la ley de distribución de velocidades conduciría también a una expresión para c_f en función de R_z , que caería dentro de los valores experimentales mostrados en la figura.

La figura 8.^a muestra cómo, para valores altos del número de Reynolds, la distribución de velocidades de exponente $1/7$ (que da el valor $\Lambda = 7/9$) se adapta bien a los resultados experimentales. Ello era de esperar. Para esos valores altos del número de Reynolds, nos hallamos de nuevo en presencia de regímenes hidráulicamente lisos.

La relación entre δ/x y x/k , mostrada en la figura 7.^a, es, como se ha dicho, fundamental para la solución del problema de la determinación del punto crítico. La curva de proyecto que en ella se da, llena los fines prácticos que nos pide el proyecto de un vertedero, si bien admite severa crítica.

SUGERENCIA DE UNA SOLUCIÓN MÁS GENERAL.

La curva teórica de la figura 7.^a (ecuación [8]) es de valor muy cuestionable, pues está basada en una ley logarítmica de distribución de velocidades, cuando una ley de tipo exponencial sería más apropiada en el caso de pared rugosa. Sin embargo, cuál deba ser el exponente y su variación en estas corrientes aceleradas gravitatorias, es problema no re-

Por otra parte, como ya se ha indicado, la distribución de velocidades viene mejor aproximada por una ley exponencial que por una ley logarítmica. Existen, pues, indudables discrepancias entre los regímenes turbulentos que se crean en una tubería y en un vertedero. Discrepancias que nos llevan a la creencia de que el patrón de rugosidad de Nikuradse, adecuado para tuberías, no es apropiado en el estudio de corrientes aceleradas por la gravedad sobre super-

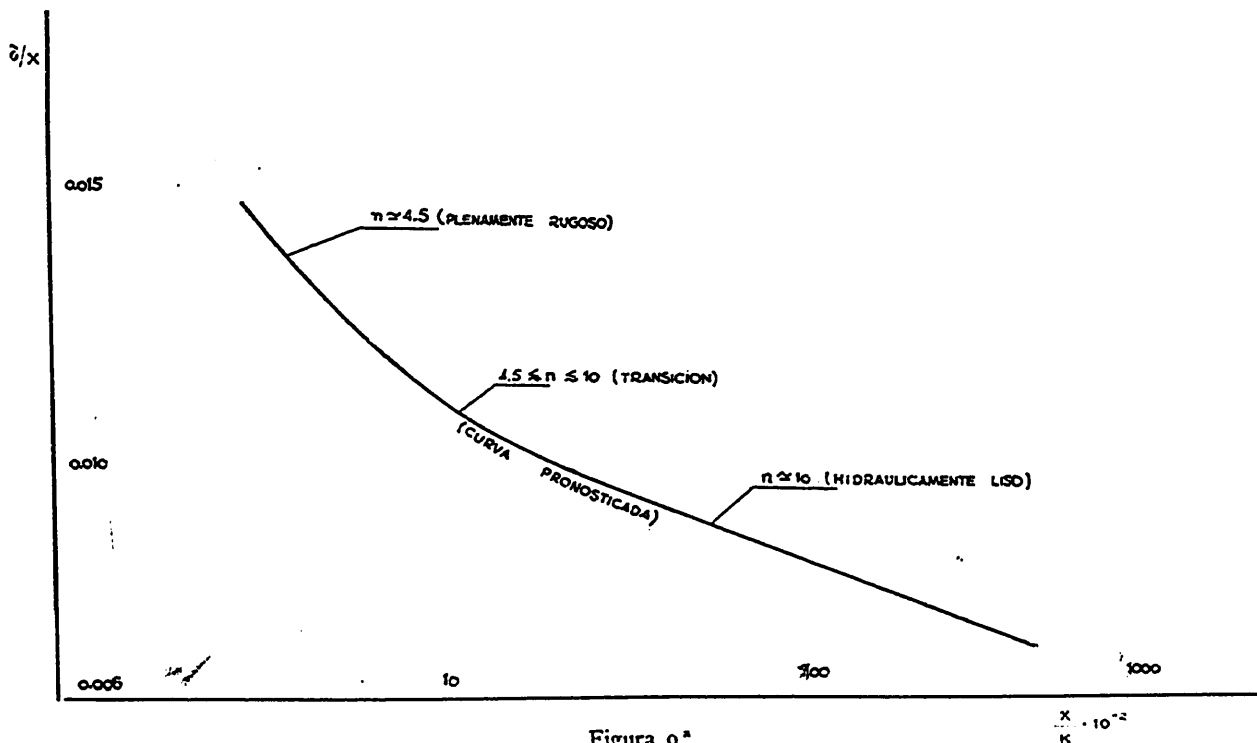


Figura 9.^a

suelto. La mayor dificultad reside precisamente en el hecho de que la distribución de velocidades en el seno de la capa límite no puede expresarse por una sola ley analítica, haciéndose necesario distinguir y profundizar en el estudio de sus diversas regiones, aún casi inexploradas.

Por otra parte, creemos no es apropiado el uso de la rugosidad equivalente de Nikuradse, concepto que nace del estudio de una corriente uniforme a lo largo de paredes cubiertas al máximo por arena uniforme. Schlichting introdujo este concepto para establecer un criterio que permitiese referir una rugosidad cualquiera, K , a los experimentos de Nikuradse en tuberías cubiertas al máximo por arena uniforme y en zona ya de régimen hidráulicamente liso, es decir, independiente del número de Reynolds. La presencia de la aceleración de la gravedad (la existencia de una superficie libre) en los problemas de vertedero, nos lleva a pensar que el clásico coeficiente de Darcy-Weisbach, f , debe ser, en nuestro caso, función no sólo del número de Reynolds, sino también, posiblemente, del número de Froude.

ficies rugosas. No existiendo hasta el presente mediciones experimentales en tales corrientes (mediciones abundantes, confiables y sobre rugosidades uniformes y bien definidas, como las de Nikuradse), que permitan la adopción de una escala de rugosidad adecuada, nos hemos visto obligados a seguir a Bauer y Halbronn, aceptando también la rugosidad equivalente de Nikuradse para la interpretación de nuestros experimentos. Cualitativamente nada se pierde y es siempre una referencia, clásica y fija, de nuestros resultados. La rugosidad equivalente de Nikuradse resulta un poco alta en nuestro caso. Los puntos experimentales de la figura 7.^a quedarían desplazados una cantidad constante paralelamente al eje de abscisas y hacia la derecha, si en el eje de abscisas llevásemos la rugosidad real.

La curva de la figura 7.^a resulta demasiado tendida, pues es sensiblemente paralela a la curva teórica procedente de una ley logarítmica de distribución de velocidades. En lo que sigue justificaremos cómo una ley exponencial de velocidades nos lleva a una curva menos tendida que la de la citada figura 7.^a,

y que caería mejor dentro de la zona cubierta por los valores experimentales, una vez referidos a su rugosidad real, es decir, trasladados hacia la derecha, como antes se ha indicado.

Sea $u/v_* = \Lambda (y/k)^{1/n}$ la ley de distribución de velocidades, donde $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ es la llamada velocidad de corte ("shear velocity"). Se tiene:

$$z^* = z \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U_x}\right) d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{z}{n+1};$$

$$\theta = z \int_0^1 \frac{u}{U_x} \left(1 - \frac{u}{U_x}\right) d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{z n}{(n+1)(n+2)};$$

$$\Lambda = \frac{n+2}{n},$$

donde δ^* , θ y Λ han sido ya definidos. Llevados estos valores a la relación diferencial de Von Kármán [2], obtenemos:

$$\frac{2}{\Lambda^2} \left(\frac{k}{z}\right)^{2/n} = \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \frac{dz}{dx} + \frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} \frac{z}{x}, \quad [9]$$

pues:

$$U_x^2 = 2 g S x \quad \frac{1}{U_x^2} \frac{d(U_x^2)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

La ecuación [9] puede reordenarse así:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3n+2}{2n} \frac{z}{x} - \frac{(n+1)(n+2)k^{2/n}}{\Lambda^2 n} z^{-2/n} = 0.$$

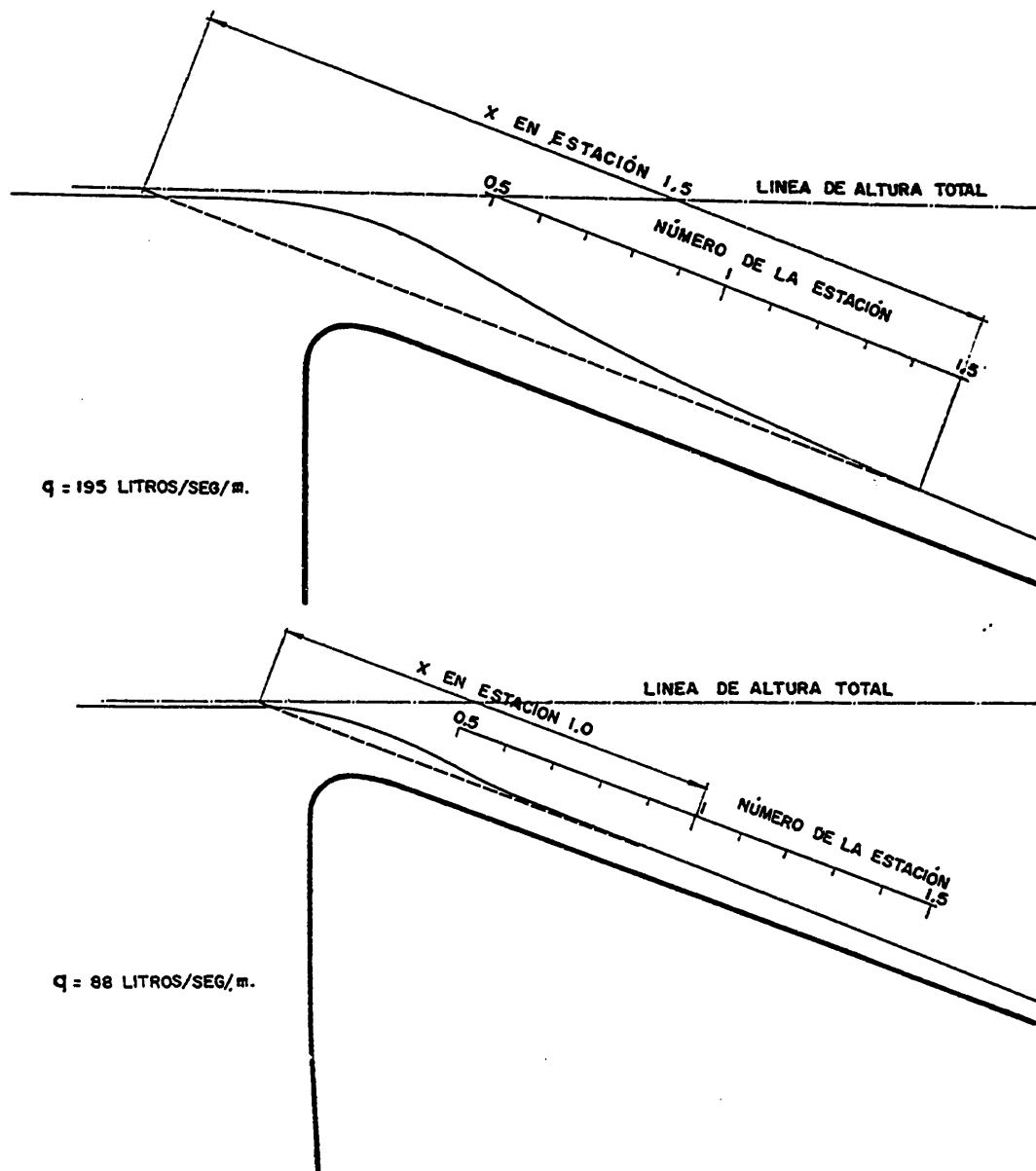


Fig. 13. — Perfiles longitudinales. Caudales máximo y mínimo.

Hagamos el cambio variable $z'_1 = \delta^{\frac{2+n}{n}}$.

$$\frac{d z'_1}{d x} + \frac{(3n+2)(n+2)}{2n^2 x} z'_1 = \frac{(n+1)(n+2)^2}{A^2 n^2} k^{2/n}. \quad [10]$$

La integración de

$$\frac{d z'_1}{d x} + \frac{(3n+2)(n+2)}{2n^2 x} z'_1 = 0,$$

es inmediata:

$$z'_1 = C_1 x^{-\frac{(3n+2)(n+2)}{2n^2}}.$$

Una solución particular de [10] es:

$$z'_1 = \frac{2 k^{2/n}}{A^2} \frac{(n+1)(n+2)^2}{5n^2 + 8n + 4} x.$$

La solución general es, por tanto:

$$z'_1 = C_1 x^{-\frac{(3n+2)(n+2)}{2n^2}} + C_2 \frac{2 k^{2/n}}{A^2} \frac{(n+1)(n+2)^2}{5n^2 + 8n + 4} x,$$

de donde:

$$\delta^{\frac{n+2}{2}} = C_1 x^{-\frac{(3n+2)(n+2)}{2n^2}} + C_2 \frac{2 k^{2/n}}{A^2} x,$$

o bien:

$$\left(\frac{\delta}{x}\right)^{\frac{n+2}{2}} = C_1 \left(\frac{x}{k}\right)^{-\frac{(n+2)(5n+2)}{2n^2}} + C_2 \frac{2}{A^2} \frac{(n+1)(n+2)^2}{5n^2 + 8n + 4} \left(\frac{k}{x}\right)^{2/n}. \quad [11]$$

De los experimentos de Bauer se deduce un

valor medio de n igual a 4.50. La relación anterior [11] queda para el caso $n = 4.50$:

$$\left(\frac{\delta}{x}\right)^{\frac{13}{9}} = C_1 \left(\frac{k}{x}\right)^4 + C_2 \frac{2.30}{A^2} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{2}{4.50}}.$$

El primer sumando es despreciable frente al segundo, de manera que puede escribirse con suficiente aproximación:

$$\frac{\delta}{x} = C \left(\frac{x}{k}\right)^{-0.307} (*).$$

que corresponde a una curva mucho menos tendida que la curva (T) de la figura 7.^a

A título de ejemplo hemos tomado $n = 4.50$. Para valores avanzados de x/k ($x/k > 10^4$), probablemente un valor del exponente mayor que 1/7, tal vez 1/10, caracterizará mejor la ley de distribución de velocidades y la correspondiente curva δ/x en función de x/k será cada vez más tendida.

Una solución apropiada del presente problema requiere el estudio previo de la forma en que el coeficiente A y el exponente n de la ley

$$u/v_* = A (y/k)^{1/n}$$

varían con el número de Reynolds en los diferentes regímenes (rugoso completamente establecido, de transición e hidráulicamente liso). Una vez conocidas dichas variaciones, la ecuación diferencial de Von Kármán podrá integrarse dividiendo adecuadamente en intervalos, en los que A y n puedan tomarse como constantes con suficiente aproximación práctica.

Es necesario, asimismo, realizar numerosas y cuidadosas mediciones de velocidades en la capa límite en canales con pendiente, cuyo fondo esté recubierto al máximo con arenas uniformes de rugosidad conocida, para fijar así leyes de distribución de velocidades a las que referir cualquier caso de rugosidad práctica a través del concepto de rugosidad equivalente.

Esquemáticamente se indica en la figura 9.^a el aspecto general de la relación entre δ/x y x/k .

(Continuará.)

(*) A una relación de este mismo tipo se hubiera llegado por sustitución del término $d\delta/dx$ por δ/x .